Digitized by Google

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
A.B. 1870. A.M. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 · 1922

Digitized by Google

Mathematics
QA
1
.A67

Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Fünfter Theil.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.

1844.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss des fünften Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
IV.	Neuer Beweis der Formeln für die figurirten Zahlen, nebst kritischen Bemerkungen über die bisherigen Beweise. Von Herrn Doct. F. Stegmann, Lehrer an der Realschule und Privatdocenten an der Universität zu Marburg	I.	82
V.	Analytische Aphorismen. Von Herrn Doctor O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	I.	90
IX.	Neues Theorem über eine gewisse Klasse periodischer Functionen. Von Demselben	II.	152
X.	Einige Bemerkungen über die Reihen, mit besonderer Hinweisung auf die Exponential- und Binomialreihe. Von Herrn Doctor Barfuss zu Weimar	II.	155
XII.	Ueber Euler's Princip der Differentialrechnung, ein Zusatz zu des Herrn Doctor Gerhardt Aufsatz im II. Bd. 2. Heft. S. 200. des Archivs für Mathematik und Physik. Von Herrn Doctor L. F. Ofterdinger zu Tübingen	II.	201
XIII.	Ueber einige merkwürdige bestimmte Integrale. Von Herrn Doctor O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	II.	204
XV.	Remarques faites à l'occasion du No. XIII. T. IV. p. 113. de ce journal. Par Monsieur Ubbo H. Meyer de Groningue	II.	216
XVII.	Eine Rechnungsspielerei, zur Sprache gebracht von Herrn Professor Hessel zu Marburg	II.	223
XIX.	Beiträge zur systematischen Darstellung der allgemeinen Arithmetik. Von Herrn L. Ballauf, Lehrer der Mathematik an der Bürgerschule zu Varel.	III.	259

409422

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XX.	Ueber gewisse merkwürdige Reihen. Von dem Herrn Professor Hessel zu Marburg	III.	287
XXX.	Gegen Herrn Doctor Barfuss. Von Herrn Doctor O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena....................	IV.	374
XXXIII.	Einige Bemerkungen über die Gleichungen des dritten Grades. Nach einer Abhandlung des Herrn Professor R. Lobatto zu Delft in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. Mai 1844. p. 177. frei bearbeitet von dem Herausgeber................	IV.	417
XXXVII.	Ueber den zweiten Aufsatz des Herrn Doct. Barfuss (Theil V. Heft II. S. 155.). Von Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena....................	IV.	437
XXXVIII.	Eine neue analytische Gleichung, und deren Anwendung auf die Bestimmung eines vielfachen Integrals und die Summirung einer Reihe. Von Hrn. F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	IV.	443

Geometrie.

VI.	Ueber die Auffindung mathematischer Wahrheiten bei den Griechen. Von Herrn Dr. L. F. Ofterdinger zu Tübingen	I.	102
VII.	Ueber die Aufgabe: ein Viereck von gegebenen Seiten so zu construiren, dass die Diagonalen einander gleich werden. Von Hrn. G. D. E. Weyer, Assistenten an der Sternwarte zu Hamburg...	I.	111
VIII.	Geometrische Untersuchungen über Potenzlinie, Potenzcentrum und Potenzkreis, Polarität, Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsaxen. Von Herrn C. F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	II.	113
XVII.	Merkwürdige Relation zwischen dem Radius des um und in ein Dreieck beschriebenen Kreises, dem Radius des in sein Höhendreieck beschriebenen Kreises, und den Cosinussen seiner drei Winkel. Von dem Herrn Professor Anger zu Danzig ..	II.	223
XVIII.	Theorie der involutorischen Gebilde, nebst Anwendungen auf die Kegelschnitte. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	III.	225
XXII.	Lösung einer interessanten geometrischen Aufgabe. Von dem Herrn Professor Hessel zu Marburg.......................	III.	321

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXIII.	Zur Theorie der Kegelschnitte. Von Herrn C. Adams, Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule zu Winterthur	III.	323
XXV.	Nachtrag zu der Abhandlung Thl. V. Nr. XVIII. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	III.	331
XXIX.	Eine Aufgabe aus der analytischen Geometrie. Von dem Herrn Professor C. G. Wunder an der Königlich Sächsischen Landesschule St. Afra zu Meissen	IV.	361
XXXIV.	Etwas über das Viereck im Kreise. Vom Herausgeber	IV.	428
XXXV.	Eine geometrische Aufgabe. Aus J. F. Pfaff's nachgelassenen Papieren mitgetheilt vom Herausgeber	IV.	431
XXXVI.	Beweis des umgekehrten ptolemäischen Lehrsatzes. Aus J. F. Pfaff's nachgelassenen Papieren mitgetheilt vom Herausgeber	IV.	435

Trigonometrie.

III.	1. Die Gaussischen Gleichungen für ebene Dreiecke. Von dem Herrn Professor C. T. Anger zu Danzig	I.	78
III.	2. Ueber die allgemeine Ableitung der Grundformel der sphärischen Trigonometrie. Von Demselben	I.	79
XXIV.	Ueber die Reihen, welche den Cosinus und Sinus durch Potenzen des Bogens ausdrücken. Von Hrn. Doctor O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	III.	326

Geodäsie.

II.	Lehrsätze aus der analytischen Geometrie und mathematischen Geographie, welche in der praktischen Geometrie zur Anwendung kommen. Von Herrn Professor Dr. Gerling zu Marburg	I.	58
XIV.	Geodätische Aufgabe. Vom Herausgeber	II.	212
XVII.	Ueber eine geodätische Aufgabe. Von Herrn G. D. E. Weyer, Assistenten an der Sternwarte zu Hamburg	II.	223

Mechanik.

III. Zur Theorie des Kater-Bohnenberger'schen Re-

Nr. der Abhandlung		Heft.	Seite.
	versionspendel. Von dem Herrn Professor C. T. Anger zu Danzig.	I.	80
XI.	Dissertation sur la théorie des axes principaux et des axes permanents de rotation. Par Monsieur Steichen, Professeur à l'école militaire de Belgique à Bruxelles	II.	170
XXI.	Ueber die naturphilosophischen Principien der Bewegungslehre. Von dem Herrn Doctor Barfuss zu Weimar.	III.	306

Optik.

I.	Ueber die Reflexion und Refraction beim Kreise. Von dem Herausgeber.	I.	1
XXVII.	Ueber die Theorie des Dipleidoscops. Von Herrn G. Schmidt zu Wien. (Von Herrn Director C. L. v. Littrow zu Wien dem Herausgeber zur Aufnahme in das Archiv mitgetheilt)	IV.	337
XXVIII.	Ueber die Theorie des Dipleidoscops. Von dem Herausgeber	IV.	343

Astronomie.

XXXI.	Ueber Aristarch's Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen. Von dem Herausgeber	IV.	401
XXXII.	Einige Bemerkungen über die Reduction der Monddistanzen. Von dem Herausgeber	IV.	412

Physik.

XXXVIII.	Ueber eine merkwürdige Erscheinung.	IV.	448

Uebungsaufgaben für Schüler.

XVI.	Aufgaben aus den Cambridge problems, proposed by the moderators to the candidates for mathematical honors at the general examination 1842—43 and 1843	II.	220
XVI.	Sätze von den Kegelschnitten, welche zu beweisen sind. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	II.	221
XVII.	Einige Aufgaben.	II.	224
XXVI.	Von dem Herrn Doctor Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	III.	335

Nr. der Abhandlung. Heft. Seite.

Literarische Berichte *).

XVII.	I.	257
XVIII.	II.	273
XIX.	III.	289
XX.	IV.	301

*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Digitized by Google

Digitized by Google

I.

Ueber die Reflexion und Refraction beim Kreise.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Für einen Kreis, dessen Ebene, in welcher im Folgenden alle Constructionen allein ausgeführt werden, selbst als Ebene der xy angenommen wird, ergiebt sich aus dem in dem Aufsatze Thl. IV. No. XX. entwickelten allgemeinen Formeln unmittelbar die folgende Auflösung des Fundamentalproblems der Katoptrik und Dioptrik.

Gegeben sind:

die Coordinaten p, q des Punktes, von welchem der einfallende Strahl ausgeht;

die 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, welche der einfallende Strahl mit den positiven Theilen zweier durch den Punkt (pq) gelegter, den primitiven Axen der x, y paralleler Axen einschliesst;

die Gleichung des zurückwerfenden oder brechenden Kreises, nämlich die Gleichung

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R^2{}_1,$$

wo der Halbmesser R_1 als positiv oder als negativ betrachtet wird, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite dieses Kreises trifft.

Gesucht werden die Coordinaten p_1, q_1 des Einfallspunkts und die 180° nicht übersteigenden Winkel α_1, β_1, welche der von dem Punkte (p_1q_1) ausgehende ausfallende Strahl mit den positiven Theilen zweier durch den Punkt (p_1q_1) gelegter, den primitiven Axen der x, y paralleler Axen einschliesst.

Zur Berechnung dieser vier Grössen, durch welche die Lage des ausfallenden Strahls vollkommen bestimmt wird, hat man nach den in dem genannten Aufsatze entwickelten allgemeinen Gleichungen offenbar die folgenden Formeln.

Zuerst berechnet man die Grössen E_1 und K_1 mittelst der Formeln

$$E_1 = \sqrt{(a_1 - p)^2 + (b_1 - q)^2},$$
$$K_1 = (a_1 - p) \cos \alpha + (b_1 - q) \cos \beta;$$

und hierauf den 90° nicht übersteigenden Winkel Θ mittelst einer der Formeln

$$\cos \Theta = \sqrt{1 - \frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}}$$

oder

$$\sin \Theta = \sqrt{\frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}}.$$

Dann ergeben sich die Coordinaten p_1, q_1 mittelst der Formeln:

$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \beta;$$

und hierauf die 180° nicht übersteigenden Winkel α', β' mittelst der Formeln

$$\cos \alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1}, \quad \cos \beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1}.$$

Endlich erhält man die 180° nicht übersteigenden Winkel α_1, β_1 mittelst der Formeln

$$\cos \alpha_1 = \mu \cos \alpha + \cos \alpha' (\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$
$$\cos \beta_1 = \mu \cos \beta + \cos \beta' (\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2});$$

wo μ seine bekannte Bedeutung hat, und im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction die untern Zeichen zu nehmen sind.

Wenn man die Lage einer von einem Punkte ausgehenden geraden Linie nicht wie vorher durch die zwei von ihr mit den positiven Theilen zweier durch den in Rede stehenden Punkt gelegter auf einander senkrecht stehender Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel, sondern durch den einen von dieser Linie mit dem positiven Theile der als erste angenommenen Axe des Systems eingeschlossenen, durch den Coordinatenwinkel hindurch von dem positiven Theile der in Rede stehenden Axe an von 0 bis 360° gezählten Winkel bestimmt; so muss man, wie leicht erhellen wird, wenn nämlich jetzt α, α', α_1 die in Rede stehenden auf die angegebene Weise genommenen Bestimmungswinkel sind, in den obigen Formeln statt

$$\cos \alpha, \cos \beta; \cos \alpha', \cos \beta'; \cos \alpha_1, \cos \beta_1$$

respective

$$\cos\alpha,\ \sin\alpha;\ \cos\alpha',\ \sin\alpha';\ \cos\alpha_1,\ \sin\alpha_1$$

setzen. Dies vorausgesetzt, erhalten wir nus dem Obigen unmittelbar die folgende Auflösung unsers Problems:

Gegeben sind:

die Coordinaten p, q des Punktes, von welchem der einfallende Strahl ausgeht;

der von dem einfallenden Strahle mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt (pq) gelegten, dem primitiven Systeme der xy parallelen Coordinatensystems eingeschlossene Winkel α, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der ersten Axe des in Rede stehenden Systems an durch dén Coordinatenwinkel dieses Systems hindurch von 0 bis 360° zählt;

die Gleichung des zurückwerfenden oder brechenden Kreises, nämlich die Gleichung

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R_1^2,$$

wo der Halbmesser R_1 als positiv oder negativ zu betrachten ist, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite dieses Kreises trifft.

Gesucht werden die Coordinaten p_1, q_1 des Einfallspunkts und der Winkel α_1, welchen der von dem Punkte $(p_1 q_1)$ ausgehende ausfallende Strahl mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt $(p_1 q_1)$ gelegten, dem primitiven Systeme der xy parallelen Coordinatensystems einschliesst, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der ersten Axe des in Rede stehenden, dem primitiven Systeme parallelen Systems an durch den Coordinatenwinkel dieses Systems hindurch von 0 bis 360° zählt.

Zur Berechnung dieser drei Grössen hat man nach dem Obigen die folgenden Formeln.

Zuerst berechnet man die Grössen E_1 und K_1 mittelst der Formeln

$$E_1=\sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2},$$
$$K_1=(a_1-p)\cos\alpha+(b_1-q)\sin\alpha;$$

und hierauf den 90° nicht übersteigenden Winkel Θ mittelst einer der Formeln

$$\cos\Theta=\sqrt{1-\frac{(E_1+K_1)(E_1-K_1)}{R_1^2}}$$

oder

$$\sin\Theta=\sqrt{\frac{(E_1+K_1)(E_1-K_1)}{R_1^2}}.$$

Dann ergeben sich die Coordinaten p_1, q_1 mittelst der Formeln

$$p_1=p+(K_1+R_1\cos\Theta)\cos\alpha,$$
$$q_1=q+(K_1+R_1\cos\Theta)\sin\alpha;$$

und hierauf α' mittelst der Formeln

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},\quad \sin\alpha' = \frac{b_1 - q_1}{R_1}.$$

Endlich erhält man den Winkel α_1 mittelst der Formeln

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\sin\alpha_1 = \mu\sin\alpha + \sin\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});$$

wo μ seine bekannte Bedeutung hat, und im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction die untern Zeichen zu nehmen sind.

§. 2.

Man kann aber die am Ende des vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln noch auf einen andern Ausdruck bringen.

Zuerst ist nämlich, wie man leicht findet,

$$E_1^2 - K_1^2 = \{(a_1 - p)\sin\alpha - (b_1 - q)\cos\alpha\}^2,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$L_1 = (a_1 - p)\sin\alpha - (b_1 - q)\cos\alpha$$

setzen,

$$E_1^2 - K_1^2 = (E_1 + K_1)(E_1 - K_1) = L_1^2.$$

Weil nun ferner nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$R_1\cos\alpha' = a_1 - p_1,\quad R_1\sin\alpha' = b_1 - q_1$$

ist; so ist, wenn man die bekannten Ausdrücke von p_1 und q_1 einführt:

$$R_1\cos\alpha' = a_1 - p - (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\alpha,$$
$$R_1\sin\alpha' = b_1 - q - (K_1 + R_1\cos\Theta)\sin\alpha;$$

und folglich, wenn man nun auch noch für K_1 seinen bekannten Werth setzt:

$$R_1\cos\alpha' = \{(a_1 - p)\sin\alpha - (b_1 - q)\cos\alpha\}\sin\alpha - R_1\cos\Theta\cos\alpha,$$
$$R_1\sin\alpha' = -\{(a_1 - p)\sin\alpha - (b_1 - q)\cos\alpha\}\cos\alpha - R_1\cos\Theta\sin\alpha;$$

d. i. in der vorher eingeführten Bezeichnung

$$R_1\cos\alpha' = L_1\sin\alpha - R_1\cos\Theta\cos\alpha,$$
$$R_1\sin\alpha' = -L_1\cos\alpha - R_1\cos\Theta\sin\alpha;$$

also

$$\cos\alpha' = \frac{L_1\sin\alpha - R_1\cos\Theta\cos\alpha}{R_1},$$

$$\sin \alpha' = -\frac{L_1 \cos \alpha + R_1 \cos \Theta \sin \alpha}{R_1};$$

oder auch

$$\cos \alpha' = -\cos \Theta \cos \alpha + \frac{L_1}{R_1} \sin \alpha,$$

$$\sin \alpha' = -\cos \Theta \sin \alpha - \frac{L_1}{R_1} \cos \alpha.$$

Führt man diese Ausdrücke in die bekannten Ausdrücke von $\cos \alpha_1$ und $\sin \alpha_1$ ein, so erhält man

$$\cos \alpha_1 =$$

$$\mu \cos \alpha - \left(\cos \Theta \cos \alpha - \frac{L_1}{R_1} \sin \alpha\right)\left(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}\right),$$

$$\sin \alpha_1 =$$

$$\mu \sin \alpha - \left(\cos \Theta \sin \alpha + \frac{L_1}{R_1} \cos \alpha\right)\left(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}\right);$$

und unsere Aufgabe kann daher jetzt auch durch die folgenden Formeln, in denen der Winkel α' gar nicht mehr vorkommt, und auch die Berechnung der Grösse E_1 nicht erfordert wird, aufgelöst werden:

$$K_1 = (a_1 - p) \cos \alpha + (b_1 - q) \sin \alpha$$

$$L_1 = (a_1 - p) \sin \alpha - (b_1 - q) \cos \alpha;$$

$$\cos \Theta = \sqrt{1 - \frac{L_1^2}{R_1^2}}, \quad \sin \Theta = \sqrt{\frac{L_1^2}{R_1^2}};$$

$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \alpha,$$

$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \sin \alpha;$$

$$\cos \alpha_1 =$$

$$\mu \cos \alpha - \left(\cos \Theta \cos \alpha - \frac{L_1}{R_1} \sin \alpha\right)\left(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}\right),$$

$$\sin \alpha_1 =$$

$$\mu \sin \alpha - \left(\cos \Theta \sin \alpha + \frac{L_1}{R_1} \cos \alpha\right)\left(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}\right);$$

wo immer im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction die untern Zeichen zu nehmen sind.

Weil zwei dem Zeichen nach entgegengesetzte Winkel oder Bogen, deren absolute Werthe einander gleich sind, bekanntlich jederzeit gleiche Cosinus haben, so ist klar, dass, wenn man jetzt den Winkel Θ als einen blossen Hülfswinkel mittelst der Formel

$$\sin \Theta = \frac{L_1}{R_1}$$

bestimmt, und dieser Gleichung gemäss gehörig positiv und negativ, seinen absoluten Werth aber nie grösser als 90° nimmt, die

vorhergehenden Gleichungen ihre völlige Richtigkeit behalten; und man hat daher zu der Auflösung unserer Aufgabe jetzt die folgenden Formeln:

$$K_1 = (a_1 - p)\cos\alpha + (b_1 - q)\sin\alpha,$$
$$L_1 = (a_1 - p)\sin\alpha - (b_1 - q)\cos\alpha;$$
$$\sin\Theta = \frac{L_1}{R_1};$$
$$p_1 = p + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1\cos\Theta)\sin\alpha;$$
$$\cos\alpha_1 =$$
$$\mu\cos\alpha - \left(\cos\Theta\cos\alpha - \frac{L_1}{R_1}\sin\alpha\right)\left(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$
$$\sin\alpha_1 =$$
$$\mu\sin\alpha - \left(\cos\Theta\sin\alpha + \frac{L_1}{R_1}\cos\alpha\right)\left(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right);$$

wo der absolute Werth von Θ nie grösser als 90° zu nehmen ist, und dem Falle der Reflexion die obern, dem Falle der Refraction die untern Zeichen entsprechen.

Nun ist aber

$$\cos\Theta\cos\alpha - \frac{L_1}{R_1}\sin\alpha = \cos(\alpha+\Theta),$$
$$\cos\Theta\sin\alpha + \frac{L_1}{R_1}\cos\alpha = \sin(\alpha+\Theta);$$

und man kann also die obigen Formeln auch unter der folgenden Form darstellen:

$$K_1 = (a_1 - p)\cos\alpha + (b_1 - q)\sin\alpha,$$
$$L_1 = (a_1 - p)\sin\alpha - (b_1 - q)\cos\alpha;$$
$$\sin\Theta = \frac{L_1}{R_1};$$
$$p_1 = p + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1\cos\Theta)\sin\alpha;$$
$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha - \cos(\alpha+\Theta)\left(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$
$$\sin\alpha_1 = \mu\sin\alpha - \sin(\alpha+\Theta)\left(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right);$$

wo wieder der absolute Werth von Θ nie grösser als 90° genommen wird, und dem Falle der Reflexion die obern, dem Falle der Refraction die untern Zeichen entsprechen.

Nimmt man nun aber μ, welches bisher immer als positiv betrachtet wurde, im Falle der Reflexion positiv, im Falle der Refraction dagegen negativ, und bezeichnet den absoluten Werth von μ durch (μ), so kann man die obigen Formeln auch auf den folgenden Ausdruck bringen, bei welchem man bloss zu beachten hat, dass der absolute Werth von Θ nie grösser als 90° zu nehmen ist:

$$K_1 = (a_1 - p) \cos \alpha + (b_1 - q) \sin \alpha,$$
$$L_1 = (a_1 - p) \sin \alpha - (b_1 - q) \cos \alpha;$$
$$\sin \Theta = \frac{L_1}{R_1};$$
$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \sin \alpha;$$
$$\frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} = \cos \alpha - \cos (\alpha + \Theta) (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$
$$\frac{\sin \alpha_1}{(\mu)} = \sin \alpha - \sin (\alpha + \Theta) (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}).$$

Berechnet man die Hülfsgrössen ϱ, η und ξ mittelst der Formeln

$$a_1 - p = \varrho \cos \eta, \; b_1 - q = \varrho \sin \eta$$

und

$$\sin \xi = \mu \sin \Theta,$$

wobei man den absoluten Werth von ξ nie grösser als 90° nimmt; so können die obigen Gleichungen, wie leicht erhellen wird, auch unter der folgenden Form dargestellt werden:

$$K_1 = \varrho \cos (\alpha - \eta), \; L_1 = \varrho \sin (\alpha - \eta);$$
$$\sin \Theta = \frac{L_1}{R_1};$$
$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \sin \alpha;$$
$$\frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} = \cos \alpha - \frac{\cos (\alpha + \Theta) \sin (\xi + \Theta)}{\sin \xi},$$
$$\frac{\sin \alpha_1}{(\mu)} = \sin \alpha - \frac{\sin (\alpha + \Theta) \sin (\xi + \Theta)}{\sin \xi}.$$

Unter dieser Gestalt enthalten die Formeln, wie es mir scheint, die vollständigste und einfachste Auflösung unsers Problems.

§. 3.

Die Gleichung der durch den einfallenden Strahl und seine Verlängerung über den Punkt (pq) hinaus dargestellten geraden Linie ist

$$\frac{x - p}{\cos \alpha} = \frac{y - q}{\sin \alpha}$$

oder

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = p \sin \alpha - q \cos \alpha.$$

Bezeichnen wir nun die erste Coordinate des Durchschnittspunkts

der in Rede stehenden geraden Linie mit der Axe der x durch Δ, so ist

$$\Delta \sin \alpha = p \sin \alpha - q \cos \alpha,$$

und folglich

$$\Delta = \frac{p \sin \alpha - q \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

oder auch

$$\Delta = p - q \cot \alpha.$$

Ganz eben so ist

$$\frac{x - p_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y - q_1}{\sin \alpha_1}$$

oder

$$x \sin \alpha_1 - y \cos \alpha_1 = p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1$$

die Gleichung der durch den ausfallenden Strahl und seine Verlängerung über den Punkt $(p_1 q_1)$ hinaus dargestellten geraden Linie; also ist, wenn wir die erste Coordinate des Durchschnittspunkts dieser geraden Linie mit der Axe der x durch Δ_1 bezeichnen:

$$\Delta_1 \sin \alpha_1 = p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1,$$

und folglich

$$\Delta_1 = \frac{p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1},$$

oder auch

$$\Delta_1 = p_1 - q_1 \cot \alpha_1.$$

Nun ist aber nach dem vorhergehenden Paragraphen, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} &\frac{p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1}{(\mu)} \\ &= p \sin \alpha - q \cos \alpha \\ &- \{(K_1 + p \cos \alpha + q \sin \alpha) \sin \Theta + (L_1 + p \sin \alpha - q \cos \alpha) \cos \Theta\} \\ &\qquad \times (\cos \Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} K_1 + p \cos \alpha + q \sin \alpha &= a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha, \\ L_1 + p \sin \alpha - q \cos \alpha &= a_1 \sin \alpha - b_1 \cos \alpha; \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\frac{p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1}{(\mu)} \\ &= p \sin \alpha - q \cos \alpha \\ &- \{(a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha) \sin \Theta + (a_1 \sin \alpha - b_1 \cos \alpha) \cos \Theta\} \\ &\qquad \times (\cos \Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}), \end{aligned}$$

oder

$$\frac{p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1}{(\mu)}$$
$$= p \sin \alpha - q \cos \alpha$$
$$-\{a_1 \sin(\alpha + \Theta) - b_1 \cos(\alpha + \Theta)\} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\Delta \sin \alpha - \Delta_1 \frac{\sin \alpha_1}{(\mu)}$$
$$= \{(a_1 \sin(\alpha + \Theta) - b_1 \cos(\alpha + \Theta)\} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}).$$

Führt man aber für $\frac{\sin \alpha_1}{(\mu)}$ seinen aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Werth ein, so erhält man

$$(\Delta - \Delta_1) \sin \alpha$$
$$= \{(a_1 - \Delta_1) \sin(\alpha + \Theta) - b_1 \cos(\alpha + \Theta)\} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

oder

$$\frac{(\Delta - \Delta_1) \sin \alpha}{(a_1 - \Delta_1) \sin(\alpha + \Theta) - b_1 \cos(\alpha + \Theta)}$$
$$= \cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}.$$

Für $b_1 = 0$ ist

$$\frac{\Delta - \Delta_1}{a_1 - \Delta_1} = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

und folglich

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} = 1 - \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

oder auch, wie man hieraus leicht findet,

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} = - \frac{\cos(\alpha + \Theta) \sin \Theta}{\sin \alpha} - \frac{\sin(\alpha + \Theta) \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}}{\mu \sin \alpha}.$$

Berechnet man den Hülfswinkel ω mittelst der Formel

$$\sin \omega = \mu \sin \Theta$$

und nimmt den absoluten Werth von ω nicht grösser als 90°, so ist, wie man leicht findet,

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} = 1 - \frac{\sin(\alpha + \Theta) \sin(\omega + \Theta)}{\sin \alpha \sin \omega}.$$

Weil nun aber bekanntlich nach dem Obigen

$$L_1 = a_1 \sin \alpha - b_1 \cos \alpha - (p \sin \alpha - q \cos \alpha)$$

und

$$\Delta \sin u = p \sin \alpha - q \cos \alpha$$

ist, so ist

$$L_1 = (a_1 - \Delta) \sin \alpha - b_1 \cos \alpha$$

und

$$\sin \Theta = \frac{(a_1 - \Delta) \sin \alpha - b_1 \cos \alpha}{R_1};$$

also für $b_1 = 0$

$$\sin \Theta = \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \sin \alpha.$$

Weil also in diesem Falle

$$\frac{R_1}{a_1 - \Delta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \Theta}$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$\frac{R_1}{a_1 - \Delta_1} = -\cos(\alpha + \Theta) - \frac{\sin(\alpha + \Theta)\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}}{\mu \sin \Theta}$$

oder

$$\Delta_1 - a_1 = \frac{R_1 \sin \Theta}{\cos(\alpha + \Theta) \sin \Theta + \frac{1}{\mu} \sin(\alpha + \Theta\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}},$$

also

$$\Delta_1 = a_1 + \frac{R_1 \sin \Theta}{\cos(\alpha + \Theta) \sin \Theta + \frac{1}{\mu} \sin(\alpha + \Theta)\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}}.$$

Auch ist nach dem Obigen unter der Voraussetzung, dass $b_1 = 0$ ist:

$$\frac{1}{a_1 - \Delta} - \frac{1}{a_1 - \Delta_1} = \frac{\sin \alpha + \Theta)}{(a_1 - \Delta) \sin \alpha}\left(\cos \Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}\right),$$

also, weil $(a_1 - \Delta) \sin \alpha = R_1 \sin \Theta$ ist,

$$\frac{1}{a_1 - \Delta} - \frac{1}{a_1 - \Delta_1} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \Theta}\left(\cos \Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}\right).$$

§. 4.

Nach §. 2. ist

$$K_1 = (a_1 - p) \cos \alpha + (b_1 - q) \sin \alpha,$$
$$L_1 = (a_1 - p) \sin \alpha - (b_1 - q) \cos \alpha;$$

also

$$K_1 \cos\alpha + L_1 \sin\alpha = a_1 - p,$$
$$K_1 \sin\alpha - L_1 \cos\alpha = b_1 - q;$$

folglich

$$K_1 \cos\alpha = a_1 - p - L_1 \sin\alpha,$$
$$K_1 \sin\alpha = b_1 - q + L_1 \cos\alpha.$$

Weil nun nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$L_1 = (a_1 - \Delta)\sin\alpha - b_1 \cos\alpha$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$K_1 \cos\alpha = \Delta - p + \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + b_1 \sin\alpha\}\cos\alpha,$$
$$K_1 \sin\alpha = \quad -q + \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + b_1 \sin\alpha\}\sin\alpha;$$

und folglich, weil nach §. 2.

$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos\Theta)\cos\alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos\Theta)\sin\alpha$$

ist:

$$p_1 = \Delta + \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + b_1 \sin\alpha + R_1 \cos\Theta\}\cos\alpha,$$
$$q_1 = \qquad \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + b_1 \sin\alpha + R_1 \cos\Theta\}\sin\alpha.$$

Weil nun aber nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$a_1 - \Delta = \frac{R_1 \sin\Theta + b_1 \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$p_1 = \Delta + \{b_1 + R_1 \sin(\alpha + \Theta)\}\cot\alpha,$$
$$q_1 = b_1 + R_1 \sin(\alpha + \Theta).$$

Für $b_1 = 0$ ist

$$p_1 = \Delta + \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + R_1 \cos\Theta\}\cos\alpha,$$
$$q_1 = \qquad \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + R_1 \cos\Theta\}\sin\alpha$$

oder

$$p_1 = \Delta + R_1 \sin(\alpha + \Theta)\cot\alpha,$$
$$q_1 = R_1 \sin(\alpha + \Theta).$$

§. 5.

Weil bekanntlich

$$\frac{\cos\alpha_1}{(\mu)} = \cos\alpha - \cos(\alpha + \Theta)\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}\right)$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{(\mu)} = \sin \alpha - \sin (\alpha + \Theta) (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2})$$

und

$$\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}$$

$$= \frac{(\Delta - \Delta_1) \sin \alpha}{(a_1 - \Delta_1) \sin (\alpha + \Theta) - b_1 \cos (\alpha + \Theta)}$$

ist, so ist

$$\frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} = \cos \alpha - \frac{(\Delta - \Delta_1) \sin \alpha \cos (\alpha + \Theta)}{(a_1 - \Delta_1) \sin (\alpha + \Theta) - b_1 \cos (\alpha + \Theta)},$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{(\mu)} = \sin \alpha - \frac{(\Delta - \Delta_1) \sin \alpha \sin (\alpha + \Theta)}{(a_1 - \Delta_1) \sin (\alpha + \Theta) - b_1 \cos (\alpha + \Theta)}$$

oder

$$\cos \alpha - \frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} = \frac{(\Delta - \Delta_1) \sin \alpha \cos (\alpha + \Theta)}{(a_1 - \Delta_1) \sin (\alpha + \Theta) - b_1 \cos (\alpha + \Theta)},$$

$$\sin \alpha - \frac{\sin \alpha_1}{(\mu)} = \frac{(\Delta - \Delta_1) \sin \alpha \sin (\alpha + \Theta)}{(a_1 - \Delta_1) \sin (\alpha + \Theta) - b_1 \cos (\alpha + \Theta)};$$

woraus sich auch sogleich

$$\operatorname{tang} (\alpha + \Theta) = \frac{\sin \alpha - \frac{\sin \alpha_1}{(\mu)}}{\cos \alpha - \frac{\cos \alpha_1}{(\mu)}}$$

ergiebt.

Für $b_1 = 0$ ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} = \cos \alpha - \frac{\Delta - \Delta_1}{a_1 - \Delta_1} \sin \alpha \cot (\alpha + \Theta),$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{(\mu)} = \frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} \sin \alpha.$$

Nach §. 2. ist auch

$$\frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} =$$

$$\cos \alpha - (\cos \Theta \cos \alpha - \frac{L_1}{R_1} \sin \alpha) (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

und folglich, unter der Voraussetzung, dass $b_1 = 0$ ist:

$$\frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} =$$

$$\cos \alpha - (\cos \Theta \cos \alpha - \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \sin \alpha^2) (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

$$\frac{1}{(\mu)}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}$$

$$=1-(\cos\Theta+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha)(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

$$+\frac{a_1-\Delta}{R_1\cos\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});$$

also nach dem Obigen

$$\frac{1}{(\mu)}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

$$+\frac{a_1-\Delta}{R_1\cos\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Bekanntlich ist aber

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

und

$$\frac{\Delta-\Delta_1}{a_1-\Delta_1}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}=\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}.$$

Daher ist

$$\frac{1}{(\mu)}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}=\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}\{1+\frac{\Delta-\Delta_1}{R_1}\cdot\frac{\tang\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}\}$$

oder

$$\cos\alpha_1=(\mu)\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}\{\cos\alpha+\frac{\Delta-\Delta_1}{R_1}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}\}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}=(\mu)\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}$$

ist, so ist

$$\cos\alpha_1=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}\{\cos\alpha+\frac{\Delta-\Delta_1}{R_1}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}\},$$

und folglich

$$\cot\alpha_1=\cot\alpha+\frac{\Delta-\Delta_1}{R_1\sin(\alpha+\Theta)}$$

oder

$$\cot\alpha_1-\cot\alpha=\frac{\Delta-\Delta_1}{R_1\sin(\alpha+\Theta)},$$

woraus auch

$$\sin(\alpha-\alpha_1)=\frac{(\Delta-\Delta_1)\sin\alpha\sin\alpha_1}{R_1\sin(\alpha+\Theta)},$$

also, weil

$$\sin\alpha_1 = (\mu)\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}\sin\alpha = (\mu)\frac{R_1}{a_1-\Delta_1}\sin\Theta$$

ist,

$$\sin(\alpha-\alpha_1) = (\mu)\frac{\Delta-\Delta_1}{a_1-\Delta_1}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\Theta}{\sin(\alpha+\Theta)}$$

folgt.

§. 6.

So lange nicht ausdrücklich etwas Anderes bestimmt wird, werden wir im Folgenden immer $b_1 = 0$ setzen, und wollen nun annehmen, dass sich, indem Δ ungeändert oder constant bleibt, $\sin\alpha$ immer mehr und mehr dem Zustande des Verschwindens oder der Null nähere; so wird sich, weil unter der gemachten Voraussetzung bekanntlich

$$\sin\Theta = \frac{a_1-\Delta}{R_1}\sin\alpha$$

ist, und der absolute Werth von Θ nie grösser als 90° genommen wird, auch Θ der Null, also $\sin\Theta$ der Null und $\cos\Theta$ der positiven Einheit nähern. Nähert sich nun unter diesen Voraussetzungen die im Vorhergehenden durch Δ_1 bezeichnete Grösse einer gewissen bestimmten endlichen Gränze, so wollen wir diese Gränze durch F_1 bezeichnen, und wollen nun untersuchen, ob eine solche Gränze wirklich existirt, wobei sich dann, wenn dies der Fall sein sollte, die Bestimmung dieser Gränze zugleich von selbst ergeben wird.

Nach §. 3. ist

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1} = 1 - \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right).$$

Aber

$$\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha} = \cos\Theta + \frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}\cos\alpha,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha} = \frac{a_1-\Delta}{R_1}$$

ist,

$$\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha} = \cos\Theta + \frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha;$$

also nach dem Obigen

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1} = 1 - \left(\cos\Theta + \frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\right)\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right).$$

Wenn nun $\sin\alpha$ sich der Null nähert, so nähert sich $\cos\alpha$ entweder

der positiven oder der negativen Einheit. Nehmen wir also im Folgenden immer die obern oder die untern Zeichen, jenachdem sich, wenn sin α sich der Null nähert, cos α der Gränze $+1$ oder der Gränze -1 nähert; so ist offenbar, da sich, wenn sin α sich der Null nähert, sin Θ und cos Θ respective den Gränzen 0 und $+1$ nähern,

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-F_1}=1-(1+\frac{1}{\mu})(1\pm\frac{a_1-\Delta}{R_1})$$

oder, wie hieraus leicht folgt,

$$\frac{\Delta-F_1}{a_1-F_1}=(1+\frac{1}{\mu})(1\pm\frac{a_1-\Delta}{R_1}).$$

Auch überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a_1-\Delta}+\frac{1}{a_1-F_1}=\mp(1+\frac{1}{\mu})\cdot\frac{1}{R_1}$$

oder

$$\frac{1}{a_1-F_1}=-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a_1-\Delta}\mp(1+\frac{1}{\mu})\cdot\frac{1}{R_1}.$$

§. 7.

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Werthe die beiden Grössen Θ und R_1 nothwendig haben müssen, wenn die beiden Gleichungen

$$\frac{a_1-\Delta}{R_1}=\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$(1+\frac{1}{\mu})(1\pm\frac{a_1-\Delta}{R_1})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

wobei wir annehmen, dass sin α eine nicht verschwindende Grösse sein soll, zugleich erfüllt sein sollen.

Nehmen wir also zu dem Ende diese beiden Gleichungen als erfüllt an, und führen den Werth von

$$\frac{a_1-\Delta}{R_1}$$

aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so erhalten wir die Gleichung

$$(1+\frac{1}{\mu})(1\pm\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha})$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also

$$(1+\frac{1}{\mu})(\sin\alpha\pm\sin\Theta)$$
$$=\sin(\alpha+\Theta)(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Weil nun bekanntlich

$$\sin\alpha+\sin\Theta=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta),$$
$$\sin\alpha-\sin\Theta=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

und

$$\sin(\alpha+\Theta)=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

ist, so giebt das obere Zeichen die Gleichung

$$(1+\frac{1}{\mu})\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)=\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und das untere Zeichen giebt die Gleichung

$$(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)=\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Im ersten Falle ist

$$(1+\frac{1}{\mu})\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\frac{1}{\mu}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens quadrirt, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned}&(1+\frac{1}{\mu})^2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+(1-\frac{1}{\mu^2})\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\&-2(1+\frac{1}{\mu})\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{aligned}\right\}=0,$$

also, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung durch $1+\frac{1}{\mu}$ dividirt:

$$\left.\begin{aligned}&(1+\frac{1}{\mu})\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+(1-\frac{1}{\mu})\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\&-2\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{aligned}\right\}=0.$$

Nun ist aber

$$2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2=1+\cos(\alpha-\Theta),$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2=1+\cos(\alpha+\Theta)$$

und

$$2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)=\cos\alpha+\cos\Theta;$$

also

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})\{1+\cos(\alpha-\Theta)\}\\ +(1-\frac{1}{\mu})\{1+\cos(\alpha+\Theta)\}\\ -2\cos\Theta(\cos\alpha+\cos\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

folglich

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})+(1-\frac{1}{\mu})\\ +\{(1+\frac{1}{\mu})+(1-\frac{1}{\mu})\}\cos\alpha\cos\Theta\\ +\{(1+\frac{1}{\mu})-(1-\frac{1}{\mu})\}\sin\alpha\sin\Theta\\ -2\cos\Theta(\cos\alpha+\cos\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

d. i.

$$1+\frac{1}{\mu}\sin\alpha\sin\Theta-\cos\Theta^2=0$$

oder

$$\sin\Theta(\sin\Theta+\frac{1}{\mu}\sin\alpha)=0,$$

und folglich, weil $\sin\alpha$, also auch

$$\sin\Theta=\frac{a_1-\Delta}{R_1}\sin\alpha$$

nicht verschwindet,

$$\sin\Theta+\frac{1}{\mu}\sin\alpha=0.$$

Im zweiten Falle ist

$$(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\frac{1}{\mu}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

und folglich, wenn man wieder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens quadrirt, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+(1-\frac{1}{\mu^2})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\ -2(1+\frac{1}{\mu})\cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

also, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens durch $1+\frac{1}{\mu}$ dividirt:

$$\left.\begin{array}{r}(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+(1-\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\ -2\cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{array}\right\}=0.$$

Nun ist aber

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2=1-\cos(\alpha-\Theta),$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2=1-\cos(\alpha+\Theta)$$

und

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)=-(\cos\alpha-\cos\Theta),$$

also

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})\{1-\cos(\alpha-\Theta)\}\\ +(1-\frac{1}{\mu})\{1-\cos(\alpha+\Theta)\}\\ +2\cos\Theta(\cos\alpha-\cos\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

folglich

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})+(1-\frac{1}{\mu})\\ -\{(1+\frac{1}{\mu})+(1-\frac{1}{\mu})\}\cos\alpha\cos\Theta\\ -\{(1+\frac{1}{\mu})-(1-\frac{1}{\mu})\}\sin\alpha\sin\Theta\\ +2\cos\Theta(\cos\alpha-\cos\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

d. i.

$$1-\frac{1}{\mu}\sin\alpha\sin\Theta-\cos\Theta^2=0$$

oder

$$\sin\Theta(\sin\Theta-\frac{1}{\mu}\sin\alpha)=0,$$

und folglich, weil $\sin\alpha$, also auch

$$\sin\Theta=\frac{a_1-\Delta}{R_1}\sin\alpha$$

nicht verschwindet,

$$\sin\Theta-\frac{1}{\mu}\sin\alpha=0.$$

Es ist also überhaupt

$$\sin\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sin\alpha=0,$$

d. i.

$$\sin\Theta = \mp\frac{1}{\mu}\sin\alpha,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$R_1 = (a_1 - \Delta)\frac{\sin\alpha}{\sin\Theta}$$

ist,

$$R_1 = \mp\mu(a_1 - \Delta).$$

Wenn also die beiden Gleichungen

$$\frac{a_1 - \Delta}{R_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right) = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

zugleich erfüllt sein sollen, so muss nothwendig mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander jederzeit

$$\sin\Theta = \mp\frac{1}{\mu}\sin\alpha,\ R_1 = \mp\mu(a_1 - \Delta)$$

sein.

§. 8.

Ferner wollen wir nun aber auch untersuchen, ob sich umgekehrt behaupten lässt, dass für

$$\sin\Theta = \mp\frac{1}{\mu}\sin\alpha,\ R_1 = \mp\mu(a_1 - \Delta)$$

jederzeit mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\frac{a_1 - \Delta}{R_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right) = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

ist.

Nehmen wir zuerst die obern Zeichen und setzen also

$$\sin\Theta = -\frac{1}{\mu}\sin\alpha,\ R_1 = -\mu(a_1 - \Delta),$$

so ist, wie aus der im vorhergehenden Paragraphen in diesem Falle angestellten Analysis, wenn man dieselbe rückwärts synthetisch verfolgt, sich leicht ergiebt, jederzeit

$$\frac{a_1-\Delta}{R_1}=\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})^2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+(1-\frac{1}{\mu^2})\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\ \quad-2(1+\frac{1}{\mu})\cos\Theta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

also

$$\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})^2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+\cos\Theta^2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\ \quad-2(1+\frac{1}{\mu})\cos\Theta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\\ \quad=\frac{1}{\mu^2}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2(1-\mu^2\sin\Theta^2),\end{array}$$

d. i.

$$\begin{array}{l}\{(1+\frac{1}{\mu})\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\}^2\\ \quad=\frac{1}{\mu^2}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2(1-\mu^2\sin\Theta^2),\end{array}$$

und folglich

$$\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\\ \quad=\pm\frac{1}{\mu}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},\end{array}$$

wo sich nun frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat, was auf folgende Art entschieden werden kann.

Wenn

$$0<\alpha<90^\circ \text{ oder } 270^\circ<\alpha<360^\circ$$

ist, so ist $\cos\alpha$ positiv. Da nun

$$\sin\Theta=-\frac{1}{\mu}\sin\alpha$$

ist, so ist

$$\mu\sin\Theta=-\sin\alpha,$$

und folglich

$$\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}=\cos\alpha.$$

Soll also die Gleichung

$$\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\\ \quad=\pm\frac{1}{\mu}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\end{array}$$

erfüllt sein, so muss

$$(\sin\alpha-\sin\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\sin\alpha\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\mp\cos\alpha\sin\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta),$$

d. i.

$$(\sin\alpha-\sin\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)=\sin(\alpha\mp\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

oder

$$\sin(\alpha-\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)=\sin(\alpha\mp\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

sein, welches offenbar nur dann möglich ist, wenn man das obere Zeichen nimmt, und daher

$$(1+\frac{1}{\mu})\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\frac{1}{\mu}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

setzt.

Wenn

$$90^\circ<\alpha<180^\circ \text{ oder } 180^\circ<\alpha<270^\circ$$

ist, so ist $\cos\alpha$ negativ. Da nun

$$\sin\Theta=-\frac{1}{\mu}\sin\alpha$$

ist, so ist

$$\mu\sin\Theta=-\sin\alpha,$$

und folglich

$$\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}=-\cos\alpha.$$

Soll also die Gleichung

$$(1+\frac{1}{\mu})\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\pm\frac{1}{\mu}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

erfüllt sein, so muss

$$(\sin\alpha-\sin\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\sin\alpha\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\pm\cos\alpha\sin\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta),$$

d. i.

$$(\sin\alpha-\sin\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)=\sin(\alpha\pm\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta),$$

oder

$$\sin(\alpha-\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)=\sin(\alpha\pm\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

seio, welches offenbar nur dann möglich ist, wenn man das untere Zeichen nimmt, und also

$$(1+\frac{1}{\mu}) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos \Theta \cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= -\frac{1}{\mu} \cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}$$

setzt.

Also ist

$$(1+\frac{1}{\mu}) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos \Theta \cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= \pm\frac{1}{\mu} \cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2},$$

indem man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos \alpha$ positiv oder negativ ist.

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$(1+\frac{1}{\mu}) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)(\cos \Theta \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2})$$

oder

$$2(1+\frac{1}{\mu}) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)$$
$$= \sin(\alpha+\Theta)(\cos \Theta \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}),$$

d. i.

$$(1+\frac{1}{\mu})(\sin \alpha + \sin \Theta) = \sin(\alpha+\Theta)(\cos \Theta \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2})$$

oder

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{\sin \Theta}{\sin \alpha}) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin \alpha}(\cos \Theta \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}),$$

also, weil

$$\frac{\sin \Theta}{\sin \alpha} = -\frac{1}{\mu} = \frac{a_1-\Delta}{R_1}$$

ist,

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin \alpha}(\cos \Theta \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}).$$

Für

$$\sin \Theta = -\frac{1}{\mu} \sin \alpha, \quad R_1 = -\mu(a_1-\Delta)$$

ist folglich immer

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin \alpha}(\cos \Theta \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}),$$

wenn man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos\alpha$ positiv oder negativ ist.

Setzen wir ferner

$$\sin\Theta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha,\quad R_1 = \mu(a_1 - \Delta),$$

so ist, wie aus der im vorhergehenden Paragraphen angestellten Analysis, wenn man dieselbe rückwärts synthetisch verfolgt, sich leicht ergiebt, jederzeit

$$\frac{a_1 - \Delta}{R_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$\left.\begin{aligned}&(1+\frac{1}{\mu})^2 \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2 + (1-\frac{1}{\mu^2})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\ &-2(1+\frac{1}{\mu})\cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{aligned}\right\} = 0,$$

also

$$\begin{aligned}&(1+\frac{1}{\mu})^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2 + \cos\Theta^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\ &-2(1+\frac{1}{\mu})\cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\\ &=\frac{1}{\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\,(1-\mu^2\sin\Theta^2),\end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned}&\{(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\}^2\\ &=\frac{1}{\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\,(1-\mu^2\sin\Theta^2),\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}&(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\\ &=\pm\frac{1}{\mu}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},\end{aligned}$$

wo sich nun wieder frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat, was auf folgende Art entschieden werden kann.

Wenn

$$0 < \alpha < 90^\circ \text{ oder } 270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

ist, so ist $\cos\alpha$ positiv, und folglich auf ähnliche Art wie vorher

$$\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2} = \cos\alpha.$$

Soll also die Gleichung

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= \pm \frac{1}{\mu} \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) \sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

erfüllt sein, so muss

$$(\sin\alpha+\sin\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \sin\alpha \cos\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= \pm \cos\alpha \sin\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta),$$

d. i.

$$(\sin\alpha+\sin\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) = \sin(\alpha\pm\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

oder

$$\sin(\alpha-\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) = \sin(\alpha\pm\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

sein, welches offenbar nur dann möglich ist, wenn man das untere Zeichen nimmt, und daher

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= -\frac{1}{\mu} \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) \sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

setzt.

Wenn

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \text{ oder } 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

ist, so ist $\cos\alpha$ negativ, und folglich wie oben

$$\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2} = -\cos\alpha.$$

Soll also die Gleichung

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= \pm \frac{1}{\mu} \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) \sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

erfüllt sein, so muss

$$(\sin\alpha+\sin\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \sin\alpha \cos\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= \mp \cos\alpha \sin\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta),$$

d. i.

$$(\sin\alpha+\sin\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) = \sin(\alpha\mp\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

oder

$$\sin(\alpha-\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) = \sin(\alpha\mp\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

sein, welches offenbar nur dann möglich ist, wenn man das obere Zeichen nimmt, und daher

$$(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\frac{1}{\mu}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

setzt.

Also ist

$$(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\pm\frac{1}{\mu}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos\alpha$ negativ oder positiv ist.

Aus dieser Gleichnng folgt aber

$$(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)=\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$2(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\sin(\alpha+\Theta)(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

d. i.

$$(1+\frac{1}{\mu})(\sin\alpha-\sin\Theta)=\sin(\alpha+\Theta)(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$(1+\frac{1}{\mu})(1-\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also, weil

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}=\frac{1}{\mu}=\frac{a_1-\Delta}{R_1}$$

ist,

$$(1+\frac{1}{\mu})(1-\frac{a_1-\Delta}{R_1})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Für

$$\sin\Theta=\frac{1}{\mu}\sin\alpha,\ R_1=\mu(a_1-\Delta)$$

ist also immer

$$(1+\frac{1}{\mu})(1-\frac{a_1-\Delta}{R_1})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

wenn man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos\alpha$ negativ oder positiv ist.

Aus der vorhergehenden Untersuchung ergiebt sich nun das folgende Gesammtresultat:

Für

$$\sin\Theta = -\frac{1}{\mu}\sin\alpha,\quad R_1 = -\mu(a_1 - \Delta)$$

ist

$$\frac{a_1 - \Delta}{R_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta \pm \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

wenn man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem cos α positiv oder negativ ist. Für

$$\sin\Theta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha,\quad R_1 = \mu(a_1 - \Delta)$$

ist dagegen

$$\frac{a_1 - \Delta}{R_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta \pm \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

wenn man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem cos α negativ oder positiv ist.

§. 9.

Wir wollen jetzt annehmen, dass auf den in Taf. I. Fig. 1. um den Mittelpunkt C beschriebenen Kreis Strahlen auffallen, welche entweder wirklich sämmtlich aus dem Punkte A ausgehen oder wenigstens als sämmtlich aus diesem Punkte ausgehend betrachtet werden können, und wollen die von A aus durch C gezogene gerade Linie als den positiven Theil der Axe der x annehmen, wo denn im Vorhergehenden $a_1 = AC$ und $\Delta = 0$, also $a_1 - \Delta = AC$ zu setzen ist. Nehmen wir nun ferner an, dass der aus dem Mittelpunkte C beschriebene Kreis mit dem Halbmesser $(\mu).AC$ beschrieben sei, wo (μ) bekanntlich den absoluten Werth von μ bezeichnet, so sind die drei folgenden Fälle zu unterscheiden.

I. Es sei $(\mu) < 1$, welchem Falle Taf. I. Fig. 1. a. entspricht.

Für einen auf die concave Seite des um C mit dem Halbmesser $(\mu).AC$ beschriebenen Kreises unter dem Winkel α fallenden und an dem Kreise eine Brechung erleidenden Strahl ist nach §. 3. bekanntlich, wenn man

$$\sin\Theta = \frac{AC}{R_1}\sin\alpha$$

setzt,

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und μ ist eine negative, R_1 eine positive Grösse.

Weil nun im vorliegenden Falle

$$R_1=-\mu\,.\,AC,\text{ also }\sin\Theta=-\frac{1}{\mu}\sin\alpha$$

und $\cos\alpha$ offenbar positiv ist, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{AC}{R_1})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2}=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=\frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1=(1-\mu^2)\,.\,AC=(1-\mu)(1+\mu)\,.\,AC.$$

Daher ist Δ_1 eine constante von α unabhängige Grösse.

Für einen auf die convexe Seite des um C mit dem Halbmesser $(\mu)\,.\,AC$ beschriebenen Kreises unter dem Winkel α fallenden und an dem Kreise eine Zurückwerfung erleidenden Strahl ist nach §. 3. bekanntlich, wenn man

$$\sin\Theta=\frac{AC}{R_1}\sin\alpha$$

setzt, wieder

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und jetzt ist μ eine positive, R_1 eine negative Grösse.

Weil nun im vorliegenden Falle

$$R_1=-\mu\,.\,AC,\text{ also }\sin\Theta=-\frac{1}{\mu}\sin\alpha$$

und $\cos\alpha$ positiv ist, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen wieder

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{AC}{R_1})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2}=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\,(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\,(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=\frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1=(1-\mu^2)\,.\,AC=(1-\mu)(1+\mu)\,.\,AC.$$

Daher ist Δ_1 wieder eine constante von α unabhängige Grösse.

Ueberlegt man nun, dass die constanten Werthe von Δ_1 in den beiden vorher betrachteten Fällen einander gleich sind, so ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

Wenn A und C zwei beliebige Punkte sind, und man, unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth (μ) von μ kleiner als die Einheit ist, aus dem Punkte C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $(\mu)\,.\,AC$ einen Kreis beschrieben hat; so geben alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können und auf die concave Seite des in Rede stehenden Kreises fallen, nachdem diese Strahlen an derselben eine Brechung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — und alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können und auf die convexe Seite des in Rede stehenden Kreises fallen, nachdem diese Strahlen an derselben eine Zurückwerfung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — durch einen und denselben Punkt der durch A und C gehenden geraden Linie, welcher immer von A an nach C hin liegt*), und dessen Entfernung von A durch das Product $(1-\mu^2)\,.\,AC=(1-\mu)(1+\mu)\,.\,AC$ bestimmt wird.

II. Es sei $(\mu)>1$, welchem Falle Taf. I. Fig. 1.b. entspricht.

Alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können, fallen in diesem Falle auf die concave Seite des um C beschriebenen Kreises, und für einen unter dem Winkel α auffallenden Strahl ist nach §. 3., wenn

$$\sin\Theta=\frac{AC}{R_1}\sin\alpha$$

gesetzt wird, jederzeit

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\,(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

*) Da nämlich in diesem Falle $(1-\mu^2)\,.\,AC$ positiv ist.

Wenn nun alle unter einem Winkel α, der zwischen 0 und 90° oder zwischen 270° und 360° liegt, auffallende Strahlen eine Brechung erleiden, so ist offenbar

$$R_1 = -\mu \, . \, AC, \text{ also } \sin\Theta = -\frac{1}{\mu}\sin\alpha,$$

und folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen, da $\cos\alpha$ positiv ist,

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{AC}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2} = 1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1} = \frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1 = (1-\mu^2)\, . \, AC = (1-\mu)(1+\mu)\, . \, AC.$$

Daher ist Δ_1 eine constante von α unabhängige Grösse.

Wenn ferner alle unter einem Winkel α, der zwischen 90° und 180° oder zwischen 180° und 270° liegt, auffallende Strahlen eine Zurückwerfung erleiden, so ist offenbar

$$R_1 = \mu \, . \, AC, \text{ also } \sin\Theta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha,$$

und folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen, da $\cos\alpha$ negativ ist,

$$(1+\frac{1}{\mu})(1-\frac{AC}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2} = 1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1} = \frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1 = (1-\mu^2) \, . \, AC = (1-\mu)\,(1+\mu) \, . \, AC.$$

Daher ist auch jetzt Δ_1 eine constante von a unabhängige Grösse.

Ueberlegt man nun wieder, dass die beiden constanten Werthe von Δ_1 in dem ersten und zweiten der beiden vorher betrachteten Fälle einander gleich sind, so ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

Wenn A und C zwei beliebige Punkte sind, und man, unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth (μ) von μ grösser als die Einheit ist, aus dem Punkte C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $(\mu) \, . \, AC$ einen Kreis beschrieben hat; so gehen alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können, und auf derselben Seite des durch A auf AC errichteten Perpendikels, auf welcher der Mittelpunkt C liegt, auf den Kreis fallen, nachdem diese Strahlen an demselben eine Brechung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — und alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können, und nicht auf derselben Seite des durch A auf AC errichteten Perpendikels, auf welcher der Mittelpunkt C liegt, auf den Kreis fallen, nachdem diese Strahlen an demselben eine Zurückwerfung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — durch einen und denselben Punkt der durch A und C gehenden geraden Linie, welcher immer von A an nicht nach C hin liegt*), und dessen Entfernung von A durch das Product $(\mu^2-1) \, . \, AC = (\mu-1)(\mu+1) \, . \, AC$ bestimmt wird.

III. Dass in dem Falle $(\mu)=1$, welchem Taf. I. Fig. 1.c. entspricht, alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können, auf den Kreis fallen und an demselben eine Brechung erleiden, nach der Brechung wieder sämmtlich durch den Punkt A gehen, fällt auf der Stelle in die Augen und bedarf keiner weitern Erläuterung.

§. 10.

Ferner wollen wir annehmen, dass auf den in Taf. I. Fig. 2. um den Mittelpunkt C beschriebenen Kreis Strahlen auffallen, welche sämmtlich nach dem Punkte A hin convergiren, und wollen wieder die von A aus durch C gezogene gerade Linie als den positiven Theil der Axe der x annehmen, wo denn im Vorhergehenden auch jetzt $a_1 = AC$ und $\Delta = 0$, also $a_1 - \Delta = AC$ zu setzen ist. Nehmen wir nun ausserdem an, dass der aus dem Mittelpunkte C beschriebene Kreis mit dem Halbmesser $(\mu) \, . \, AC$ beschrieben sei, wo (μ) seine bekannte Bedeutung hat, so sind wieder die drei folgenden Fälle zu unterscheiden.

I. Es sei $(\mu) < 1$, welchem Falle Taf. I. Fig. 2. a. entspricht. Für einen auf die concave Seite des um C mit dem Halbmes-

*) Da nämlich in diesem Falle $(1-\mu^2) \, . \, AC$ negativ ist.

ser $(\mu) . AC$ beschriebenen Kreises unter dem Winkel α fallenden und an dem Kreise eine Zurückwerfung erleidenden Strahl ist nach §. 3. bekanntlich, wenn man

$$\sin \Theta = \frac{AC}{R_1} \sin \alpha$$

setzt,

$$\frac{AC}{AC - \Delta_1} = 1 - \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

und μ ist, so wie auch R_1 eine positive Grösse.

Weil nun im vorliegenden Falle

$$R_1 = \mu . AC, \text{ also } \sin \Theta = \frac{1}{\mu} \sin \alpha$$

und $\cos \alpha$ offenbar negativ ist, so ist nach §. 8.

$$(1 + \frac{1}{\mu})(1 - \frac{AC}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2})$$

oder

$$1 - \frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC - \Delta_1} = \frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1 = (1 - \mu^2) . AC = (1 - \mu)(1 + \mu) . AC.$$

Daher ist Δ_1 eine constante von α unabhängige Grösse.

Für einen auf die convexe Seite des um C mit dem Halbmesser $(\mu) . AC$ beschriebenen Kreises unter dem Winkel α fallenden und an dem Kreise eine Brechung erleidenden Strahl ist nach §. 3., wenn man

$$\sin \Theta = \frac{AC}{R_1} \sin \alpha$$

setzt, bekanntlich wieder

$$\frac{AC}{AC - \Delta_1} = 1 - \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

und μ ist, so wie R_1 eine negative Grösse.

Weil nun im vorliegenden Falle wieder

$$R_1 = \mu . AC, \text{ also } \sin \Theta = \frac{1}{\mu} \sin \alpha$$

und cos α offenbar negativ ist, so ist nach §. 8.

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{AC}{R_1}\right)=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2}=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=\frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1=(1-\mu^2).AC=(1-\mu)(1+\mu).AC.$$

Daher ist Δ_1 wieder eine constante von α unabhängige Grösse.

Ueberlegt man nun, dass die beiden constanten Werthe von Δ_1 im ersten und zweiten der beiden vorher betrachteten Fälle einander gleich sind, so ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

W e n n A u n d C z w e i b e l i e b i g e P u n k t e s i n d, u n d m a n, u n t e r d e r V o r a u s s e t z u n g, d a s s d e r a b s o l u t e W e r t h (μ) v o n μ k l e i n e r a l s d i e E i n h e i t i s t, a u s d e m P u n k t e C a l s M i t t e l p u n k t m i t d e m H a l b m e s s e r $(\mu).AC$ e i n e n K r e i s b e s c h r i e b e n h a t; s o g e h e n a l l e n a c h d e m P u n k t e A c o n v e r g i r e n d e S t r a h l e n, w e l c h e a u f d i e c o n c a v e S e i t e d e s i n R e d e s t e h e n d e n K r e i s e s f a l l e n, n a c h d e m d i e s e S t r a h l e n a n d e r s e l b e n e i n e Z u r ü c k w e r f u n g e r l i t t e n h a b e n, n ö t h i g e n f a l l s g e h ö r i g v e r l ä n g e r t, — u n d a l l e n a c h d e m P u n k t e A c o n v e r g i r e n d e S t r a h l e n, w e l c h e a u f d i e c o n v e x e S e i t e d e s i n R e d e s t e h e n d e n K r e i s e s f a l l e n, n a c h d e m d i e s e S t r a h l e n a n d e r s e l b e n e i n e B r e c h u n g e r l i t t e n h a b e n, n ö t h i g e n f a l l s g e h ö r i g v e r l ä n g e r t, — d u r c h e i n e n u n d d e n s e l b e n P u n k t d e r d u r c h A u n d C g e h e n d e n g e r a d e n L i n i e, w e l c h e r i m m e r v o n A a n n a c h C l i e g t *), u n d d e s s e n E n t f e r n u n g v o n A d u r c h d a s P r o d u c t $(1-\mu^2).AC=(1-\mu)(1+\mu).AC$ b e s t i m m t w i r d.

II. Es sei $(\mu) > 1$, welchem Falle Taf. I. Fig. 2. b. entspricht. Alle nach dem Punkte A convergirende Strahlen fallen in diesem Falle auf die convexe Seite des um C beschriebenen Kreises, und für einen unter dem Winkel α auffallenden Strahl ist nach §. 3., wenn

---

*) Da nämlich in diesem Falle $(1-\mu^2).AC$ positiv ist.

$$\sin\Theta = \frac{AC}{R_1}\sin\alpha$$

gesetzt wird, jederzeit

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1} = 1 - \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right).$$

Wenn nun alle unter einem Winkel α, der zwischen 90° und 180° oder zwischen 180° und 270° liegt, auffallende Strahlen eine Brechung erleiden, so ist offenbar

$$R_1 = \mu . AC, \text{ also } \sin\Theta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha,$$

und folglich nach §. 8., weil $\cos\alpha$ negativ ist,

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{AC}{R_1}\right) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1} = \frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1 = (1-\mu^2).AC = (1-\mu)(1+\mu).AC.$$

Daher ist Δ_1 eine constante von α unabhängige Grösse.

Wenn ferner alle unter einem Winkel α, der zwischen 0 und 90° oder zwischen 270° und 360° liegt, auffallende Strahlen eine Zurückwerfung erleiden, so ist offenbar

$$R_1 = -\mu . AC, \text{ also } \sin\Theta = -\frac{1}{\mu}\sin\alpha,$$

und folglich nach §. 8., weil $\cos\alpha$ positiv ist,

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1+\frac{AC}{R_1}\right) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=\frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1=(1-\mu^2).AC=(1-\mu)(1+\mu).AC.$$

Daher ist Δ_1 wieder eine constante von α unabhängige Grösse.

Da die constanten Werthe von Δ_1 in den beiden vorher betrachteten Fälle einander gleich sind, so ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn A und C zwei beliebige Punkte sind, und man, unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth (μ) von μ grösser als die Einheit ist, aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser $(\mu).AC$ einen Kreis beschrieben hat; so gehen alle nach dem Punkte A convergirende Strahlen, welche auf derselben Seite des durch A auf AC errichteten Perpendikels, auf welcher der Mittelpunkt C liegt, auf den Kreis fallen, nachdem diese Strahlen an demselben eine Brechung erlitten haben, nöthigenfals gehörig verlängert, — und alle nach dem Punkte A convergirende Strahlen, welche nicht auf derselben Seite des durch A auf AC errichteten Perpendikels, auf welcher der Mittelpunkt C liegt, auf den Kreis fallen, nachdem diese Strahlen an demselben eine Zurückwerfung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — durch einen und denselben Punkt der durch A und C gehenden geraden Linie, welcher immer von A an nicht nach C hin liegt*), und dessen Entfernung von A durch das Product $(\mu^2-1).AC=(\mu-1)(\mu+1).AC$ bestimmt wird.

III. Dass in dem Falle $(\mu)=1$, welchem Taf. I. Fig. 2. c. entspricht, alle nach dem Punkte A convergirende Strahlen, welche auf den Kreis fallen und an demselben eine Brechung erleiden, nach der Brechung wieder sämmtlich durch den Punkt A gehen, fällt auf der Stelle in die Augen und bedarf keiner weitern Erläuterung.

§. 11.

Indem wir jetzt zuvörderst wieder α_1 beliebig annehmen, wollen wir einen von dem Punkte (pq) ausgehenden Strahl betrachten, welcher der Axe der x parallel ist.

In diesem Falle ist offenbar

$$\sin\alpha=0,\ \cos\alpha=\pm 1$$

und folglich nach §. 2., weil

*) Da nämlich in diesem Falle $(1-\mu^2).AC$ negativ ist.

$$\cos(\alpha+\Theta)=\cos\alpha\cos\Theta-\sin\alpha\sin\Theta=\pm\cos\Theta,$$
$$\sin(\alpha+\Theta)=\sin\alpha\cos\Theta+\cos\alpha\sin\Theta=\pm\sin\Theta$$

ist:

$$K_1=\pm(a_1-p),\ L_1=\mp(b_1-q);$$
$$\sin\Theta=\mp\frac{b_1-q}{R_1};$$
$$p_1=a_1\pm R_1\cos\Theta,\ q_1=q;$$
$$\pm\frac{\cos\alpha_1}{(\mu)}=1-\cos\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\mp\frac{\sin\alpha_1}{(\mu)}=\sin\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});$$

so dass also durch die folgenden Formeln, in denen die obern oder die untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem der von dem Punkte (pq) ausgehende Strahl von diesem Punkte an nach der Seite der positiven oder nach der Seite der negativen x hin gerichtet ist, die Lage des ausfallenden Strahls vollkommen bestimmt wird:

$$\sin\Theta=\mp\frac{b_1-q}{R_1};$$
$$p_1=a_1\pm R_1\cos\Theta,\ q_1=q;$$
$$\pm\frac{\cos\alpha_1}{(\mu)}=1-\cos\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\mp\frac{\sin\alpha_1}{(\mu)}=\sin\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu_2\sin\Theta^2}).$$

Nach §. 3. ist also

$$\frac{x-a_1\mp R_1\cos\Theta}{1-\cos\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}$$
$$=-\frac{y-q}{\sin\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}$$

die Gleichung der durch den ausfallenden Strahl und seine Verlängerung über den Punkt (p_1q_1) hinaus dargestellten geraden Linie.

Bezeichnet nun Δ_1 die erste Coordinate des Durchschnittspunkts dieser geraden Linie mit der Axe der x; so haben wir zur Bestimmung von Δ_1 nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$\frac{\Delta_1-a_1\mp R_1\cos\Theta}{1-\cos\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}$$
$$=\frac{q}{\sin\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})},$$

also nach dem Obigen

$$\frac{\Delta_1 - a_1 \mp R_1 \cos\Theta}{1 - \cos\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta_2})}$$

$$= \mp \frac{qR_1}{(b_1 - q)(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})},$$

woraus sich ohne Schwierigkeit

$$\Delta_1 - a_1 = \mp \frac{q - b_1 \cos\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{(b_1 - q)(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})} R_1$$

ergiebt. Multiplicirt man aber den Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit

$$\cos\Theta - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

so erhält man

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{(1-\frac{1}{\mu^2})b_1 \cos\Theta - q(\cos\Theta - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{(1-\frac{1}{\mu^2})(b_1 - q)} R_1$$

oder

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{(1-\frac{1}{\mu})(1+\frac{1}{\mu})b_1\cos\Theta - q(\cos\Theta - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{(1-\frac{1}{\mu})(1+\frac{1}{\mu})(b_1 - q)} R_1$$

Weil nach dem Obigen

$$\sin\Theta = \mp\frac{b_1 - q}{R_1},\ \cos\Theta = \sqrt{1-(\frac{b_1-q}{R_1})^2}$$

ist, so nähern sich, wenn q sich der Null nähert, $\sin\Theta$ und $\cos\Theta$ respective den Gränzen

$$\mp\frac{b_1}{R_1} \text{ und } \sqrt{1-(\frac{b_1}{R_1})^2}.$$

Bezeichnen wir nun die Gränze, welcher Δ_1 sich nähert, durch F_1, so ist nach dem Obigen, unter der Voraussetzung, dass b_1 nicht verschwindet,

$$F_1 - a_1 = \pm R_1\sqrt{1-(\frac{b_1}{R_1})^2},$$

also

$$F_1 = a_1 \pm R_1 \sqrt{1-(\frac{b_1}{R_1})^2},$$

ein Ausdruck, der jedenfalls deshalb mit dem Namen eines merkwürdigen bezeichnet zu werden verdient, weil er von μ ganz unabhängig ist.

Für $b_1 = 0$ ist nach dem Obigen

$$\sin\Theta = \pm\frac{q}{R_1};$$

$$p_1 = a_1 \pm R_1 \cos\Theta,\ q_1 = q;$$

$$\pm\frac{\cos\alpha_1}{(\mu)} = 1 - \cos\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

$$\mp\frac{\sin\alpha_1}{(\mu)} = \sin\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

und

$$\Delta_1 - a_1 = \pm\frac{R_1}{\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}$$

oder

$$\Delta_1 - a_1 = \pm\frac{R_1(\cos\Theta - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{1-\frac{1}{\mu^2}},$$

oder auch

$$\Delta_1 - a_1 = \pm\frac{R_1(\cos\Theta - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{(1-\frac{1}{\mu})(1+\frac{1}{\mu})}.$$

Berechnet man den Hülfswinkel ω mittelst der Formel

$$\sin\omega = \mu\sin\Theta$$

und nimmt den absoluten Werth von ω nie grösser als 90°, so erhält man leicht

$$\Delta_1 - a_1 = \pm\frac{R_1\sin\omega}{\sin(\omega+\Theta)}.$$

Führt man für $\sin\Theta$ und $\cos\Theta$ ihre Werthe ein, so erhält man

$$p_1 = a_1 \pm R_1\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}},\ q_1 = q;$$

$$\pm\frac{\cos\alpha_1}{(\mu)} = 1 - \sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}.(\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}} + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}),$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{(\mu)} = -\frac{q}{R_1}\ (\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}} + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}})$$

und

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{\mu R_1}{\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}},$$

oder

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{R_1\left(\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}-\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}\right)}{1-\frac{1}{\mu^2}},$$

oder auch

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{R_1\left(\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}-\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}\right)}{(1-\frac{1}{\mu})(1+\frac{1}{\mu})}.$$

Ferner ergiebt sich in diesem Falle, wo $b_1 = 0$ ist, aus den obigen Formeln sogleich

$$F_1 - a_1 = \pm \frac{R_1}{1+\frac{1}{\mu}} \quad \text{oder} \quad F_1 - a_1 = \pm \frac{\mu R_1}{1+\mu},$$

also

$$F_1 = a_1 \pm \frac{R_1}{1+\frac{1}{\mu}} \quad \text{oder} \quad F_1 = a_1 \pm \frac{\mu R_1}{1+\mu}.$$

§. 12.

Für $F_1 = \Delta_1$ ist auch $F_1 - a_1 = \Delta_1 - a_1$, also nach dem vorhergehenden Paragraphen, wenn wir wieder $b_1 = 0$ setzen,

$$\pm \frac{\mu R_1}{1+\mu} = \pm \frac{\mu R_1}{\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}},$$

d. i.

$$1+\mu = \mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}},$$

und folglich, wie sich leicht ergiebt, wenn man auf beiden Seiten quadrirt:

$$1+\mu\frac{q^2}{R_1^2} = \sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}} \cdot \sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}},$$

also, wenn man wieder auf beiden Seiten quadrirt,

$$(1+\mu)^2=0,\ \text{folglich}\ \mu=-1.$$

Für $\mu=-1$ werden aber die obigen Ausdrücke von $F_1-\alpha_1$ und $\Delta_1-\alpha_1$ beide $\mp\frac{R_1}{0}$, und man kann also eigentlich nicht sagen, dass die Gleichung $F_1-\alpha_1=\Delta_1-\alpha_1$ oder $F_1=\Delta_1$ für $\mu=-1$ erfüllt sei. Vielmehr ist dieselbe, wie leicht erhellet, nur dann erfüllt, wenn $\mu=0$ ist.

§. 13.

Es ist leicht zu zeigen, dass die beiden Grössen

$$1+\mu\ \text{und}\ \mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

immer gleiche Vorzeichen haben.

Wenn nämlich zuvörderst μ positiv ist, so sind die Grössen

$$1+\mu\ \text{und}\ \mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

offenbar beide positiv.

Wenn dagegen μ negativ ist, so hat man die drei folgenden Fälle zu unterscheiden.

1. Wenn $-\mu<1$ ist, so ist $1+\mu$ positiv. Weil nun ferner

$$\left(\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}\right)^2=\mu^2-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2},$$

$$\left(\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}\right)^2=1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}$$

und $\mu^2<1$ ist, so ist offenbar

$$\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

grösser als der absolute Werth von

$$\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}},$$

und folglich

$$\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

positiv.

2. Wenn $-\mu>1$ ist, so ist $1+\mu$ negativ. Weil nun ferner

$$(\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}})^2 = \mu^2 - \mu^2\frac{q^2}{R_1^2},$$

$$(\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}})^2 = 1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}$$

nnd $\mu^2 > 1$ ist, so ist offenbar

$$\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

kleiner als der absolute Werth von

$$\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}},$$

und folglich

$$\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

negativ.

3. Für $-\mu = 1$ verschwinden die Grössen

$$1+\mu \text{ und } \mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

beide, und können daher auch in diesem Falle als einerlei Vorzeichen habend betrachtet werden.

Man sieht also, dass die Grössen

$$1+\mu \text{ und } \mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

immer gleiche Vorzeichen haben, woraus sich ferner unmittelbar ergiebt, dass auch die Grössen

$$\pm\frac{\mu R_1}{1+\mu} \text{ und } \pm\frac{\mu R_1}{\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}},$$

d. i. in §. 11. für $b_1 = 0$ die Grössen $F_1 - a_1$ und $\Delta_1 - a_1$, immer gleiche Vorzeichen haben.

§. 14.

Wenn wir der Kürze wegen

$$V = \frac{1}{\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}}$$

setzen, so ist für $b_1 = 0$ nach §. 11.

$$F_1 - a_1 = \pm\frac{\mu R_1}{1+\mu},\ \Delta_1 - a_1 = \pm\mu R_1 V.$$

Um nun zu untersuchen, unter welchen Bedingungen, wenn q als gegeben oder constant, dagegen R_1 als veränderlich betrachtet wird, der absolute Werth der Differenz

$$U=(F_1-a_1)-(\Delta_1-a_1)=F_1-\Delta_1$$

ein Minimum oder ein Maximum wird, müssen wir vor allen Dingen den ersten Differentialquotienten von U^2 in Bezug auf R_1 als veränderliche Grösse entwickeln. Weil aber

$$\frac{d.U^2}{dR_1}=2U\frac{dU}{dR_1}$$

ist, so kommt es bloss auf die Entwickelung des ersten Differentialquotienten von U in Bezug auf R_1 als veränderliche Grösse an.

Nach dem Obigen ist

$$U=\pm\mu R_1\left(\frac{1}{1+\mu}-V\right),$$

und folglich

$$\frac{dU}{dR_1}=\pm\mu\left(\frac{1}{1+\mu}-V-R_1\frac{dV}{dR_1}\right).$$

Nun ist aber, wie man leicht findet,

$$\frac{d\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}}{dR_1}=\frac{q^2}{R_1^3\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}},$$

$$\frac{d\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}}{dR_1}=\frac{\mu^2q^2}{R_1^3\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}};$$

und folglich

$$\frac{dV}{dR_1}=-\frac{\mu q^2V}{R_1^3\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}.\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}},$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\frac{q^2}{R_1^2}=z^2$$

gesetzt wird:

$$V=\frac{1}{\mu\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\mu^2z^2}},$$

$$\frac{dV}{dR_1}=-\frac{\mu z^2V}{R_1\sqrt{1-z^2}.\sqrt{1-\mu^2z^2}}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$\pm\frac{1}{\mu}\cdot\frac{dU}{dR_1}=\frac{1}{1+\mu}-\frac{1}{\mu\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\mu^2z^2}}$$
$$+\frac{\mu z^2}{(\mu\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\mu^2z^2}).\sqrt{1-z^2}.\sqrt{1-\mu^2z^2}}.$$

Um nun die Bedingungen aufzufinden, unter denen der absolute Werth von U ein Minimum oder ein Maximum wird, muss man bekanntlich

$$\frac{d.U^2}{dR_1}=0,$$

d. i. nach dem Obigen

$$2U\frac{dU}{dR_1}=0$$

setzen, eine Gleichung, welche für

$$U=0 \text{ und } \frac{dU}{dR_1}=0$$

erfüllt ist. Da aber die Gleichung $U=0$, wie aus §. 12. erhellet, zu $\mu=-1$ führt, in welchem Falle die Grössen F_1 und Δ_1 beide unendlich werden, so bleibt bloss die Gleichung

$$\frac{dU}{dR_1}=0,$$

d, i. die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{1+\mu}-\dfrac{1}{\mu\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\mu^2z^2}}\\ +\dfrac{\mu z^2}{(\mu\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\mu^2z^2}).\sqrt{1-z^2}.\sqrt{1-\mu^2z^2}}\end{array}\right\}=0.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit

$$(1+\mu)(\mu\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\mu^2z^2}).\sqrt{1-z^2}\,.\sqrt{1-\mu^2z^2},$$

so wird dieselbe

$$\mu(1-z^2)\sqrt{1-\mu^2z^2}+(1-\mu^2z^2)\sqrt{1-z^2}$$
$$=(1+\mu)(\sqrt{1-z^2}\,.\sqrt{1-\mu^2z^2}-\mu z^2),$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, nach einigen leichten Reductionen:

$$\mu(1+\mu)^2z^4+2(1-z^2)(1+\mu z^2)(1-\mu^2z^2)$$
$$=2(1+\mu z^2)^2\sqrt{1-z^2}\,.\sqrt{1-\mu^2z^2}.$$

Quadrirt man nun wieder auf beiden Seiten dieser Gleichung, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung

$$\mu^2(1+\mu)^2x^6 = 4(1-x^2)(1+\mu x^2)(1-\mu^2x^2)$$

oder

$$\mu^2(1+\mu)^2x^6 - 4(1-x^2)(1+\mu x^2)(1-\mu^2x^2) = 0,$$

oder

$$\left.\begin{array}{r} \mu^2(1-\mu)^2x^6 \\ +4\mu(1-\mu+\mu^2)x^4 \\ +4(1-\mu+\mu^2)x^2 \\ -4 \end{array}\right\} = 0,$$

oder auch, insofern $1-\mu$ nicht verschwindet:

$$\left.\begin{array}{r} x^6 + \frac{4(1-\mu+\mu^2)}{\mu(1-\mu)^2}x^4 \\ + \frac{4(1-\mu+\mu^2)}{\mu^2(1-\mu)^2}x^2 \\ - \frac{4}{\mu^2(1-\mu)^2} \end{array}\right\} = 0.$$

Setzt man, um aus dieser Gleichung das zweite Glied wegzuschaffen,

$$x^2 = t - \frac{4(1-\mu+\mu^2)}{3\mu(1-\mu)^2},$$

so erhält man zur Bestimmung von t die Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} t^3 - \frac{4}{3}\cdot\frac{(1+\mu)^2(1-\mu+\mu^2)}{\mu^2(1-\mu)^4}t \\ - \frac{4}{27}\cdot\frac{4(1-10\mu+\mu^2)(1-\mu+\mu^2)^2 + 27\mu(1-\mu)^4}{\mu^3(1-\mu)^6} \end{array}\right\} = 0.$$

Es ist nun noch nöthig, den zweiten Differentialquotienten von U^2 in Bezug auf R_1 als veränderliche Grösse zu entwickeln. Weil aber

$$\frac{d.U^2}{dR_1} = 2U\frac{dU}{dR_1},$$

also

$$\frac{d^2.U^2}{dR_1^2} = 2U\frac{d^2U}{dR_1^2} + 2\left(\frac{dU}{dR_1}\right)^2$$

ist, und

$$\frac{dU}{dR_1} = 0$$

gesetzt worden ist, so braucht man bloss

$$\frac{d^2U}{dR_1^2}$$

zu entwickeln. Nach dem Obigen ist

$$\frac{dU}{dR_1}=\pm\mu\left(\frac{1}{1+\mu}-V-R_1\frac{dV}{dR_1}\right),$$

und folglich

$$\frac{d^2U}{dR_1^2}=\mp\mu\left(2\frac{dV}{dR_1}+R_1\frac{d^2V}{dR_1^2}\right),$$

so dass es also, da

$$\frac{dV}{dR_1}$$

aus dem Obigen bekannt ist, bloss noch auf die Entwickelung von

$$\frac{d^2V}{dR_1^2}$$

ankommt. Weil nun nach dem Obigen

$$R_1^2\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}\cdot\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}\cdot\frac{dV}{dR_1}=-\mu q^2 V$$

ist, so ist, wie man hieraus leicht findet,

$$R_1^2\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}\cdot\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}\cdot\frac{d^2V}{dR_1^2}$$
$$=\frac{\mu q^2 V}{R_1}\left(3+\frac{q^2}{R_1^2-q^2}+\frac{\mu^2q^2}{R_1^2-\mu^2q^2}\right)-\mu q^2\frac{dV}{dR_1},$$

also

$$\frac{d^2V}{dR_1^2}=$$
$$-R_1^{-1}\left(3+\frac{q^2}{R_1^2-q^2}+\frac{\mu^2q^2}{R_1^2-\mu^2q^2}\right)\frac{dV}{dR_1}+V^{-1}\left(\frac{dV}{dR_1}\right)^2$$

oder

$$\frac{d^2V}{dR_1^2}=-R_1^{-1}\left(3+\frac{z^2}{1-z^2}+\frac{\mu^2z^2}{1-\mu^2z^2}\right)\frac{dV}{dR_1}+V^{-1}\left(\frac{dV}{dR_1}\right)^2.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$W=-\frac{\mu z^2 V}{\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-\mu^2z^2}},$$

so ist

$$\frac{dV}{dR_1}=R_1^{-1}W \text{ oder } R_1\frac{dV}{dR_1}=W,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet,

$$R_1^2\frac{d^2V}{dR_1^2}=-W\left(3+\frac{z^2}{1-z^2}+\frac{\mu^2z^2}{1-\mu^2z^2}-\frac{W}{V}\right).$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{d^2U}{dR_1{}^2} = \mp\mu(2\frac{dV}{dR_1} + R_1\frac{d^2V}{dR_1{}^2})$$

ist, so ist

$$R_1\frac{d^2U}{dR_1{}^2} = \pm\mu W(1 + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{\mu^2z^2}{1-\mu^2z^2} - \frac{W}{V}).$$

Da aber bekanntlich

$$U = \pm\mu R_1(\frac{1}{1+\mu} - V)$$

und

$$\frac{d^2 \,.\, U^2}{dR_1{}^2} = 2U\frac{d^2U}{dR_1{}^2}$$

ist, so wird man bei der Berechnung des zweiten Differentialquotienten von U^2 sich am besten an die folgenden Formeln halten:

$$V = \frac{1}{\mu\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-\mu^2z^2}},$$

$$W = -\frac{\mu z^2 V}{\sqrt{1-z^2}\,.\,\sqrt{1-\mu^2z^2}}$$

und

$$\frac{d^2\,.\,U^2}{dR_1{}^2} =$$

$$2\mu^2 W(\frac{1}{1+\mu} - V)\,(1 + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{\mu^2z^2}{1-\mu^2z^2} - \frac{W}{V}).$$

§. 15.

Wenn, indem λ eine gegebene Zahl bezeichnet,

$$F_1 - \Delta_1 = \lambda R_1$$

sein soll, so haben wir nach dem Obigen die Gleichung

$$\pm\mu R_1(\frac{1}{1+\mu} - \frac{1}{\mu\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-\mu^2z^2}}) = \lambda R_1,$$

wo z seine bekannte Bedeutung hat, also, wie man leicht findet, wenn der Kürze wegen

$$k = \frac{\mu(1+\mu)}{\mu \mp \lambda(1+\mu)}$$

gesetzt wird,

$$\mu\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-\mu^2z^2} = k.$$

Quadrirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung, so ergiebt sich

$$2\mu\sqrt{1-x^2}\,.\sqrt{1-\mu^2x^2}=k^2-\mu^2-1+2\mu^2x^2,$$

und folglich, wenn man jetzt wieder auf beiden Seiten quadrirt, nach einigen leichten Reductionen:

$$x^2=\frac{4\mu^2-(k^2-\mu^2-1)^2}{4\mu^2k^2}$$

oder

$$x^2=\frac{\{(1+\mu)^2-k^2\}\,\{k^2-(1-\mu)^2\}}{4\mu^2k^2},$$

oder auch

$$x^2=-\frac{(k+\mu+1)(k+\mu-1)(k-\mu+1)(k-\mu-1)}{4\mu^2k^2}.$$

Hat man mittelst dieser Formel x^2 gefunden, so ergiebt sich auch q^2 mittelst der Formel

$$q^2=x^2R_1{}^2.$$

§. 16.

Wir wollen nun noch die wichtigsten der im Obigen gefundenen Formeln in Reihen entwickeln, und werden dabei die Binomialcoefficienten für den Exponenten m wie gewöhnlich durch

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ m_5,\ \ldots.$$

bezeichnen.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun zuerst

$$\sin\Theta=\frac{a_1-\Delta}{R_1}\sin\alpha$$

setzen. Dann ist

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\Theta)&=\sin\alpha\cos\Theta+\cos\alpha\sin\Theta\\&=\sin\alpha\sqrt{1-\sin\Theta^2}+\cos\alpha\sin\Theta\\&=\sin\alpha\left\{\begin{array}{l}1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha-(\tfrac{1}{2})_1\sin\Theta^2\\ \qquad+(\tfrac{1}{2})_2\sin\Theta^4\\ \qquad-(\tfrac{1}{2})_3\sin\Theta^6\\ \qquad+(\tfrac{1}{2})_4\sin\Theta^8\\ \qquad-\ldots\ldots\end{array}\right\},\end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}=1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha-(\tfrac{1}{2})_1\sin\Theta^2$$
$$+(\tfrac{1}{2})_2\sin\Theta^4$$
$$-(\tfrac{1}{2})_3\sin\Theta^6$$
$$+(\tfrac{1}{2})_4\sin\Theta^8$$
$$-\ldots\ldots$$

Ferner ist, wenn wir im Folgenden der Kürze wegen

$$\Omega=\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

oder

$$\Omega=\sqrt{1-\sin\Theta^2}+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

setzen, wie man leicht findet:

$$\Omega=1+\frac{1}{\mu}-(\tfrac{1}{2})_1(1+\mu)\sin\Theta^2$$
$$+(\tfrac{1}{2})_2(1+\mu^3)\sin\Theta^4$$
$$-(\tfrac{1}{2})_3(1+\mu^5)\sin\Theta^6$$
$$+(\tfrac{1}{2})_4(1+\mu^7)\sin\Theta^8$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Also ist

$$\Omega\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}=(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha)$$
$$-\left\{\begin{array}{l}(\tfrac{1}{2})_1(1+\mu)(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha)\\+(\tfrac{1}{2})_1(1+\frac{1}{\mu})\end{array}\right\}\sin\Theta^2$$
$$+\left\{\begin{array}{l}(\tfrac{1}{2})_2(1+\mu^3)(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha)\\+(\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_1(1+\mu)\\+(\tfrac{1}{2})_2(1+\frac{1}{\mu})\end{array}\right\}\sin\Theta^4$$
$$-\left\{\begin{array}{l}(\tfrac{1}{2})_3(1+\mu^5)(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha)\\+(\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_2(1+\mu^3)\\+(\tfrac{1}{2})_2(\tfrac{1}{2})_1(1+\mu)\\+(\tfrac{1}{2})_3(1+\frac{1}{\mu})\end{array}\right\}\sin\Theta^6$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe ist

$$(-1)^n \left\{ \begin{array}{l} (\tfrac{1}{2})_n (1 + \mu^{2n-1}) (1 + \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \cos \alpha) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_{n-1} (1 + \mu^{2n-3}) \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_{n-2} (1 + \mu^{2n-5}) \\ \quad \text{u. s. w.} \\ + (\tfrac{1}{2})_{n-1} (\tfrac{1}{2})_1 (1 + \mu) \\ + (\tfrac{1}{2})_n (1 + \frac{1}{\mu}) \end{array} \right\} \sin \Theta^{2n}.$$

Nach einem sehr bekannten Satze von den Binomialcoefficienten ist aber, wie man leicht finden wird, für $n > 1$:

$$(\tfrac{1}{2})_n + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_{n-1} + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_{n-2} + \ldots + (\tfrac{1}{2})_{n-1} (\tfrac{1}{2})_1 + (\tfrac{1}{2})_n = 0,$$

und das obige allgemeine Glied lässt sich also für $n > 1$, wenn man unter dieser Voraussetzung der Kürze wegen

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{R}_n = \frac{1}{\mu} \{ (\tfrac{1}{2})_n + (\tfrac{1}{2})_{n-1} (\tfrac{1}{2})_1 \mu^2 \\ \qquad + (\tfrac{1}{2})_{n-2} (\tfrac{1}{2})_2 \mu^4 \\ \qquad \quad \text{u. s. w.} \\ \qquad + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_{n-1} \mu^{2n-2} \\ \qquad + (\tfrac{1}{2})_n \mu^{2n} \end{array} \right\}$$

setzt, auch auf den folgenden Ausdruck bringen:

$$(-1)^n \{ \mathfrak{R}_n + (\tfrac{1}{2})_n (1 + \mu^{2n-1}) \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \cos \alpha \} \sin \Theta^{2n}.$$

Setzt man nun noch der Kürze wegen

$$\mathfrak{R}_1 = (\tfrac{1}{2})_1 (1 + \mu) (1 + \frac{1}{\mu}),$$

so erhält man nach dem Obigen für

$$\Omega \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha}$$

folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \Omega \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} \\ = & (1 + \frac{1}{\mu}) (1 + \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \cos \alpha) \\ & - \{ \mathfrak{R}_1 + (\tfrac{1}{2})_1 (1 + \mu) \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \cos \alpha \} \sin \Theta^2 \\ & + \{ \mathfrak{R}_2 + (\tfrac{1}{2})_2 (1 + \mu^3) \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \cos \alpha \} \sin \Theta^4 \\ & - \{ \mathfrak{R}_3 + (\tfrac{1}{2})_3 (1 + \mu^5) \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \cos \alpha \} \sin \Theta^6 \\ & + \{ \mathfrak{R}_4 + (\tfrac{1}{2})_4 (1 + \mu^7) \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \cos \alpha \} \sin \Theta^8 \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und folglich nach §. 3.

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}$$

$$=1-(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha)$$

$$+\{\mathfrak{R}_1+(\tfrac{1}{2})_1(1+\mu)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}\sin\Theta^2$$

$$-\{\mathfrak{R}_2+(\tfrac{1}{2})_2(1+\mu^3)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}\sin\Theta^4$$

$$+\{\mathfrak{R}_3+(\tfrac{1}{2})_3(1+\mu^5)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}\sin\Theta^6$$

$$-\{\mathfrak{R}_4+(\tfrac{1}{2})_4(1+\mu^7)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}\sin\Theta^8$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}$$

$$=1-(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha)$$

$$+\{\mathfrak{R}_1+(\tfrac{1}{2})_1(1+\mu)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2\sin\alpha^2$$

$$-\{\mathfrak{R}_2+(\tfrac{1}{2})_2(1+\mu^3)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^4\sin\alpha^4$$

$$+\{\mathfrak{R}_3+(\tfrac{1}{2})_3(1+\mu^5)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^6\sin\alpha^6$$

$$-\{\mathfrak{R}_4+(\tfrac{1}{2})_4(1+\mu^7)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^8\sin\alpha^8$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Weil nun aber

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin\alpha^2}$$

$$=\pm 1\mp(\tfrac{1}{2})_1\sin\alpha^2$$

$$\pm(\tfrac{1}{2})_2\sin\alpha^4$$

$$\mp(\tfrac{1}{2})_3\sin\alpha^6$$

$$\pm\ldots\ldots$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}$$

$$=1-(1+\frac{1}{\mu})(1\pm\frac{a_1-\Delta}{R_1})$$

Digitized by Google

$$\pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left\{ \begin{array}{l} (\tfrac{1}{2})_1 (1 + \frac{1}{\mu}) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (1 + \mu) (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^2 \\ \pm \mathfrak{K}_1 \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \end{array} \right\} \sin \alpha^2$$

$$\mp \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left\{ \begin{array}{l} (\tfrac{1}{2})_2 (1 + \frac{1}{\mu}) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_1 (1 + \mu) (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^2 \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (1 + \mu^3) (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^4 \\ \pm \mathfrak{K}_2 (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^3 \end{array} \right\} \sin \alpha^4$$

$$\pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left\{ \begin{array}{l} (\tfrac{1}{2})_3 (1 + \frac{1}{\mu}) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_2 (1 + \mu) (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^2 \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_1 (1 + \mu^3) (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^4 \\ + (\tfrac{1}{2})_3 (1 + \mu^5) (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^6 \\ \pm \mathfrak{K}_3 (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^5 \end{array} \right\} \sin \alpha^6$$

$$\mp \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left\{ \begin{array}{l} (\tfrac{1}{2})_4 (1 + \frac{1}{\mu}) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_3 (1 + \mu) (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^2 \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_2 (1 + \mu^3) (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^4 \\ + (\tfrac{1}{2})_3 (\tfrac{1}{2})_1 (1 + \mu^5) (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^6 \\ + (\tfrac{1}{2})_4 (1 + \mu^7) (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^8 \\ \pm \mathfrak{K}_4 (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^7 \end{array} \right\} \sin \alpha^8$$

$$\pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ueber die durch

$$\mathfrak{K}_1,\ \mathfrak{K}_2,\ \mathfrak{K}_3,\ \mathfrak{K}_4,\ \mathfrak{K}_5,\ \ldots.$$

bezeichneten Grössen wollen wir noch bemerken, dass, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{(1+\mu)^2}{2\mu},$$

$$\mathfrak{K}_2 = -\frac{(1-\mu^2)^2}{8\mu},$$

$$\mathfrak{K}_3 = \frac{(1-\mu^2)^2(1+\mu^2)}{16\mu},$$

$$\mathfrak{K}_4 = -\frac{(1-\mu^2)^2(5+6\mu^2+5\mu^4)}{128\mu},$$

$$\mathfrak{K}_5 = \frac{(1-\mu^2)^2(1+\mu^2)(7+2\mu^2+7\mu^4)}{256\mu}$$

ist, und man wird leicht ähnliche Ausdrücke auch für die folgenden Coefficienten finden können.

Für $\mu=1$ ist $\mathfrak{K}_1=2$, und, wie leicht aus dem angeführten Satze von den Binomialcoefficienten geschlossen wird,

$$\mathfrak{K}_2=\mathfrak{K}_3=\mathfrak{K}_4=\mathfrak{K}_5=\ldots\ldots=0,$$

also für $\mu=1$ nach dem Obigen:

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}$$

$$= 1-2(1\pm\frac{a_1-\Delta}{R_1})$$

$$\pm\frac{a_1-\Delta}{R_1}(1\pm\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2 \sin\alpha^2$$

$$\mp 2\frac{a_1-\Delta}{R_1}\left\{(\tfrac{1}{2})_2+(\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_1(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2 + (\tfrac{1}{2})_2(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^4\right\}\sin\alpha^4$$

$$\pm 2\frac{a_1-\Delta}{R_1}\left\{(\tfrac{1}{2})_3+(\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_2(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2 + (\tfrac{1}{2})_2(\tfrac{1}{2})_1(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^4 + (\tfrac{1}{2})_3(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^6\right\}\sin\alpha^6$$

$$\mp 2\frac{a_1-\Delta}{R_1}\left\{(\tfrac{1}{2})_4+(\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_3(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2 + (\tfrac{1}{2})_2(\tfrac{1}{2})_2(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^4 + (\tfrac{1}{2})_3(\tfrac{1}{2})_1(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^6 + (\tfrac{1}{2})_4(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^8\right\}\sin\alpha^8$$

$$\pm\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder auch

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1}$$

$$= 1 - 2\left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)$$

$$\pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \sin \alpha^2$$

$$\pm \frac{1}{4} \cdot \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left(1 - \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \left(1 + \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \sin \alpha^4$$

$$\pm \frac{1}{8} \cdot \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left(1 - \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \left(1 + \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2\right\} \sin \alpha^6$$

$$\pm \frac{1}{64} \cdot \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left(1 - \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \left(1 + \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \left\{5 + 6\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 + 5\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^4\right\} \sin \alpha^8$$

$$\pm \frac{1}{128} \cdot \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left(1 - \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \left(1 + \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2\right\}\left\{7 + 2\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 + 7\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^4\right\} \sin \alpha^{10}$$

$$\pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wenn man

$$\sin \Theta = \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \sin \alpha$$

und

$$\begin{aligned} \cos \alpha = \pm 1 & \mp (\tfrac{1}{2})_1 \sin \alpha^2 \\ & \pm (\tfrac{1}{2})_2 \sin \alpha^4 \\ & \mp (\tfrac{1}{2})_3 \sin \alpha^6 \\ & \pm \ldots\ldots \end{aligned}$$

setzt, so ergiebt sich aus der oben für

$$\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}$$

gefundenen Reihe leicht:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha} = \; & 1 \pm \frac{a_1-\Delta}{R_1} \\ & \mp (\tfrac{1}{2})_1 \frac{a_1-\Delta}{R_1} \{1 \pm \frac{a_1-\Delta}{R_1}\} \sin\alpha^2 \\ & \pm (\tfrac{1}{2})_2 \frac{a_1-\Delta}{R_1} \{1 \pm (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^3\} \sin\alpha^4 \\ & \mp (\tfrac{1}{2})_3 \frac{a_1-\Delta}{R_1} \{1 \pm (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^5\} \sin\alpha^6 \\ & \pm (\tfrac{1}{2})_4 \frac{a_1-\Delta}{R_1} \{1 \pm (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^7\} \sin\alpha^8 \\ & \mp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und hieraus mit Hülfe des schon mehrmals angewandten Satzes von den Binomialcoefficienten

$$\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\cos\alpha = \sin(\alpha+\Theta)\cot\alpha$$

$$\begin{aligned} = & \pm (1 \pm \frac{a_1-\Delta}{R_1}) \\ & \mp (\tfrac{1}{2})_1 (1 \pm \frac{a_1-\Delta}{R_1})^3 \sin\alpha^2 \\ & \pm \{(\tfrac{1}{2})_2 + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_1 (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2 + (\tfrac{1}{2})_2 (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^4\} \sin\alpha^4 \\ & \mp \{(\tfrac{1}{2})_3 + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_2 (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2 + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_1 (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^4 + (\tfrac{1}{2})_3 (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^6\} \sin\alpha^6 \\ & \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Weil nun nach §. 4. bekanntlich

$$p_1 = \Delta + R_1 \sin(\alpha+\Theta)\cot\alpha,$$
$$q_1 = R_1 \sin(\alpha+\Theta)$$

oder

$$\frac{p_1-\Delta}{R_1} = \sin(\alpha+\Theta)\cot\alpha,$$
$$\frac{q_1}{R_1} = \sin(\alpha+\Theta)$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{p_1 - \Delta}{R_1} =$$

$$\pm \left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)$$

$$\mp (\tfrac{1}{2})_1 \left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \sin \alpha^2$$

$$\pm \left\{(\tfrac{1}{2})_2 + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_1 \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 + (\tfrac{1}{2})_2 \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^4\right\} \sin \alpha^4$$

$$\mp \left\{(\tfrac{1}{2})_3 + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_2 \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_1 \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^4 + (\tfrac{1}{2})_3 \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^6\right\} \sin \alpha^6$$

$$\pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$\frac{q_1}{R_1} = \quad \left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right) \sin \alpha$$

$$\mp (\tfrac{1}{2})_1 \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left\{1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right\} \sin \alpha^3$$

$$\pm (\tfrac{1}{2})_2 \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left\{1 \pm \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^3\right\} \sin \alpha^5$$

$$\mp (\tfrac{1}{2})_3 \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left\{1 \pm \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^5\right\} \sin \alpha^7$$

$$\pm (\tfrac{1}{2})_4 \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \left\{1 \pm \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^7\right\} \sin \alpha^9$$

$$\mp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Weil nach §. 5.

$$\sin \alpha_1 = (\mu) \frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} \sin \alpha$$

ist, so braucht man die oben für

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1}$$

gefundene Reihe nur mit $(\mu) \sin \alpha$ zu multipliciren, um auf der Stelle eine nach den ungeraden Potenzen von $\sin \alpha$ fortschreitende Reihe für $\sin \alpha_1$ zu erhalten. Die Reihe für $\cos \alpha_1$ mag, als weniger wichtig, und weil ihre Entwickelung nicht ohne einige Weitläufigkeit möglich ist, der Kürze wegen für jetzt hier übergangen werden.

§. 17.

Wir wollen nun noch den Fall besonders betrachten, wenn der einfallende Strahl der Axe der x parallel ist. In diesem Falle ist, wenn wir die in §. 11. eingeführten Bezeichnungen beibehalten, und immer $b_1 = 0$ setzen:

$$\sin\Theta = \pm\frac{q}{R_1}$$

und

$$\Delta_1 - a_1 = \pm\frac{R_1(\cos\Theta - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{1-\frac{1}{\mu^2}},$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem der einfallende Strahl von seinem Ausgangspunkte an nach der Seite der positiven x, oder nach der Seite der negativen x hin gerichtet ist.

Entwickeln wir nun, indem wir $\cos\Theta = \sqrt{1-\sin\Theta^2}$ setzen, den Zähler des vorstehenden Bruchs nach den Potenzen von $\sin\Theta$, so erhalten wir:

$$\Delta_1 = a_1 \mp \frac{\mu^2}{1-\mu^2} R_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{\mu} - (\tfrac{1}{2})_1 (1-\mu)\sin\Theta^2 \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (1-\mu^3)\sin\Theta^4 \\ - (\tfrac{1}{2})_3 (1-\mu^5)\sin\Theta^6 \\ + (\tfrac{1}{2})_4 (1-\mu^7)\sin\Theta^8 \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

oder

$$\Delta_1 = a_1 \mp \frac{\mu^2}{1-\mu^2} R_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{\mu} - (\tfrac{1}{2})_1 (1-\mu)(\frac{q}{R_1})^2 \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (1-\mu^3)(\frac{q}{R_1})^4 \\ - (\tfrac{1}{2})_3 (1-\mu^5)(\frac{q}{R_1})^6 \\ + (\tfrac{1}{2})_4 (1-\mu^7)(\frac{q}{R_1})^8 \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

Ferner ist nach §. 11.

$$\mp\frac{\sin\alpha_1}{(\mu)} = \sin\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\mp\sin\alpha_1 = (\mu)\left\{ \begin{array}{l} (1+\frac{1}{\mu})\sin\Theta - (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu)\sin\Theta^3 \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (1+\mu^3)\sin\Theta^5 \\ - (\tfrac{1}{2})_3 (1+\mu^5)\sin\Theta^7 \\ + (\tfrac{1}{2})_4 (1+\mu^7)\sin\Theta^9 \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

oder

$$\sin \alpha_1 = -(\mu)\left\{(1+\frac{1}{\mu})\frac{q}{R_1} - (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu)(\frac{q}{R_1})^3 \right.$$
$$+ (\tfrac{1}{2})_2 (1+\mu^3)(\frac{q}{R_1})^5$$
$$- (\tfrac{1}{2})_3 (1+\mu^5)(\frac{q}{R_1})^7$$
$$+ (\tfrac{1}{2})_4 (1+\mu^7)(\frac{q}{R_1})^9$$
$$\left. - \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}.$$

Endlich ist nach §. 11.

$$\pm \frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} = 1 - \cos \Theta(\cos \Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}),$$

und folglich, wie man mit Hülfe des schon mehrfach angewandten Satzes von den Binomialcoefficienten leicht findet:

$$\pm \cos \alpha_1 = -\frac{(\mu)}{\mu}\left\{ 1 \right.$$
$$- (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu)^2 \sin \Theta^2$$
$$+ \{(\tfrac{1}{2})_2 + (\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_1\mu^2 + (\tfrac{1}{2})_2\mu^4\} \sin \Theta^4$$
$$- \{(\tfrac{1}{2})_3 + (\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_2\mu^2 + (\tfrac{1}{2})_2(\tfrac{1}{2})_1\mu^4 + (\tfrac{1}{2})_3\mu^6\} \sin \Theta^6$$
$$+ \{(\tfrac{1}{2})_4 + (\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_3\mu^2 + (\tfrac{1}{2})_2(\tfrac{1}{2})_2\mu^4 + (\tfrac{1}{2})_3(\tfrac{1}{2})_1\mu^6 + (\tfrac{1}{2})_4\mu^8\} \sin \Theta^8$$
$$\left. - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

oder

$$\cos \alpha_1 =$$
$$\mp \frac{(\mu)}{\mu}\left\{ 1 \right.$$
$$- (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu)^2 (\frac{q}{R_1})^2$$
$$+ \{(\tfrac{1}{2})_2 + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_1\mu^2 + (\tfrac{1}{2})_2\mu^4\}(\frac{q}{R_1})^4$$
$$- \{(\tfrac{1}{2})_3 + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_2\mu^2 + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_1\mu^4 + (\tfrac{1}{2})_3\mu^6\} (\frac{q}{R_1})^6$$
$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

oder auch, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$\cos \alpha_1 =$$
$$\mp \frac{(\mu)}{\mu}\left\{ 1 \right.$$
$$- \tfrac{1}{2}(1+\mu)^2 (\frac{q}{R_1})^2$$
$$- \tfrac{1}{8}(1-\mu^2)^2 (\frac{q}{R_1})^4$$
$$- \tfrac{1}{16}(1-\mu^2)^2 (1+\mu^2) (\frac{q}{R_1})^6$$
$$- \tfrac{1}{128}(1-\mu^2)^2 (5+6\mu^2+5\mu^4) (\frac{q}{R_1})^8$$
$$\left. - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}.$$

§. 18.

In §. 16. haben wir

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1}$$

in eine nach den geraden Potenzen von sin α fortschreitende Reihe entwickelt. Um nun aber auch

$$\frac{a_1 - \Delta_1}{a_1 - \Delta}$$

in eine solche Reihe zu entwickeln, müsste man auf folgende Art verfahren. Man setze

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} = A + B\sin\alpha^2 + C\sin\alpha^4 + D\sin\alpha^6 + \ldots,$$

wo die Coefficienten $A, B, C, D, \ldots$ aus §. 16. bekannt sind, und

$$\frac{a_1 - \Delta_1}{a_1 - \Delta} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\sin\alpha^2 + \mathfrak{C}\sin\alpha^4 + \mathfrak{D}\sin\alpha^6 + \ldots.$$

Weil nun

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} \cdot \frac{a_1 - \Delta_1}{a_1 - \Delta} = 1$$

ist, so erhält man durch Multiplication der beiden obigen Reihen in einander die Gleichung

$$\begin{aligned} 1 = & A\mathfrak{A} \\ & + (A\mathfrak{B} + B\mathfrak{A}) \sin\alpha^2 \\ & + (A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A}) \sin\alpha^4 \\ & + (A\mathfrak{D} + B\mathfrak{C} + C\mathfrak{B} + D\mathfrak{A}) \sin\alpha^6 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

aus welcher sich zur Bestimmung der Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} & A\mathfrak{A} = 1, \\ & A\mathfrak{B} + B\mathfrak{A} = 0, \\ & A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} = 0, \\ & A\mathfrak{D} + B\mathfrak{C} + C\mathfrak{B} + D\mathfrak{A} = 0, \end{aligned}$$

u. s. w.

ergeben, deren Gesetz klar vor Augen liegt. Diese kurze Andeutung über den in Rede stehenden Gegenstand mag für jetzt genügen, um diese Abhandlung, welche vorzüglich nur die Grundlagen für andere spätere Untersuchungen enthalten soll, nicht zu sehr auszudehnen.

II.

Lehrsätze und Formeln aus der analytischen Geometrie und mathematischen Geographie, welche in der practischen Geometrie zur Anwendung kommen.

Von

Herrn Professor Dr. Gerling

zu Marburg.

Zum Behuf meiner Triangulirungs-Arbeiten habe ich schon vor mehr als zwanzig Jahren die nöthigen Lehrsätze und Formeln mir in möglichst elementarer und anschaulicher Weise selbstständig entwickelt. Dieses hat mir gute Dienste geleistet, und habe ich auch dabei gelegentlich Eins und das Andere aufgefunden, was, meines Wissens, wenigstens nicht so allgemein bekannt ist, als für die Anwendung vielleicht zu wünschen wäre. Ich stelle also meine Ableitungen hier zum Gebrauch der Practiker zusammen und gebe ihnen dadurch zugleich vollständige Auskunft über das Verfahren, welches in dieser Beziehung von mir beobachtet wurde, in meinem Buche über die Triangulirung aber (*Beiträge zur Geographie von Kurhessen.* 1838.) namentlich §. 51. 54. 96. nur kurz angedeutet werden konnte.

Den elliptischen Erd-Meridian betreffend.

§. 1.

Bezeichnen wir die halbe grosse Axe der Ellipse mit a, die halbe kleine Axe mit b, so haben wir bekanntlich die Gleichung der Ellipse für rechtwinkliche aus dem Mittelpunkt den Axen parallel gezählte Coordinaten

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Form der Gleichung ist aber für die Rechnungen, die sich auf den Erdmeridian beziehen, nicht die bequemste. Wir haben hiebei nämlich immer zuerst nach der Polhöhe (unverbesserten geographischen Breite) des Orts zu fragen, für welchen es etwas zu rechnen giebt. Diese Polhöhe ist bekanntlich der Winkel, den die Verticale des Orts mit der Ebene des Aequators macht, der

sonst auch wohl Subnormalen-Winkel genannt wird. — Sodann aber brauchen wir uns während unserer meisten Rechnungen um das wirkliche Längenmaass von a (dem Halbmesser des Aequators) und b (dem Halbmesser des Pols oder der halben Rotations-Axe) gar nicht zu bekümmern, wenn wir nur von Anfang die Gestalt der Ellipse kennen, und zuletzt die richtige Maass-Einheit einführen.

Wir werden also uns die Rechnungen erleichtern, wenn wir gleich von Anfang in der Gleichung der Ellipse sowohl a zum Maass aller Längen nehmen, als auch die rechtwinklichen Coordinaten selbst, und alles, was damit zusammenhängt, als Functionen des Subnormalen-Winkels oder der Polhöhe des Orts ausdrücken, die wir mit N bezeichnen wollen.

§. 2.

Die Gestalt des elliptischen Erdmeridians ist nun durch die Abplattung c gegeben, wofür wir die Formel haben

$$(2) \quad c = \frac{a-b}{a}$$

Wir gebrauchen aber in den practischen Rechnungen gewöhnlich die in abstracter Zahl ausgedrückte Excentricität e der Ellipse, die wir durch die Formel

$$(3) \quad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

berechnen.

Die Vergleichung von (2) und (3) giebt

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 = (1-c)^2,$$

also

$$(4) \quad e^2 = (2-c)c.$$

Dieser Formel bedienen wir uns schon mit Nutzen zu Uebers lägen. Denn da wir wissen, dass c nach dem Zeugniss aller Gradmessungen nur sehr wenig von $\frac{1}{300}$ abweicht; so haben wir

$$e^2 < \frac{1}{150}$$

$$e^4 < \frac{1}{22500}$$

$$e^6 < \frac{1}{3375000} \text{ u. s. w.}$$

Wenn uns also Reihenentwickelungen vorkommen, die nach Potenzen von e^2 fortschreiten, so können wir nach dem jedesmaligen Zwecke hiedurch leicht beurtheilen, wie viel Glieder davon wir mitzunehmen haben.

Digitized by Google

Beschliessen wir nun für das Folgende a zur Maass-Einheit aller Längen zu wählen, so haben wir zu setzen

$$(6) \quad a = 1$$

$$(7) \quad b = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$$

und somit wird unsere Formel (1) in

$$(8) \quad y^2 = (1 - e^2)(1 - x^2)$$

sich verwandeln.

§. 3.

Um nun weiter die Coordinaten als Functionen der Polhöhe (des Subnormalen-Winkels) N auszudrücken, erinnern wir uns, dass ganz allgemein vermöge des sogenannten characteristischen Differential-Dreiecks ist:

$$tang\ N^2 = (\frac{dx}{dy})^2$$

also entweder

$$tang\ N = + \frac{dx}{dy} \text{ oder } tang\ N = - \frac{dx}{dy}.$$

In unserm besondern Fall werden wir für $tang\ N$ den letzten dieser Ausdrücke zu wählen haben, weil die Polhöhen und mit ihnen die elliptischen Meridian-Bögen immer im ersten Quadranten bleiben und vom Aequator gegen den Pol hin wachsen, somit also die dx und dy nothwendig verschiedene Zeichen haben.

Differentiiren wir nun die Gleichung (8), so kommt uns zunächst

$$2ydy = -2(1 - e^2)xdx,$$

d. h.

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{y}{(1 - e^2)x}.$$

Erheben wir ins Quadrat und setzen für y^2 seinen Werth aus (8), so wird

$$(9) \quad tang\ N^2 = \frac{1 - x^2}{(1 - e^2)x^2}.$$

Gehen wir von der Tangente auf die Secante und von dieser auf den Cosinus über, so kommt uns

$$(10) \quad cos\ N^2 = \frac{(1 - e^2)x^2}{1 - e^2x^2}$$

und endlich durch Multiplication von (9) und (10)

$$(11) \quad sin\ N^2 = \frac{1 - x^2}{1 - e^2x^2}.$$

Drücken wir nun x^2 durch die Formel (11) aus, so kommt uns

$$(12)\quad x^2 = \frac{\cos N^2}{1 - e^2 \sin N^2},$$

also endlich

$$(13)\quad x = \frac{\cos N}{(1 - e^2 \sin N^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzen wir den Werth von x^2 aus (12) in die Formel (8), so erhalten wir

$$(14)\quad y^2 = \frac{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin N^2 - \cos N^2)}{1 - e^2 \sin N^2},$$

also zusammengenommen und ausgezogen

$$(15)\quad y = \frac{(1 - e^2) \sin N}{(1 - e^2 \sin N^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Der für x und y gemeinschaftliche Factor $\frac{1}{(1 - e^2 \sin N^2)^{\frac{1}{2}}}$ ist, wie weiter unten erhellen wird, von grosser practischer Wichtigkeit. Er bietet aber auch ein geometrisches Interesse dar. Denn ist **Fig. 1.** L der Punkt des Meridians, für welchen die Rechnung zu führen ist, und LO in seiner Verticale, so ist nach unsern bisherigen Festsetzungen $CP = x$, also aus (13)

$$\frac{1}{(1 - e^2 \sin N^2)^{\frac{1}{2}}} = LO,$$

d. h. gleich dem Theil der Verticale, welcher zwischen dem in Rechnung zu nehmenden Ort und der Rotations-Axe des elliptischen Sphäroids liegt. Ich habe für diese Linie den Namen Conormale vorgeschlagen und werde auch hier den Buchstaben k zu ihrer kurzen Bezeichnung gebrauchen.

§. 4.

Mit Hülfe der Conormale k lassen sich nun die sämmtlichen Linien, die in dem elliptischen Meridiane zur Berechnung kommen können, leicht und in bequemen Ausdrücken als Functionen der Polhöhe darstellen. Wir haben nämlich **Fig. 1.**

n. 1 $k (= LO) = \frac{1}{(1 - e^2 \sin N^2)^{\frac{1}{2}}}$

n. 2 $x (= CP) = k \cos N$

n. 3 $y (= LP) = (1 - e^2) k \sin N$

n. 4 NORMALE $(= LN) = (1 - e^2) k$

n. 5 SUBNORMALE $(= NP) = (1 - e^2) k \cos N$

n. 6 SUBTANGENTE $(= PT) = (1 - e^2) k \sin N \,.\, \tang N$

n. 7 TANGENTE $(= LT) = (1 - e^2) k \tang N$

$$\text{n. 8} \quad CN = e^2 k \cos N$$
$$\text{n. 9} \quad CO = e^2 k \sin N$$
$$\text{n. 10} \quad ON = e^2 k.$$

Eben so leicht ergeben sich nun zwei andere Grössen, welche man mitunter gebraucht, die Entfernung $CL (= R)$ des Orts vom Mittelpunkt der Erde (der sogenannte locale Erd-Radius) und der Winkel $CLN (= v)$, den diese Linie mit der Verticale macht (die sogenannte Verbesserung der Polhöhe), welcher Winkel auf unserer Erde bekanntlich höchstens 12′ beträgt und von der Polhöhe abzuziehen ist, um die sogenannte verbesserte Breite $NCL = N - v$ zu haben.

Denken wir uns nämlich von C auf die Conormale ein Perpendikel gefällt, so ist

$$(16) \quad R \sin v = CN \sin N = \tfrac{1}{2} e^2 k \sin 2N$$

$$(17) \quad R \cos v = LO - CO \sin N = \frac{1}{k}.$$

Hieraus ergiebt sich nun leicht durch Division

$$\text{n. 11} \quad \tang v = \tfrac{1}{2} e^2 k^2 \sin 2N$$

$$\text{n. 12} \quad R = \frac{1}{k \cos v}.$$

Diese letzte Formel zeigt auch eine elegante geometrische Eigenschaft der Ellipse an, womit wir uns hier aber nicht aufhalten. Ich habe sie mitgetheilt in meinem Programm *de parallaxi elationis* 1830, wo auch die obigen Formeln, meines Wissens, zuerst bekannt gemacht wurden.

§. 5.

Die Formeln des vorigen Paragraphen zeigen, dass es bei allen Rechnungen, die sich auf das Erd-Sphäroid beziehen, am vortheilhaftesten sein wird, aus dem zum Grunde zu legenden c, erst nach (4) das e^2 scharf zu berechnen, und sodann nach **n. 1** für die Gegend, worin man zu thun hat, eine Hülfstafel zu construiren, aus welcher man für das Argument N das jedesmalige k abliest. Hieraus folgt dann alles Weitere nach obigen Formeln leicht, und kann erforderlichen Falls auch in Tafeln gebracht werden.

Ich habe zweimal eine solche Hülfstafel berechnet. Zuerst 1822 für die *Walbeck*sche Abplattung (*Beiträge* u. s. w. S. 84 und 198) und sodann 1830 für die (erste) *Schmidt*sche Abplattung (*parallaxis elat.*, vergl. *Schumacher Astronomische Nachrichten* X. S. 7.). Hier will ich also für Practiker, die vielleicht sich ähnliche Tafeln entwerfen wollten, etwa nach der neuesten *Bessel*schen Abplattung $c = \frac{1}{299{,}1528}$ (*Schumacher* n. a. O. XIX. S. 116.), noch die Weise angeben, wie ich dabei verfuhr.

Man gebraucht in der Praxis gemeiniglich nicht k selbst, son-

dern seinen Logarithmus, und ist also auch die Tafel gleich für $\log k$ zu construiren.

Erhebe ich also die Formel n. 1 erst ins Quadrat, so kommt

$$k^2 = (1 - e^2 \sin N^2)^{-1}.$$

Differentiire ich dieses nach $\sin N$, so kommt

$$kdk = (1 - e^2 \sin N^2)^{-2} e^2 \sin N d \sin N.$$

Dividire ich dann das untere durch das obere, so erhalte ich

$$\frac{dk}{k} = d \log nat.\ k = (1 - e^2 \sin N^2)^{-1} e^2 \sin N d \sin N.$$

Entwickele ich rechts die Parenthese und multiplicire mit $e^2 \sin N$, so ergiebt sich

$$d \log nat.\ k = (e^2 \sin N + e^4 \sin N^3 + e^6 \sin N^5 + \ldots) d \sin N,$$

also durch Integration und Multiplication mit dem Modulus des briggischen Systems $(= M)$

$$(18) \quad \log k = M(\tfrac{1}{2} e^2 \sin N^2 + \tfrac{1}{4} e^4 \sin N^4 + \tfrac{1}{6} e^6 \sin N^6 + \ldots)$$

Dass keine Integrations-Constante heizufügen ist, erhellt daraus, dass für $N = 0$ nach n. 1, $k = 1$ werden muss, also auch $\log k = 0$.

Man kann also zur Entwerfung der Hülfstafel für $\log k$ einen grossen Theil der Rechnung mit 5stelligen Logarithmen ausführen, und hat dann, um die Logarithmen aller im vorigen Paragraphen erwähnten Grössen für den Halbmesser des Aequators als Einheit durch leichte Formeln zu erhalten, ausser dem $\log e^2$, den man schon für die Hülfstafel gebrauchte, nur noch den $\log(1 - e^2)$ ein für allemal zu berechnen und sich aufzuschreiben. Zuletzt ist dann, wenn man absolutes Längenmaass verlangt, noch $\log a$ hinzuzufügen.

Bessel (a. a. O.) giebt nach seiner so höchst verdienstlichen definitiven Berechnung von zehn Gradmessungen

$$\log e = 8{,}9122052$$
$$\log(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = 9{,}9985458.202$$
$$a = 3272077{,}14 \text{ Toisen}$$
$$\log a = 6{,}5148235.337$$

Den Krümmungshalbmesser des Meridians betreffend.

§. 6.

Bei Untersuchungen über Quantität und Qualität der Krümmung einer ebenen Curve pflegt man gemeiniglich denselben Weg einzuschlagen, den man auch bei den meisten andern Untersuchun-

geu geht; so dass man also dx als constant annimmt, (d. h. die x als unabhängige der Zeit proportional wachsende Grössen betrachtet), alle übrigen Differentiale zunächst mit dx vergleicht, und dadurch die bekannten Formeln mit Hülfe des zweiten Differential-Verhältnisses $\frac{d^2y}{dx^2}$ entwickelt.

Mich hat aber immer bedünken wollen, dass man auf einem andern Wege in manchen practischen Fällen bequemer und jedenfalls übersichtlicher zum Ziel kommt. Folgendes ist dieser Weg.

1. Ich denke mir nämlich von Anfang den Bogen s der ebenen Curve als unabhängige Veränderliche, das heisst also mit andern Worten, ich denke mir die Curve als entstanden aus einem eingeschriebenen Polygonzuge, der ursprünglich über den Polygonseiten lauter gleiche Bögen hatte, und nun durch fortgesetzte Halbirung dieser Bögen in die Curve überging, worin also inneres und äusseres Polygon zusammenfallen. Oder noch anders ausgedrückt, ich denke die Curve nicht bloss als Polygonzug, sondern als gleichseitigen Polygonzug von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten, deren jede den constanten Werth ds hat.

2. Zwei benachbarte ds können nun nicht in gerader Linie liegen, weil sonst ein Theil der Curve aus einer geraden Linie entsprungen sein müsste. Der Winkel aber, den sie mit einander bilden, muss nur um eine unendlich kleine Differenz von zwei rechten Winkeln verschieden sein, weil sonst ds nicht unendlich klein wäre. (Oder, will ich noch hinzusetzen, weil sonst die Stetigkeit unterbrochen wäre, welcher Fall aber für gegenwärtigen Zweck ausser Betrachtung bleibt.)

3. Denke ich mir nun am Anfang und am Ende eines beliebigen Elements jenen Winkel mit seinem benachbarten Element durch eine gerade Linie halbirt, so erhalte ich zwei benachbarte Normalen. Diese Normalen kann ich mir, wenn es erforderlich ist, auch senkrecht auf andern Curvenelementen errichtet denken, indem ich die Mitte eines in Betrachtung gezogenen Elements ds mit der Mitte des vorhergehenden und folgenden durch neue gleich grosse Elemente verbunden denke, die also auch wieder mit der Curve zusammenfallen.

4. Je zwei auf solche Weise einander benachbarte Normalen werden sich nun, allgemein zu reden (denn Ausnahmsfälle erfordern eine besondere Betrachtung), in einem Punkt schneiden, und hier einen Winkel einschliessen, welcher auch unendlich klein ist, weil ein Elementardreieck entsteht, in welchem die beiden dem ds anliegenden Winkel nur um einen unendlich kleinen Unterschied von rechten Winkeln abweichen. Denke ich mir aber irgendwo in der Ebene der Figur eine beliebige Abscissenlinie gezogen, bezeichne den Winkel, den die durch den Anfang von ds gezogene Normale mit derselben macht, mit N, und zwar in dem Sinn, dass für das wachsende s auch N wachsen muss, so ist der obige von zwei einander unendlich nahen Normalen eingeschlossene unendlich kleine Winkel mit dN zu bezeichnen. Diesen Winkel dN kann man dabei am bequemsten durch einen sehr kleinen Bruch des, als Einheit zu nehmenden, Halbmessers ausgedrückt denken. Sollte er in Secunden dargestellt werden, so käme dann nur noch der bekannte Factor $\varrho(=206264,81)$ hinzu.

5. Ist nun die zu betrachtende Curve ein Kreis, so ist sie

nach bekannten Elementar-Sätzen aus einem regelmässigen, also nicht bloss gleichseitigen, sondern auch gleichwinklichen Polygon entstanden. Demnach werden alle Elementar-Dreiecke auch gleichschenklich und einander congruent, und alle Normalen schneiden sich also in einem und demselben Punkt, dem Mittelpunkt des Kreises.

6. Ist aber die Curve kein Kreis, so muss sie aus einem gleichseitigen, nicht gleichwinklichen Polygonzuge entstanden gedacht werden. Allgemein zu reden werden also je drei auf einander folgende *ds* zwei Winkel mit einander bilden, die von einander verschieden sind, und zwar verschieden um die Differenz zweier unendlich kleiner Winkel, d. h. um einen Winkel, welcher im zweiten Grad unendlich klein ist.

7. Denkt man sich nun auf dem mittelsten von drei auf einander folgenden Elementen in seiner Mitte ein beliebig verlängertes Perpendikel errichtet, so muss dieses, nach dem obigen 3., auch als Normale der Curve gedacht werden. Es steht, wie oben, senkrecht auf der Berührungs-Linie, die als Verlängerung eines Curven-Elements zu denken ist. Es ist also auch der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche an dieser Stelle die Curve berühren und also die Berührungs-Linie und auch dies eine Element mit ihr gemein haben.

8. In Kreisen nun, welche eine Curve von aussen berühren, liegen alle übrigen Kreis-Elemente auf der andern Seite der Berührungs-Linie als wo die entsprechenden Curven-Elemente liegen.

Bei inneren Berührungs-Kreisen aber tritt, rücksichtlich der drei auf einander folgenden Elemente, eine fünffache Verschiedenheit ein.

a) Es können, wie **Fig. 2.** roh angedeutet ist, die beiden benachbarten Kreis-Elemente innerhalb der entsprechenden Curven-Elemente fallen.

b) Es können, wie **Fig. 3.**, die beiden benachbarten Kreis-Elemente ausserhalb der Curve fallen.

c) Es kann, wie **Fig. 4.**, das benachbarte Curven-Element, welches den kleineren Winkel mit dem mittelsten Element macht, mit seinem Kreis-Element zusammenfallen, dann wird im dritten Element die Curve zwischen den Kreis und die Berührungs-Linie fallen.

d) Es kann, wie **Fig. 5.**, dasjenige benachbarte Curven-Element, welches den grösseren Winkel macht, mit dem Kreis-Element zusammenfallen, dann wird im dritten Element der Kreis zwischen Curve und Berührungslinie fallen.

Zur Vergleichung dieser vier ersten Fälle denken wir uns den Halbmesser des betreffenden Kreises stetig wachsend. Dann geht zuerst der Fall *a*) in den Fall *c*) über. In beiden Fällen ist das dN des Kreises grösser als das dN der Curve, und zwar beträgt der Unterschied dieser beiden dN ein unendlich Kleines des zweiten Grades. — Von der andern Seite muss bei abnehmendem Halbmesser der Fall *b*) zuerst in den Fall *d*) übergehen, und ist in beiden Fällen das dN des Kreises um ein unendlich Kleines des zweiten Grades kleiner als das dN der Curve.

e) Zwischen den Fällen *c*) und *d*) sind nun die Fälle enthalten, bei welchen ein benachbartes Element innerhalb fällt, das andere ausserhalb. Unter diesen muss also auch einer begriffen sein,

bei welchem jener Unterschied der beiden dN gänzlich verschwindet. Dies lässt sich nämlich nur auf die einzige Weise erreichen, dass man die beiden benachbarten Kreis-Elemente unter gleichen Winkeln (unendlich kleinen des zweiten Grades) gegen die Curven-Elemente zu beiden Seiten geneigt denkt, wie Fig. 6. angedeutet ist. Weil nämlich der geometrische Ort des Kreismittelpunkts nach 7) gegeben ist, so kommt es nur noch darauf an, durch die beiden Endpunkte des Elements und den Durchschnittspunkt der beiden benachbarten Normalen der Curve einen Kreis gelegt zu denken, der den verlangten Mittelpunkt auf dem Perpendikel abschneidet.

9. Denjenigen berührenden Kreis nun, dessen dem gemeinschaftlichen ds entsprechendes dN mit dem dN der Curve völlig übereinstimmt (welcher also die Curve unter gleichen, im zweiten Grad unendlich kleinen Winkeln schneidet) nennen wir den Krümmungskreis und seinen Halbmesser ($=r$) den Krümmungshalbmesser der Curve an dem entsprechenden Punkt, wo wir uns im Vorigen das mittelste Element oder vielmehr dessen Mitte dachten. Damit haben wir also die Gleichung gewonnen

$$\text{n. 13.} \quad r = \frac{ds}{dN}.$$

Für die practische Anwendung dieser Gleichung ist es nun natürlich nicht mehr nöthig gerade, wie bisher zum Behuf der Ableitung geschah, s als unabhängige Veränderliche zu denken. Es genügt, wenn wir nur auf irgend eine Weise uns Kenntniss von dem Quotienten $\frac{ds}{dN}$ verschaffen.

§. 7.

Bei der Anwendung des Vorigen auf den elliptischen Erdmeridian ergiebt sich für den Krümmungshalbmesser $\frac{ds}{dN}$ zuerst vermittelst des sogenannten characteristischen Dreiecks die Gleichung

$$ds = -\frac{dx}{\sin N},$$

also

$$\frac{ds}{dN} = -\frac{dx}{\sin N dN}.$$

Der letzte Theil des letzten Ausdrucks findet sich hier aus der Differentiation von (12).

Aus

$$\cos N^2 = (1 - e^2 \sin N^2)x^2$$

kommt nämlich

$$-\cos N . \frac{\sin N dN}{dx} = (1 - e^2 \sin N^2)x - e^2 x^2 \cos N \frac{\sin N dN}{dx}.$$

Zusammengezogen und umgekehrt:

$$-\frac{dx}{\sin N dN} = \frac{\cos N(1 - e^2 x^2)}{x(1 - e^2 \sin N^2)}$$

oder durch Einführung von (10)

$$= \frac{x(1 - e^2)}{\cos N(1 - e^2 \sin N^2)},$$

das ist nach (13)

$$= \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin N^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und also endlich nach **n. I.**

$$\textbf{n. 14} \quad r = (1 - e^2)k^3.$$

Ist demnach die oben erwähnte Hülfstafel für k, oder vielmehr für $\log k$, einmal berechnet, so hat man auch zur Auffindung von r für jede beliebige Polhöhe nur noch geringe Bemühung.

Aus **n. 14** ergiebt sich nun auch mit Leichtigkeit, dass die extremen Werthe von r mit den extremen Werthen von k zusammenfallen. Aus **n. I** wird dann

das grösste r (für $N = 90°$) $= (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}$
das kleinste r (für $N = 0$) $= 1 - e^2$,

d. h. wenn man a und b selbst wieder einführt,

der Krümmungshalbmesser am Pol $= \frac{a^2}{b}$

„ „ „ Aequator $= \frac{b^2}{a}$,

wie auch sonst allgemein bekannt.

Die ebenen Schnitte des Erd-Sphäroids betreffend.

§. 8.

Wenn eine ganz beliebige Ebene durch das elliptische Rotations-Sphäroid gelegt wird, so muss es immer einen Meridian geben, dessen Ebene von ihr unter einem rechten Winkel getroffen wird.

Damit nun die schneidende Ebene als gegeben betrachtet werden dürfe, muss man **Fig. 7.** in jenem senkrechten Meridian den Punkt S kennen, in welchem sie ihn trifft, und überdies den Winkel w, unter welchem sie gegen den Aequator geneigt ist. Derselbe wird dann in der Ebene des senkrechten Meridians selbst gemessen.

Digitized by Google

Der Winkel w kann nun alle Werthe von 0 bis 180° annehmen, und nur in dem Fall, dass w die Polhöhe des Punkts S um 90° übertrifft, wird die schneidende Ebene in eine berührende, also der Schnitt in einen Punkt sich verwandeln. Bei der Entwickelung der nöthigen Formeln kann man also von einem w ausgehen, welches in den ersten Quadranten fällt und in demselben Sinn gezählt wird, wie die N der früheren Paragraphen.

1. Die Durchschnittslinie des Schnitts mit dem zum Grunde gelegten auf ihm senkrechten Meridian trifft nun seine beiden Axen, allgemein zu reden, in den Punkten Q und O. (Die beiden besondern Fälle, wo einer dieser Punkte ins Unendliche fällt, werden wir demnächst abgesondert betrachten.) Man hat also zuvörderst die beiden constanten Hülfsgrössen

$$SQ = p \text{ und } SO = q$$

zur Benutzung, die man aus den Coordinaten des Punkts S in seinem Meridian und dem gegebenen Winkel w nach Bedürfniss leicht berechnet.

2. Wählt man nun einen beliebigen Punkt L in der Curve, die der ebene Schnitt auf dem Sphäroid bestimmt, und fällt von ihm die beiden Perpendikel, LM auf den senkrechten Meridian, und LP auf den Aequator; so trifft auch LM auf SQ in M unter rechten Winkeln ein, man kann also die Linie

$$LM = v$$

als die eine Coordinate der zu untersuchenden ebenen Schnitt-Curve betrachten. Zur andern Coordinate wähle man dann den Abstand des Punkts M von S, und setze

$$SM = u,$$

so dass jetzt eine Gleichung zwischen u und v zu suchen ist.

3. Für den Punkt L findet sich nun auch ein Meridian bestimmt und in ihm seine Coordinaten

$$CP = x \text{ und } LP = y.$$

Legt man aber durch LP und LM eine Ebene, so entstehen rechtwinkliche Dreiecke, aus welchen sich sogleich ergiebt

$$(19) \quad y = (p - u) \sin w$$

$$(20) \quad x^2 = (q - u)^2 \cos w^2 + v^2.$$

Durch Substitution dieser Gleichungen in die Ellipsen-Gleichung (8) muss sich also die gesuchte Gleichung des Schnitts ergeben.

4. Statt der verlangten Substitution kann man aber kürzer zum Ziel kommen, wenn man die Gleichungen (19) und (20) differentiirt, dann in die Differential-Gleichung der Ellipse substituirt, und endlich integrirt.

So erhält man zuerst aus (19)

$$(21) \quad dy = - \sin w \,.\, du$$

$$(22) \quad xdx = -(q - u) \cos w^2 du + vdv.$$

Die Differentialgleichung der Ellipse aber kann nach §. 3. geschrieben werden

$$(23)\quad \frac{dy}{xdx} = -\frac{1-e^2}{y}.$$

Folglich hat man durch Division von (22) in (21) und Einführung von (19) zunächst

$$\frac{\sin wdu}{(q-u)\cos w^2du - vdv} = -\frac{1-e^2}{(p-u)\sin w},$$

also wenn man vdv absondert, nach u ordnet und zusammenzieht:

$$(24)\quad vdv = (p.\frac{\sin w^2}{1-e^2} + q\cos w^2)du - (\frac{1-e^2\cos w^2}{1-e^2})udu.$$

Diese Gleichung integrirt giebt

$$(25)\quad v^2 = 2(p\frac{\sin w^2}{1-e^2} + q\cos w^2)u - (\frac{1-e^2\cos w^2}{1-e^2})u^2,$$

wo keine Constante beizufügen ist, weil für $u=0$ auch $v=0$ wird.

Unsere Gleichung ist also von der Form

$$v^2 = Pu - Qu^2,$$

und somit bewiesen, dass jeder ebene Schnitt des Erdsphäroids eine Ellipse giebt, deren Scheitel der Punkt S und deren Abscissen-Axe die gerade Linie ist, welche die Schnitt-Ebene mit dem auf ihr senkrechten Meridian gemein hat.

§. 9.

Um nun die Beschaffenheit dieser Ellipse näher zu untersuchen, bezeichne man die halbe Abscissen-Axe mit A, ihre coordinirte mit B. Dann ist die Gleichung (25) zuerst auf die Gleichung der Ellipse aus dem Scheitel

$$v^2 = \frac{B^2}{A^2}.u.(2A-u)$$

zu bringen.

Demnach haben wir zu setzen

$$(26)\quad \frac{B^2}{A^2} = Q = \frac{1-e^2\cos w^2}{1-e^2},$$

$$(27)\quad A = \frac{P}{2Q} = \frac{p\sin w^2 + q(1-e^2)\cos w^2}{1-e^2\cos w^2}.$$

Aus (26) ergeben sich gleich schon einige wichtige Eigenschaften des Schnitts.

1. Das Verhältniss $\frac{B^2}{A^2}$ ist bloss von e^2 und w abhängig. Dem-

Digitized by Google

nach erhält man lauter einander ähnliche Ellipsen, wenn man lauter unter sich parallele Schnitte durch das Sphäroid führt.

2. Es giebt nur einen einzigen Fall, in welchem $\frac{B^2}{A^2} = 1$ wird, d. h. in welchem der elliptische Schnitt sich in einen Kreis verwandelt, den nämlich wenn $w = 0$ oder $= 180°$ wird, und dies ist einer von den beiden oben vorbehaltenen besondern Fällen, wo der Schnitt also in einen Parallel-Kreis übergeht.

3. Es ist (den letzterwähnten besondern Fall als Ausnahme bei Seite gesetzt) immer $B^2 > A^2$, d. h. man bekommt lauter sogenannte breite Ellipsen, deren Scheitel der kleinen Axe in den auf ihren Ebenen senkrechten Meridian fällt.

Man wird also, um die Analogie mit den gewöhnlichen Axen herzustellen, die Formeln (26) und (27) umschreiben müssen, indem man

$$A = \beta \text{ und } B = \alpha$$

setzt.

Dies giebt

$$(28) \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos w^2}$$

$$(29) \quad \beta = \frac{p \sin w^2 + q(1 - e^2) \cos w^2}{1 - e^2 \cos w^2}.$$

4. Bezeichnet man die Excentricität des elliptischen Schnitts, in abstracter Zahl ausgedrückt, mit ε, so wird

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

also nach (28)

$$(30) \quad \varepsilon^2 = e^2\left(\frac{\sin w^2}{1 - e^2 \cos w^2}\right),$$

woraus erhellt, dass für $w = 90°$, und nur für $w = 90°$, an jedem beliebigen Punkt des Sphäroids $\varepsilon^2 = e^2$ wird, d. h. dass nur diejenige auf den Meridian eines Orts senkrechte Ebene, welche zugleich mit der Rotations-Axe der Erde parallel ist (die Ebene des „sechsten Stundenkreises") eine dem Erdmeridian ähnliche Ellipse abschneidet. Das ist also der zweite der beiden oben vorbehaltenen besondern Fälle.

5. Weil $e^2 < 1$, so ist auch für $w <$ und $> 90°$

$$1 - e^2 \cos w^2 > \sin w^2, \text{ d. h. } \varepsilon^2 < e^2.$$

Alle auf den Meridian senkrechten Schnitte auf beiden Seiten des sechsten Stundenkreises geben also Ellipsen, welche runder sind, als der Erdmeridian.

Da aber $\frac{\varepsilon^2}{e^2}$ von dem Zeichen des $\cos w$ unabhängig ist, so erhellt, dass die Schnitte, welche auf beiden Seiten des sechsten Stundenkreises gleiche Winkel mit diesem machen, einander ähnlich sind.

Die Differentiation von (28) giebt endlich

$$d\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) = \frac{e^2 \sin 2w}{1-e^2} dw,$$

woraus hervorgeht, dass die Rundung für positive $\sin 2w$, d. h. vom Parallelkreis bis zum sechsten Stundenkreis stetig abnimmt, und dagegen auf der andern Seite dieses Stundenkreises wieder stetig wächst, bis der Parallelkreis wieder erreicht ist.

6. Den Uebergang von den Schnitten, die südlich von dem sechsten Stundenkreis liegen, bildet dabei immer der schon oben erwähnte Fall, wo für ein mit S zusammenfallendes L $w = N + 90°$ wird, demnach die schneidende Ebene sich in die berührende (den Horizont), die Ellipse also sich in einen Punkt verwandelt. In diesem Fall haben wir also auch das Flächen-Element um den Berührungspunkt als eine unendlich kleine Ellipse von ganz bestimmter Excentricität zu betrachten. Für $w = N + 90°$ wird nämlich

$$\varepsilon^2 = e^2\left(\frac{\cos N^2}{1-e^2 \sin N^2}\right) = e^2 k^2 \cos N^2,$$

wofür sich nach **n. 5** auch leicht eine geometrische Darstellung in der mit $a = 1$ zu beschreibenden Ellipse finden liesse.

Die Vertical-Schnitte des Erd-Sphäroids betreffend.

§. 10.

Unter den Schnitten des Sphäroids sind vorzugsweise die Vertical-Schnitte für den practischen Geometer wichtig, weil deren Ebenen gerade von seinem Theodolithen-Fernrohr beschrieben werden. Unter diesen Vertical-Schnitten aber kommt wieder zunächst derjenige zur Anwendung, welcher senkrecht auf dem Orts-Meridian steht (im „ersten Vertical" des Orts liegt), und also dem sogenannten Perpendikel auf den Meridian angehört.

Um die Ellipse für dieses Perpendikel auf den Meridian zu finden, brauchen wir nur **Fig. I.** den Winkel N an die Stelle des w unserer beiden vorigen Paragraphen zu setzen (indem wir auch hier das S der **Fig. 7.** mit L zusammenfallend denken). Demnach wird, da wir für jedes N auch das ihm zugehörige k besitzen, aus §. 8. und **n. 4.**

$$p = (1-e^2)k \text{ und } q = k,$$

und somit aus (29)

$$(31) \quad \beta = \frac{(1-e^2)k}{1-e^2 \cos N^2}.$$

Machen wir nun auch die Substitution in (28), so wird

$$(32) \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{1-e^2}{1-e^2 \cos N^2}.$$

Hieraus folgt nun mit Leichtigkeit der **Krümmungshalbmesser des Perpendikels auf den Meridian**, den wir mit n bezeichnen wollen. Weil nämlich unser Ort im Scheitel der **kleinen** Axe des betreffenden Schnittes liegt, so haben wir nach §. 7.

$$n = \frac{\alpha^2}{\beta}$$

zu setzen, d. h. wir brauchen nur (31) durch (32) zu dividiren, wodurch uns die Gleichung entspringt

n. 15 $n = k$.

Die §. 5. erwähnte Hülfstafel giebt also diesen Krümmungshalbmesser des Perpendikels **unmittelbar**, und wir können das Element **dieses** elliptischen Schnitts als das Element eines Kreises betrachten, welcher **Fig. 1.** O zum Mittelpunkt und die Conormale selbst zum Halbmesser hätte.

§. 11.

Der Krümmungshalbmesser für einen **Vertical-Schnitt in beliebigem Azimuth** findet sich nun aus r (dem Krümmungshalbmesser des Meridians) und n (dem des Perpendikels) auf folgende Weise.

Ein solcher Schnitt, dessen Azimuth mit i bezeichnet werden mag, muss bei gehöriger Erweiterung den auf ihm senkrechten Meridian AS **Fig. 8.** treffen. Die drei Ebenen, dieses senkrechten Meridians AS, des Schnitts LS und des Orts-Meridians AL, bilden nun bei O, wo sie in der Rotations-Axe zusammentreffen, eine dreikantige Ecke, in welcher LO die Conormale für den Ort L ist, AO ein Stück der Rotations-Axe vorstellt und SO gerade wie **Fig. 7.** in der Richtung der **kleinen** Axe der elliptischen Schnitt-Curve liegt. Da nun die Verticale LO auf dem Horizont von L, also auch auf dem Element des Bogens LS bei L senkrecht steht, so ist LO auch **Conormale für den Schnitt** und der Winkel SOL, den wir Kürze halber mit O bezeichnen wollen, bildet in der Ebene des Schnitts das Complement des Subnormalen-Winkels. Behalten wir also für den Schnitt die Buchstabenbezeichnung der §§. 8. und 9. bei, so haben wir für den Krümmungshalbmesser m des Schnitts am Ort L nach **n. 14** und **n. 1** zunächst die Gleichung

$$m = \frac{(1-\varepsilon^2)\alpha}{(1-\varepsilon^2 \cos O^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder durch Einführung von (28)

$$m = \frac{\alpha}{(1-\varepsilon^2 \cos O^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \cos w^2)} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon^2 \cos O^2}.$$

Drückt man hier in dem letzten Factor ε^2 durch (30) aus, und bemerkt, dass der erste Factor nichts weiter ist als die Conormale LO selbst, so erhält man zunächst

$$(33)\quad m = k(1-e^2)\cdot\frac{1}{1-e^2\cos w^2 - e^2\sin w^2\cos O^2}.$$

Um nun in diese Formel die Polhöhe N und das Azimuth i statt der Grössen w und O einzuführen, bemerkt man, dass die dreikantige Ecke bei O einem rechtwinklichen sphärischen Dreieck entspricht, dessen Hypotenuse $= 90° - N$ ist, und worin dem sphärischen Winkel i die Kathete O anliegt, die Kathete $(90° - w)$ aber gegenüber liegt. Demnach hat man nach bekannten Formeln der Trigonometrie (*Grundriss n.* 41. *und n.* 42.).

$$\sin w \cos O = \sin N$$

$$\cos w = \cos N . \sin i.$$

Dieses substituirt giebt zunächst

$$(34)\quad m = \frac{k(1-e^2)}{1-e^2\cos N^2\sin i^2 - e^2\sin N^2},$$

wofür man auch schreiben kann

$$(35)\quad m = \frac{k(1-e^2)}{1-e^2+e^2\cos N^2\cos i^2}.$$

Zum practischen Gebrauch scheint es mir, wie gesagt, am bequemsten, das m auf die obigen r und n zurückzuführen. Zu dem Ende dividire man die Gleichungen (34) und (35) in 1.

Dies giebt zunächst

$$\frac{1}{m} = \frac{1-e^2\sin N^2 - e^2\cos N^2\sin i^2}{k(1-e^2)}$$

und

$$\frac{1}{m} = \frac{1-e^2+e^2\cos N^2\cos i^2}{k(1-e^2)}.$$

Sondert man nun in diesen Brüchen das letzte Glied des Zählers jedesmal ab, und bemerkt die Bedeutung, welche die ersten Brüche dadurch nach **n. I**, **n. 14** und **n. 15** erhalten, so kommt

$$(36)\quad \frac{1}{m} = \frac{1}{r} - \frac{e^2\cos N^2\sin i^2}{k(1-e^2)},$$

$$(37)\quad \frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{e^2\cos N^2\cos i^2}{k(1-e^2)};$$

also endlich, wenn man (36) mit $\cos i^2$, (37) mit $\sin i^2$ multiplicirt und dann addirt:

$$\textbf{n. 16}\quad \frac{1}{m} = \frac{\cos i^2}{r} + \frac{\sin i^2}{n}$$

oder

$$\textbf{n. 17}\quad m = \frac{rn}{r\sin i^2 + n\cos i^2}.$$

Da nach **n. 14** und **n. 15**

$$\frac{r}{n} = (1 - e^2) k^2$$

und (mit Ausnahme des Falls, wo $N = 90°$, also die Verticalschnitte lauter Meridiane sind) nach **n. I** $k^2 < \frac{1}{1-e^2}$, so wird für jeden Verticalschnitt

$$\frac{r}{n} < 1,$$

folglich auch aus **n. 16**.

$$\frac{r}{m} < 1 \text{ und } \frac{n}{m} > 1,$$

d. h.

$$r < m \text{ und } n > m.$$

Demnach sind auch r und n die extremen Werthe aller Krümmungshalbmesser für den angenommenen Punkt des Sphäroids.

Bezeichnet man endlich einen beliebigen Halbmesser irgend einer Ellipse mit R und seinen Winkel gegen die kleine Axe mit i, so wird

$$R \cos i = y \text{ und } R \sin i = x,$$

folglich aus (1)

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\cos i^2}{b^2} + \frac{\sin i^2}{a^2},$$

welche Gleichung, mit (3) und **n. 16**. verglichen, den Lehrsatz beweist: Eine im Horizont eines Orts beschriebene Ellipse, welche den Horizontalschnitten des Erd-Sphäroids für denselben Ort ähnlich ist, hat durchweg Halbmesser, welche den Quadratwurzeln aus den Krümmungshalbmessern der entsprechenden Vertical-Schnitte proportional sind.

Den sphäroidischen Excess betreffend.

Die gemessenen Winkel eines geodätischen Dreiecks sind eigentlich Winkel zwischen Vertical-Schnitten des Sphäroids, bei denen die Durchschnittlinien der Ebenen, im Allgemeinen wenigstens, keine dreikantige Ecke bilden, indem diese drei Linien mit der Rotations-Axe in drei oder doch in zwei verschiedenen Punkten zusammenzutreffen pflegen. Den Excess dieser gemessenen Winkel über zwei Rechte pflegt man aber, weil er in der Regel nur wenige Secunden beträgt, zu berechnen, als ob das sphaeroidische Dreieck (welches ganz streng genommen gar nicht einmal zwischen lauter Verticalschnitten, sondern zwischen drei „geodätischen Li-

Digitized by Google

nien" liegt) ein sphärisches wäre. Will man jedoch bei dieser nur annähernd richtigen Voraussetzung nicht allzusehr wissentlich von der Wahrheit abweichen, so ist der Halbmesser (H) der Kugel, welche man dabei zum Grunde legen will, vor Allem erst gehörig festzusetzen. Dazu führen nun folgende, an das Obige sich unmittelbar anschliessende Betrachtungen.

1. Denkt man sich an einem Punkt des Sphäroids ausser der berührenden Ebene (dem Horizont) auch noch eine berührende Kugel, so muss deren Halbmesser mit der Verticale des Orts zusammenfallen. Ein unendlich kleiner Theil sowohl der sphäroidischen Fläche als der Kugelfläche um den Berührungspunkt, muss dann als in die Berührungsebene fallend angesehen werden können.

Solche Flächen-Elemente kann man aber construiren. Dazu errichte man zuvörderst in einer einstweilen beliebigen Tiefe (t) vom Berührungspunkt gegen die Rotations-Axe hin, eine der Berührungsebene parallele, also auf der Verticale senkrechte Ebene. Diese schneidet auf dem Sphäroid eine Ellipse mit der Excentricität $e^2 k^2 \cos A^2$ ab (siehe §. 9. 6)), deren Mittelpunkt in der Verticale liegt, und deren Grösse nur von t abhängt. Auf der Kugel aber wird ein Kreis abgeschnitten, dessen Grösse ausser von t auch noch von dem Halbmesser H derselben abhängt.

Denkt man sich nun eine durch den Mittelpunkt der Kugel gehende gerade Linie auf dem Umfang des letzterwähnten kleinen Kugelkreises herumgeführt, so beschreibt dieselbe auf dem Horizont die Grundfläche eines geraden kreisförmigen Kegels. Eben so erhält man einen geraden elliptischen Kegel mit derselben Spitze, wenn man die Linie auf dem Umfang des elliptischen Schnitts herumführt.

In beiden Fällen wird die aus der Kegelspitze so auf den Horizont projicirte ebene Figur zu ihrer Projection selbst in einem bestimmten Verhältniss stehen, nämlich rücksichtlich der linearen Dimensionen im Verhältniss $(H-t):H$ und rücksichtlich der Flächengrösse im Verhältniss $(H-t)^2:H^2$.

Lässt man endlich t so weit abnehmen, bis alle Durchmesser der betreffenden Schnitte unendlich klein werden, so sind dieselben im Sinn dieses §. 6. als Elemente der Bögen zu betrachten, welche auf den entsprechenden krummen Flächen dadurch erzeugt werden, dass man durch die Axe der obigen Kegel Ebenen legt. Zugleich aber müssen dann die Schnitte als mit ihren entsprechenden Projectionen auf den Horizont zusammenfallend gedacht werden, und sind also ihre Figuren als die gesuchten Flächen-Elemente zu betrachten. Die oben erwähnten geraden Kegel werden dann Körper-Elemente.

2. Weil nun eine Ellipse mit einem ihr concentrischen Kreise nicht congruent werden kann, so kann man auch nicht wie oben §. 6. auf Congruenz der Bogen-Elemente, wohl aber auf Gleichheit der Flächen-Elemente und also auch der Körper-Elemente die Bestimmung des noch festzusetzenden Kugelhalbmessers H gründen. Das heisst mit andern Worten: man wird das H, und also das Kreis-Element, welches mit dem elliptischen Element gleiches t hat, so bestimmen können, dass innerhalb und ausserhalb des letzteren zwei Paar Monde entstehen, welche gleichen Flächeninhalt haben, wie **Fig. 9.** roh angedeutet ist.

3. Betrachtet man nun zuerst den Kreis, welcher in einer

endlichen Tiefe t auf der Kugel entsteht, und bezeichnet seinen Halbmesser mit s, so ist bekanntlich **Fig. 10.**

$$(38) \quad s^2 = t(2H - t) = 2Ht - t^2.$$

Da nun aber

$$(39) \quad s = H \sin M$$
$$t = 2H \sin \tfrac{1}{2}M^2,$$

so gehört zu einem unendlich kleinen s ein t, welches im zweiten Grade unendlich klein ist, und muss also bei dieser Voraussetzung in (38) das letzte Glied t^2 gegen $2Ht$ verschwinden.

Demnach hat man für ein solches im zweiten Grade unendlich kleines t, welches mit τ bezeichnet werden möge, den entsprechenden Halbmesser des Kreis-Elements, welcher σ heissen mag, und als mit einem halben Bogen-Element auf der Kugel zusammenfallend gedacht wird, zu berechnen nach der Formel

$$(40) \quad \sigma\sigma = 2H\tau.$$

Man erhält demnach die Fläche des Kreis-Elements f durch die Formel

$$(41) \quad f = \pi\sigma\sigma = 2\pi . H . \tau.$$

Hieraus kann man auch schon gelegentlich überschlagen, in wie weit für ein vorliegendes Bedürfniss des practischen Lebens unsere Annäherung sich der Wirklichkeit anschliesst. Denn auf einer Kugel von nur 800 preussischen Meilen Halbmesser würde für einen Schacht von 1500 preussischen Fuss (etwa halb so tief als der Inselsberg hoch ist) das f schon über 300 Quadratmeilen betragen. Es umschlösse ein solches Kreis-Element ein gleichseitiges Dreieck von ungefähr 17 Meilen Seite und 40″ Excess.

4. Die Betrachtung des elliptischen Elements muss nun davon ausgehen, dass für dasselbe τ die σ verschiedener Länge sind, wenn wir sie als geradlinig betrachten, und zugleich als mit verschiedenen Krümmungshalbmessern beschrieben, wenn wir sie als Bögen des Sphäroids betrachten.

Bezeichnen wir also das mit dem Meridian zusammenfallende σ (die halbe kleine Axe unsers Elements) mit σ', das in das Perpendikel auf den Meridian fallende (die halbe grosse Axe) mit σ'', so haben wir durch dieselben Schlüsse, die uns zu (40) führten,

$$(42) \quad \sigma'\sigma' = 2r\tau$$
$$\sigma''\sigma'' = 2n\tau.$$

Jedes andere σ des elliptischen Elements würde mit seinem eigenen m zu berechnen sein, nach **n. 16** und dem dabei angeführten Lehrsatz.

Für die Fläche des elliptischen Elements, die mit f' bezeichnet werden mag, ergiebt sich also nach dem bekannten Satz über die Quadratur der Ellipse

$$(43) \quad f' = \pi\sigma'\sigma'' = 2\pi . \sqrt{rn} . \tau.$$

5. Setzen wir endlich, unserer Annahme gemäss, die beiden Elemente einander gleich, so entspringt die Gleichung

$$\text{n. 18} \quad H = \sqrt{rn},$$

d. h. der Lehrsatz: Das geometrische Mittel aus den beiden extremen Krümmungshalbmessern ist zum Kugelhalbmesser zu nehmen, wenn man den sphäroidischen Excess als einen sphärischen zu berechnen sich erlauben will.

Dieses geometrische Mittel ist übrigens nach **n. 14** und **n. 15** vermöge der Proportion

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}} : (1-e^2)k = k : \sqrt{rn}$$

auch als die vierte Proportionale zu der halben kleinen Axe, der Normale und der Conormale zu betrachten, und somit in der Ebene des Meridians leicht zu construiren.

6. Es bleibt nur noch übrig, den Punkt des sphäroidischen Dreiecks zu bestimmen, für welchen die r und n gelten (aus den Tafeln genommen werden) sollen, die wir nach dem Vorhergehenden für Berechnung des Excesses gebrauchen.

Dazu wählte ich denjenigen Punkt, dessen Polhöhe das arithmetische Mittel aus den Polhöhen der Winkelpunkte ist. Denn denke ich mir das Dreieck als eben, und die betreffenden Meridianbögen der beiden nördlicheren Punkte als geradlinige Perpendikel auf den gleichfalls als geradlinig gedachten Parallelkreis durch den südlichsten Punkt, so erhalte ich auf diese Weise mit grösster Bequemlichkeit den Schwerpunkt des ebenen Dreiecks, welcher die bekannte Eigenschaft hat, dass jede durch ihn und einen Winkelpunkt gezogene gerade Linie das Dreieck in Hälften von gleichem Flächeninhalt theilt.

III.

Verschiedene mathematische Bemerkungen.

Von dem

Herrn Professor C. T. Anger

zu Danzig.

---

1. Die Gaussischen Gleichungen für ebene Dreiecke.

Die Gaussischen Gleichungen:

I. $\sin\frac{1}{2}(b-c).\cos\frac{1}{2}A = \sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}(B-C)$

II. $\sin\frac{1}{2}(b+c).\sin\frac{1}{2}A = \sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}(B-C)$

III. $\cos\frac{1}{2}(b-c).\cos\frac{1}{2}A = \cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}(B+C)$

IV. $\cos\frac{1}{2}(b+c).\sin\frac{1}{2}A = \cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}(B+C)$

bieten die Frage dar, was aus ihnen werde, wenn die Seiten des sphärischen Dreiecks unendlich klein angenommen werden, d. h. wenn sich das sphärische Dreieck in ein ebenes verwandelt, dessen Seiten a, b, c und dessen Winkel A, B, C sind. Man ersieht leicht, dass sich dadurch die folgenden ergeben:

1. $(b-c).\cos\frac{1}{2}A = a\sin\frac{1}{2}(B-C)$
2. $(b+c).\sin\frac{1}{2}A = a\cos\frac{1}{2}(B-C)$
3. $\cos\frac{1}{2}A = \sin\frac{1}{2}(B+C)$
4. $\sin\frac{1}{2}A = \cos\frac{1}{2}(B+C)$.

Die Gleichungen 3. und 4. geben nichts Neues, sondern sprechen nur den Satz aus, dass in einem ebenen Dreiecke die Summe der drei Winkel zweien Rechten gleich ist. Die Gleichungen 1. und 2. dagegen geben jene eleganten Formeln der Trigonometrie, welche früher in den Lehrbüchern vermisst wurden, gegenwärtig aber, nachdem Mollweide und später Gerling ihrer erwähnt haben, bekannter geworden sind. Mollweide stellt in einem Aufsatze in v. Zach's monatlicher Correspondenz vom Jahre 1808. S. 396. die beiden Proportionen auf

$$b+c : a = \cos\tfrac{1}{2}(B-C) : \sin\tfrac{1}{2}A$$
$$b-c : a = \sin\tfrac{1}{2}(B-C) : \cos\tfrac{1}{2}A,$$

welche resp. mit den Gleichungen 2. und 1. identisch sind, und bemerkt dabei, dass man diese eleganten Sätze, welche in einem

vollständigen System der Trigonometrie nicht fehlen sollten, sehr leicht aus Betrachtung der Figur erweise. Ungefähr 16 Jahre später giebt Gerling in Schumacher's Astronomischen Nachrichten No. 62. dieselben Formeln mit folgender Bemerkung: „So nützlich ich diese Formeln, welche ich vor einigen Jahren zufällig fand, für die Ausführung halte, so unwahrscheinlich ist mir doch, dass sie neu sein sollten, weil ihre Ableitung aus der Gleichung $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ gar zu nahe liegt. Ich habe sie aber bis jetzt in keinem Lehrbuche aufgefunden".

Aus der obigen Ableitung ersieht man, dass diese Formeln für die ebene Trigonometrie nichts Anderes sind, als die Gaussischen für die sphärische. Durch solche Betrachtungen, welche ich beim Unterrichte nicht gerne unterlasse, tritt dem Schüler der innere Organismus der Wissenschaft oft deutlich vor Augen. Diese Gleichungen ergeben auch, wenn man auf beiden Seiten aufs Quadrat erhebt und dann addirt, ohne geometrische Betrachtung, sogleich die Erweiterung des pythagorischen Satzes.

II. Ueber die allgemeine Ableitung der Grundformel der sphärischen Trigonometrie.

Es ist bekanntlich von Wichtigkeit die Grundformel der sphärischen Trigonometrie in ihrer Allgemeinheit abzuleiten, d. h. so, dass die Richtigkeit derselben für alle sphärische Dreiecke, die Seiten mögen über 90° oder über 180° u. s. w. gehen, erwiesen werde. Dieses geschieht nun auch, indem man für die verschiedenen Fälle besondere Figuren entwirft, und für jede einzelne den Beweis führt. Da es aber wünschenswerth erscheint, sich nur einer Figur bedienen zu dürfen, so stellte ich mir vor etwa 20 Jahren die Aufgabe: „die Grundformel der sphärischen Trigonometrie so abzuleiten, dass eine Figur dabei ausreiche, und ein ferneres Zurückgehen zu geometrischen Betrachtungen nicht nöthig sei." Die Ableitung, welche ich fand, habe ich damals einigen Freunden mitgetheilt, auch mich derselben beim Unterrichte in der hiesigen Navigationsschule vor Zeiten mit Vortheil bedient, denn dort kam es besonders darauf an, Kürze mit mathematischer Allgemeinheit zu verbinden. Da sie mir, bis jetzt wenigstens, noch in keinem Lehrbuche vorgekommen ist, so erlaube ich mir, diese Kleinigkeit der öffentlichen Beurtheilung zu übergeben.

Bezeichnet man die Seiten eines sphärischen Dreiecks durch a, b, c, die Winkel und die Eckpunkte desselben durch A, B, C; denkt man sich von einem beliebigen Eckpunkte, etwa von A, einen Radius der Kugel gezogen, legt durch den Mittelpunkt derselben eine Ebene auf diesen Radius perpendiculär, und fällt von den Punkten B und C auf diese Ebene Lothe, so entsteht, wenn man die Fusspunkte derselben durch B' und C' bezeichnet, in jener Ebene, welche zugleich die des Papiers sein mag, durch Verbindung des Mittelpunktes M mit B' und C' ein ebenes Dreieck $MB'C'$ (Taf. I. Fig. 3.), durch dessen Betrachtung sich Alles ergiebt. Es ist nämlich offenbar der Winkel $B'MC'$ gleich dem sphärischen Winkel A, die

Seite $MC' = \sin b$, die Seite $MB' = \sin c$, und man hat $(B'C')^2 = (2\sin\frac{1}{2}a)^2 - (\cos b - \cos c)^2$, also nach der Erweiterung des pythagorischen Satzes die Gleichung:

$$(2\sin\tfrac{1}{2}a)^2 - (\cos b - \cos c)^2 = \sin^2 b + \sin^2 c - 2\sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A,$$

deren Entwickelung sogleich

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \sin c \,.\, \cos A$$

ergiebt.

Die Kraft dieses Beweises liegt in dem Umstande, dass die Geraden MB' und MC' immer ihre Bedeutung behalten, die Seiten des sphärischen Dreiecks mögen so gross sein, als man wolle, denn die Punkte B' und C' sind durch Projection der Eckpunkte B und C entstanden. Dasselbe gilt in Bezug auf den Ausdruck für $(B'C')^2$.

III. Zur Theorie des Kater-Bohnenbergerschen Reversionspendels.

Die elegante Eigenschaft des Pendels mit reciproken Axen kann auf folgende Weise sehr einfach bewiesen werden.

Eine gerade unbiegsame um einen festen Punkt bewegliche Stange, deren Schwere vorläufig $= 0$ gesetzt werden kann, sei an ihren Enden mit zwei Gewichten m und m' beschwert, deren Entfernungen vom Aufhängungspunkt resp. $-r$ und r' sein mögen, dann ist die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem gegebenen gleichzeitig schwingt,

$$l = \frac{m'r'^2 + mr^2}{m'r' - mr}.$$

Nimmt man unterhalb jenes Aufhängungspunktes einen andern Punkt als solchen an, und lässt das Pendel, nachdem es umgekehrt worden, um diesen schwingen, so ist, wenn nun die Entfernungen desselben von den Gewichten resp. durch $-\varrho'$ und ϱ bezeichnet werden, die Länge des mit dem gegebenen gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels

$$L = \frac{m'\varrho'^2 + m\varrho^2}{-m'\varrho' + m\varrho}.$$

Soll das Pendel um beide Aufhängungspunkte in gleichen Zeiten schwingen, so muss

$$l = L$$

sein. Man hat aber offenbar

$$r + r' = \varrho + \varrho' = a,$$

wo a die Länge der ganzen Stange bedeutet; und wenn man die Entfernung der beiden Aufhängungspunkte von einander durch b bezeichnet,

$$a = b + r + \varrho',$$

also

$$\varrho = b + r,\ \varrho' = r' - b.$$

Die Gleichung

$$l = L$$

giebt nun

$$\frac{m'r'^2 + mr^2}{m'r' - mr} = \frac{m'(r'-b)^2 + m(r+b)^2}{-m'(r'-b) + m(r+b)}$$

$$= \frac{m'r'^2 + mr^2 - 2(m'r' - mr)b + (m+m')b^2}{-m'r' + mr + (m+m')b},$$

aus welcher für b die quadratische Gleichung:

$$0 = \frac{2(m'r'^2 + mr^2)}{m+m'} - \left\{\frac{2(m'r' - mr)}{m+m'} + \frac{m'r'^2 + mr^2}{m'r' - mr}\right\} b + b^2$$

hervorgeht. Die Wurzeln finden sich sogleich durch blosse Ansicht der Coefficienten, man erhält nämlich für b die beiden Werthe

$$\frac{m'r'^2 + mr^2}{m'r' - mr} \text{ und } \frac{2(m'r' - mr)}{m+m'}$$

von denen hier nur der erste in Betracht kommt. Man ersieht hieraus, dass $b = l = L$ wird, d. h. wenn das Pendel in beiden Lagen gleichzeitig schwingt, so ist die Entfernung der beiden Aufhängungspunkte von einander gleich der Länge eines einfachen Pendels, welches mit dem gegebenen gleichzeitig schwingt. Die Bedeutung der andern Wurzel liegt am Tage.

IV.

Neuer Beweis der Formeln für die figurirten Zahlen, nebst kritischen Bemerkungen über die bisherigen Beweise.

Von

Herrn Dr. F. Stegmann,

Lehrer an der Realschule und Privatdocenten an der Universität zu Marburg.

Unter figurirten Zahlen werden hier diejenigen arithmetischen Progressionen verstanden, welche durch successives Summiren aus der Grundreihe 1, 1, 1, 1, ..., entstehen und nicht diejenigen, welche aus der allgemeineren Grundreihe 1, *d*, *d*, *d*.... abgeleitet werden können. Demgemäss ist die figurirte Zahlenreihe erster Ordnung einerlei mit der Zahlenreihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots.$$

die figurirte Zahlenreihe zweiter Ordnung ist

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots.$$

die figurirte Zahlenreihe dritter Ordnung ist

$$1, 4, 10, 20, 35, \ldots.$$

u. s. f.

Bei der Beschäftigung mit diesen Reihen bieten sich zunächst die zwei bekannten Aufgaben dar, mit welchen für den öffentlichen Unterricht in der Regel wohl der ganze Inhalt dieser Lehre zugleich abgeschlossen sein mag, nämlich erstens die Aufgabe, von jeder figurirten Zahlenreihe einer beliebigen ($k$ten) Ordnung das allgemeine ($n$te) Glied, und zweitens die Summenformel für die n ersten Glieder anzugeben. Da aber wegen der Entstehungsart der auf einander folgenden Zahlenreihen die Summe der n ersten Glieder der $k$ten Reihe identisch ist mit dem $n$ten Gliede der $(k+1)$ten Reihe, so erhält das zweite Problem natürlich seine Erledigung zugleich mit dem ersten. Nun findet man zwar in allen Lehrbüchern der allgemeinen Arithmetik, welche über die ersten Anfangsgründe hinausgehen, den Satz ausgesprochen, dass allgemein das $n$te Glied der $k$ten Reihe gleich

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}$$

oder, nach einer vielgebrauchten Bezeichnung der Binomialcoefficienten, gleich $\binom{n+k-1}{k}$ sei. Für den Beweis dieses Satzes hat man aber bisher, wie es scheint, nur zwei Wege angegeben, von denen unserem Bedünken nach weder der eine noch der andere den Anforderungen des öffentlichen Unterrichts so vollkommen, wie es gewünscht werden muss, zu entsprechen vermag.

Die eine dieser beiden Beweisführungen stützt sich nämlich auf eine bekannte Formel, welche für das allgemeine Glied einer jeden arithmetischen Progression $k$ter Ordnung Gültigkeit hat:

$$(1)\quad u_n = u_1 + \binom{n-1}{1}\Delta u_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 u_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 u_1 + \ldots + \binom{n-1}{k}\Delta^k u_1,$$

wobei u_1 das Anfangsglied und Δu_1, $\Delta^2 u_1$, $\Delta^3 u_1$, ... die ersten Glieder der auf einander folgenden ersten, zweiten u. s. f. Differenzreihen bedeuten. Indem man nun diese Formel auf die figurirten Zahlen zweiter Ordnung anwendet, erhält man

$$u_1 = 1,\ \Delta u_1 = 2,\ \Delta^2 u_1 = 1,$$

also

$$u_n = 1 + \binom{n-1}{1}.2 + \binom{n-1}{2}$$

und nach einigen Reductionen wird man die dreitheilige Summe rechter Hand allerdings auf den Ausdruck $\frac{n(n+1)}{1.2} = \binom{n+1}{2}$ bringen, wie es sein soll.

Indem man alsdann die Formel (1) auf die figurirten Zahlen dritter Ordnung anwendet, erhält man

$$u_1 = 1,\ \Delta u_1 = 3,\ \Delta^2 u_1 = 3,\ \Delta^3 u_1 = 1,$$

also

$$u_n = 1 + \binom{n-1}{1}.3 + \binom{n-1}{2}.3 + \binom{n-1}{3}$$

und nach einigen Reductionen wird man auch hier die viertheilige Summe rechter Hand auf die Form $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = \binom{n+2}{3}$ gebracht haben, wie es sein soll.

Und auf gleiche Weise kann man allerdings auch für das allgemeine Glied der figurirten Zahlenreihe vierter, fünfter, u.s.w. Ordnung die betreffenden Ausdrücke aus der allgemeinen Gleichung (1) herleiten. Allein abgesehen davon, dass diejenigen Reductionen, welche erforderlich sind, um den für u_n erhaltenen Ausdruck aus seiner ursprünglichen Form auf die gewünschte Form überzuführen, bei jedem neuen Fortschritt zu einer höheren Ordnung immer verwickelter ausfallen; so kann doch offenbar, wenn man auch bei dem Unterrichte die Mühe nicht scheuen wollte, diese weitläuftigen und regellosen Reductionen sogar bis zur vierten oder fünften Ord-

nung fortzuführen, hierdurch allein die Hauptsache, worauf es ankommt, nämlich dass die gedachte Transformation für jede beliebige Ordnung möglich sei, keineswegs zur Evidenz gebracht werden. Gleichwohl scheint durch eine solche Induction öfters die Sache erledigt worden zu sein, man vergleiche z. B. das in vieler Hinsicht sehr schätzbare Compendium der höheren Mathematik von Burg. §. 237.

Die andere Beweisart stellt geradezu für das $n$te Glied der $k$ten Ordnung die Formel

$$(2) \quad u_n = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}$$

als ein Theorem auf, entweder ohne alle Bevorwortung, wie z. B. in Ohm's System d. Math. 2r Theil. S. 26., oder wie z. B. in dem mit Recht gerühmten Lehrbuch der Allgem. Arithm. von J. H. T. Müller (Halle 1838) S. 426. geschieht, als ein Resultat, welches „man erwarten könnte", nachdem man für die beiden ersten Ordnungen die Ausdrücke n und $\frac{1}{2}n(n+1)$ unmittelbar und ohne alle Mühe gefunden hat, und zeigt alsdann, dass diese allgemeine Formel (2), wenn sie für die $k$te Ordnung gilt, auch für die $(k+1)$te ihre Richtigkeit behalte. So wenig nun aber gegen eine solche Beweisführung von Seiten einer strengen Theorie Einwendungen gemacht werden können, so wenig möchte sie doch in didaktischer Hinsicht den gerechtesten Anforderungen Genüge leisten. Denn die belebende Kraft des Unterrichts in der Analysis besteht gerade darin, dass er nicht gezwungen ist, die auf einander folgenden Lehrsätze als isolirt stehende Wahrheiten zu demonstriren, welche durch den glücklichen Einfall dieses oder jenes Mathematikers entdeckt worden, sondern dass er vermag, jedes Resultat vor den Augen der Lernenden gleichsam von Neuem zu entdecken, dass er diese in den Stand setzt, den Ursprung jedes spätern Satzes als Ausfluss bereits erkannter Wahrheiten klar anzuschauen und ihre Neigung, wie ihre Fähigkeit, im eintretenden Fall selbstständig eine gesuchte Formel direkt zu entwickeln, stufenweise steigert. Was den Gymnasialunterricht insbesondere anbelangt, so kann es zwar durchaus nicht meine Absicht hier sein, mich über die Frage zu verbreiten, ob es überhaupt nöthig oder überflüssig, nützlich oder unrathsam sei, die Formeln über die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die figurirten Zahlen noch in den Cursus der obersten Klasse aufzunehmen, oder ob diese Lehre definitiv dem höheren Unterrichte vorbehalten werden müsse. Auch muss ich mich gegen den Schein verwahren, wenn ich gegen die bisher gelieferten Beweise dieser Formeln, wie sie in verschiedenen, zum Theil auch für den Gymnasialunterricht bestimmten Lehrbüchern aufgenommen sind, hier einige Ausstellungen mache, dass ich dadurch der Didaktik der Herren Verfasser zu nahe träte, weil ja natürlich durch den mündlichen Unterricht leicht ausgeglichen werden wird, wo das Lehrbuch vielleicht absichtlich eine Lücke gelassen haben sollte. Allein wenn alle Sachverständigen heutiges Tages darüber einverstanden sind, dass an Gymnasien die Mathematik vorzüglich wegen ihres formalen Nutzens gelehrt werden müsse, damit sich eine gewisse Seite der Geistesanlagen der heranzubildenden Jugend gehörig entfalten könne, so wird man auch

Digitized by Google

gern von dem arithmetischen Unterricht alles fern zu halten suchen, was dem Geist einer ungezwungenen und dem jugendlichen Sinn zugänglichen heuristischen Analysis, was einer Methode nicht zusagt, welche sich zum Grundsatz macht, von bekannten Thatsachen in jedem einzelnen Falle auszugehen und auf natürlichem und leicht findbarem Wege, ohne gewaltsame Sprünge, das weitere Ziel zu erreichen. Und dass es einer solchen Methode schnurstracks zuwider läuft, wenn man, wie z. B. in dem Anhang des Ohm'schen Lehrbuchs für den Elementarunterricht (2te Aufl. §. 4. fgg.) mehrmals geschieht, irgend eine Formel, welche erst das Resultat einer Entwickelung sein sollte, geradezu aufstellt, ihre Richtigkeit für $n = 1$ oder $n = 2$ „probirt und dann darthut, dass sie immer für jede um Eins grössere Zahl $n = h + 1$ gelte, wenn sie für $n = h$ zutrifft", dies scheint nicht wohl in Abrede gestellt werden zu können.

Anders würde sich die Sache freilich verhalten, wenn man den Schüler zu der Formel (2) zuvörderst durch eine einfache Induction hinzuführen im Stande wäre, so dass die Worte „es lässt sich erwarten, dass das inducirte Gesetz allgemein gelte" für jeden sich als wahr erwiesen, und wenn man alsdann erst die so fruchtbare Schlussfolge von n auf $(n + 1)$ und von k auf $(k + 1)$ anwendete. Wollte man aber zum Zwecke einer solchen Induction die vorher bezeichnete erste Beweisführung mit der zweiten combiniren, so würde der ganze Beweis eine Weitläuftigkeit annehmen und bei dem Unterricht eine Zeit erfordern, wie sie gar nicht mit der Wichtigkeit des Gegenstandes im Verhältniss stehen möchte. Es wird daher wohl nicht unnütz sein, auf einen andern und directen Beweis der gedachten Formel (2) aufmerksam zu machen, welcher sich, wie ich glaube, durch Einfachheit und Kürze besonders empfiehlt, von welchem ich aber, obwohl er sich fast von selbst darzubieten scheint, nirgends eine Spur aufzufinden vermochte.

Ich gründe diesen Beweis unmittelbar auf die Eigenschaften der Binomialcoefficienten. Zwar weiss ich wohl, dass man neuerdings in den Lehrbüchern öfters den binomischen Lehrsatz erst ganz spät nach der Lehre von den Progressionen und den arithmetischen Reihen höherer Ordnung seine Stelle angewiesen hat; da aber dieser Satz so überaus wichtig ist und überdies eine gleich Anfangs in der Potenzlehre offen gelassene Lücke ausfüllt, so hege ich nach wie vor die Ueberzeugung, dass es am zweckmässigsten sei, gleich nach der Lehre von den Potenzen und Logarithmen die Combinationen, dann den binomischen Lehrsatz für ganze Exponenten, und hierauf erst die Reihen folgen zu lassen. Es möge mir daher erlaubt sein, unter der Voraussetzung, dass der Exponent der Potenz $(a + b)^p$ eine positive ganze Zahl sei, bei dem folgenden Beweise von zwei bekannten Eigenschaften der Binomialcoefficienten auszugehen, erstens dass

$$\binom{p}{0} + \binom{p}{1} = 1 + p = \binom{p+1}{1}$$

$$\binom{p}{1} + \binom{p}{2} = \binom{p+1}{2}$$

$$\binom{p}{2} + \binom{p}{3} = \binom{p+1}{3} \text{ u. s. f.}$$

allgemein

$$(3) \ldots . \binom{p}{n-1} + \binom{p}{n} = \binom{p+1}{n}$$

und zweitens dass

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{p}$$
$$\binom{p}{1} = \binom{p}{p-1}$$
$$\binom{p}{2} = \binom{p}{p-2}$$

u. s. f.

allgemein

$$(4) \ldots . \binom{p}{r} = \binom{p}{p-r}$$

ist.

---

§. 1.

Die auf einander folgenden Reihen figurirter Zahlen sind

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	...
$\overset{0}{u}$	1	1	1	1	1	1	1	...
$\overset{1}{u}$	1	2	3	4	5	6	7	...
$\overset{2}{u}$	1	3	6	10	15	21	28	...
$\overset{3}{u}$	1	4	10	20	35	56	84	...
$\overset{4}{u}$	1	5	15	35	70	126	210	...
.	.	.	.	.	.	.	.	...

Um ein beliebiges $n$tes Glied aus einer dieser Reihen zu bezeichnen, wollen wir uns der Symbole $\overset{0}{u}_n$, $\overset{1}{u}_n$, $\overset{2}{u}_n$ u. s. f. bedienen, so dass z. B. die in der vierten Horizontalreihe befindliche Zahl 84 durch $\overset{3}{u}_7$ vorgestellt sein soll.

Ferner wollen wir die Summe der n ersten Glieder einer dieser Reihen, nämlich

$$\overset{k}{u}_1 + \overset{k}{u}_2 + \overset{k}{u}_3 + \overset{k}{u}_4 + \ldots . + \overset{k}{u}_{n-1} + \overset{k}{u}_n$$

durch $\overset{k}{S}_n$ andeuten.

Die Bildungsweise der figurirten Zahlen wird alsdann erstens durch folgende Gleichung

$$(A) \ldots . \overset{k+1}{u}_n = \overset{k}{S}_n \text{ oder } \overset{k}{u}_n = \overset{k-1}{S}_n$$

unzweideutig charakterisirt.

Digitized by Google

Bequemer ist jedoch für die successive Berechnung jedes folgenden Gliedes $\overset{k+1}{u}_n$ aus dem vorhergehenden $\overset{k+1}{u}_{n-1}$ die Formel

$$(B) \ldots\ldots \overset{k+1}{u}_n = \overset{k+1}{u}_{n-1} + \overset{k}{u}_n$$

welche unmittelbar aus (A) folgt, weil $\overset{k}{S}_n = \overset{k}{S}_{n-1} + \overset{k}{u}_n = \overset{k+1}{u}_{n-1} + \overset{k}{u}_n$ ist. So ist z. B. $\overset{4}{u}_6 = 126$ entstanden durch Addition von $\overset{4}{u}_5 = 70$ und $\overset{3}{u}_6 = 56$.

§. 2.

Man bemerke nun, wenn man in der quadratförmigen Zusammenstellung dieser figurirten Zahlen, so wie es in der folgenden Figur geschehen ist, von links nach rechts aufsteigende Diagonallinien zieht,

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3	1	4	10	20	35	56
4	1	5	15	35	70	126
5	1					

dass alsdann

durch die erste Diagonale verbunden werden 1 und 1
- - zweite - - - 1, 2, 1
- - dritte - - - 1, 3, 3, 1

u. s. f.,

also der Reihe nach die Binomialcoefficienten zur ersten, zweiten, dritten u. s. f. Potenz. Dass dieses Gesetz, wenn es für eine beliebige dieser aufsteigenden Reihen z. B. die $p$te stattfindet, auch für die folgende $(p+1)$te Richtigkeit behalten müsse, ist leicht einzusehen. Denn erstens fängt diese folgende Reihe offenbar ebenfalls mit 1 an, zählt ein Glied mehr als die vorhergehende und endigt wieder mit 1. Und ausserdem ist vermöge der Entstehung der figurirten Zahlen (Gleichung B) das zweite Glied dieser folgenden Diagonalreihe gleich der Summe des ersten und zweiten Gliedes der vorhergehenden, ihr drittes Glied gleich der Summe des zweiten und dritten Gliedes der vorhergehenden u. s. f., es sind also die Glieder dieser $(p+1)$ten Diagonalreihe ganz ebenso aus denen der $p$ten Reihe abzuleiten, wie den Formeln (3) zu Folge die Binomialcoefficienten zur $(p+1)$ten Potenz aus denen zur $p$ten Potenz entstehen.

Wenn wir daher, um ein beliebiges Glied einer dieser schräg aufsteigenden Diagonalreihen zu bezeichnen, den Träger z anstatt u wählen, im Uebrigen aber die Bezeichnung der früher gewählten gleich lassen, so dass z. B. die Reihe

$$\overset{4}{z}_1 \quad \overset{4}{z}_2 \quad \overset{4}{z}_3 \quad \overset{4}{z}_4 \quad \overset{4}{z}_5$$

einerlei sein soll mit der von links nach rechts aufsteigenden Diagonalreihe

1 4 6 4 1

nämlich

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

so sind wir im Stande, das vorher nachgewiesene Gesetz durch die Gleichung auszusprechen

$$(C.\alpha) \ldots . \overset{p}{z}_n = \binom{p}{n-1},$$

wobei p und $n \leqq (p+1)$ zwei positive ganze Zahlen andeuten sollen, oder auch vermöge der Gleichung (4) durch

$$(C.\beta) \ldots . \overset{p}{z}_n = \binom{p}{p-n+1}.$$

Nun ersieht man aber aus dem vorher aufgestellten Schema der figurirten Zahlen sogleich, dass

$\overset{p}{z}_1 =$ dem ersten Gliede der $p$ten Horizontalreihe $= \overset{p}{u}_1$.

$\overset{p}{z}_2 =$ - zweiten - - $(p-1)$ten - $= \overset{p-1}{u}_2$

$\overset{p}{z}_3 =$ - dritten - - $(p-2)$ten - $= \overset{p-2}{u}_3$

u. s. f.

nämlich allgemein

$$\overset{p}{z}_n = \overset{p-n+1}{u}_n.$$

Setzt man daher $p - n + 1 = k$, also $p = k + n - 1$, so wird

$$\overset{k}{u}_n = \overset{k+n-1}{z}_n$$

oder, indem man jetzt eine der Gleichungen (C) zu Hülfe ruft, entweder

$$(D.\alpha) \ldots . \overset{k}{u}_n = \binom{k+n-1}{n-1}$$

oder

$$(D.\beta) \ldots . \overset{k}{u}_n = \binom{k+n-1}{k}.$$

Diese letztere ist die verlangte Formel. Setzt man darin der Reihe nach $k = 0, 1, 2, 3 \ldots .$, so ergiebt sich

für die Reihe	das allgemeine Glied
1, 1, 1, 1, 1, ...	$\binom{n-1}{0}=1$
1, 2, 3, 4, 5, ...	$\binom{n}{1}=n$
1, 3, 6, 10, 15, ...	$\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{1.2}$
1, 4, 10, 20, 35, ...	$\binom{n+2}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$

u. s. f.

§. 3.

Um aber eine beliebige $k$te Reihe in ihrer völligen Allgemeinheit, nämlich die ersten Glieder derselben als Functionen von k, so dass ein gewisses Bildungsgesetz möglichst klar erkannt werde, und ihr allgemeines Glied als eine nach eben diesem Gesetz gebildete Function von k und n herzustellen, möchte es am einfachsten sein, anstatt der Formel (D. β) sich der anderen (D. α)

$$\overset{k}{u}_n=\binom{k+n-1}{n-1}$$

zu bedienen. Denn alsdann erhält man sofort, indem man successiv $n=1, 2, 3, \ldots$ setzt,

$$\overset{k}{u}_1=\binom{k}{0}=1,\ \overset{k}{u}_2=\binom{k+1}{1},\ \overset{k}{u}_3=\binom{k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{1.2},$$

u. s. f.

$$\overset{k}{u}_n=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Die allgemeine Reihe figurirter Zahlen $k$ter Ordnung ist also

$$1+\frac{k+1}{1}+\frac{(k+1)(k+2)}{1.2}+\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1.2.3}+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)}{1.2\ldots(n-1)}$$

und ihre Summe ist zu Folge (A) und (D)

$$\overset{k}{S}_n=\overset{k+1}{u}_n=\binom{k+n}{k+1}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}{1.2.3\ldots(k+1)}$$

oder auch

$$=\binom{k+n}{n-1}=\frac{(k+2)(k+3)\ldots(k+n)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

V.

Analytische Aphorismen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

I. Summirung der Reihe

$$f(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \dots \quad (1)$$

Soll $f(x)$ eine endliche Grösse sein, so muss $x < 1$ bleiben, ausserdem hat die Reihe keine Summe. Denkt man sich die Gleichung (1) auch für eine andere Veränderliche y hingeschrieben, so ist durch Subtraction

$$\left.\begin{array}{c} f(x) - f(y) \\ = (x-y) - \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2) + \tfrac{1}{3}(x^3 - y^3) - \tfrac{1}{4}(x^4 - y^4) + \dots \end{array}\right\} (2)$$

Ferner hat man analog (1) auch

$$f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) = \frac{x-y}{1+y} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^3 - \dots$$

Nehmen wir an, dass y ein ächter Bruch sei, so lassen sich die Ausdrücke

$$\frac{1}{1+y},\ \frac{1}{(1+y)^2},\ \frac{1}{(1+y)^3},\ \dots$$

nach dem Binomialtheorem in Reihen verwandeln und dadurch wird

$$\begin{array}{l} f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) \\ = (x-y)\ [(-1)_0 + (-1)_1 y + (-1)_2 y^2 + (-1)_3 y^3 + \dots] \\ - \tfrac{1}{2}(x-y)^2\ [(-2)_0 + (-2)_1 y + (-2)_2 y^2 + (-2)_3 y^3 + \dots] \\ + \tfrac{1}{3}(x-y)^3\ [(-3)_0 + (-3)_1 y + (-3)_2 y^2 + (-3)_3 y^3 + \dots] \\ - \dots \end{array}$$

Nehmen wir die einzelnen Glieder diagonal zusammen, so ergiebt sich:

$$f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= (x-y)(-1)_0 \\
&\quad + (x-y)\,[(-1)_1 y - \tfrac{1}{2}(-2)_0(x-y)] \\
&\quad + (x-y)\,[(-1)_2 y^2 - \tfrac{1}{2}(-2)_1 y(x-y) + \tfrac{1}{3}(-3)_0(x-y)^2] \\
&\quad + (x-y)\,[(-1)_3 y^3 - \tfrac{1}{2}(-2)_2 y^2(x-y) + \tfrac{1}{3}(-3)_1 y(x-y)^2 \\
&\qquad\qquad - \tfrac{1}{4}(-4)_0(x-y)^3] \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe würde folgendes sein:

$$(x-y)[(-1)_n y^n - \tfrac{1}{2}(-2)_{n-1} y^{n-1}(x-y) + \tfrac{1}{3}(-3)_{n-2} y^{n-2}(x-y)^2 - \ldots \quad (3)$$

Betrachten wir die eingeklammerte Grösse, in der wir $x-y$ mit z bezeichnen wollen, für sich.

Es ist ein bekannter Satz von den Binomialkoefficienten, dass

$$(-m)_p = (-1)^p (m+p-1)_p$$

ist; darnach wird

$$\begin{aligned}
&(-1)_n y^n - \tfrac{1}{2}(-2)_{n-1} y^{n-1} z + \tfrac{1}{3}(-3)_{n-2} y^{n-2} z^2 - \ldots \\
&= (-1)^n\,[n_n y^n + \tfrac{1}{2} n_{n-1} y^{n-1} z + \tfrac{1}{3} n_{n-2} y^{n-2} z^2 + \ldots] \\
&= (-1)^n\,[n_0 y^n + \tfrac{1}{2} n_1 y^{n-1} z + \tfrac{1}{3} n_2 y^{n-2} z^2 + \ldots] \qquad (4)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich aber bedeutend abkürzen. Es ist nämlich für jedes u

$$(1+u)^{n+1} - 1 = \frac{n+1}{1} u + \frac{(n+1)n}{1.2} u^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} u^3 + \ldots$$

folglich

$$\frac{(1+u)^{n+1} - 1}{(n+1)u} = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n}{1} u + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{n(n-1)}{1.2} u^2 + \ldots$$

oder

$$\frac{(1+u)^{n+1} - 1}{(n+1)u} = n_0 + \tfrac{1}{2} n_1 u + \tfrac{1}{3} n_2 u^2 + \ldots$$

Daraus folgt für $u = \frac{z}{y}$ und durch Multiplication mit y^n:

$$\frac{(z+y)^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)z} = n_0 y^n + \tfrac{1}{2} n_1 y^{n-1} z + \tfrac{1}{3} n_2 y^{n-2} z^2 + \ldots$$

und auf der rechten Seite steht jetzt die in (4) eingeklammerte Reihe. Der Ausdruck in (4) ist daher

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{(z+y)^{n+1} - y^{n+1}}{z},$$

aber z war $= x - y$ und daher ist die vorliegende Grösse

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y};$$

folglich ist der Ausdruck (3), welcher das allgemeine Glied der Reihe für $f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)$ darstellte,

$$= \frac{(-1)^n}{n+1}(x^{n+1} - y^{n+1}).$$

Wir haben daher

$$f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) = (x-y) - \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2) + \tfrac{1}{3}(x^3 - y^3) - \ldots.$$

Vergleichen wir damit den Ausdruck (2), so ergiebt sich die Gleichung

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1+y}\right).$$

Die Summe der Reihe

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots,\ +1 > x > -1$$

ist also diejenige Function von x, welche die Eigenschaft hat:

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1+y}\right).$$

Um hieraus die Function f bestimmen zu können, setzen wir $f(x) = \varphi(1+x)$, wo φ eine neue Function bedeutet. Es wird jetzt

$$\varphi(1+x) - \varphi(1+y) = \varphi\left(1 + \frac{x-y}{1+y}\right) = \varphi\left(\frac{1+x}{1+y}\right).$$

Nehmen wir noch $1 + x = \alpha\beta$, $1 + y = \beta$, so kommt

$$\varphi(\alpha\beta) - \varphi(\beta) = \varphi(\alpha)$$

oder

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi(\alpha\beta).$$

Man weiss aber, dass diese Function keine andere ist, als

$$\varphi(\alpha) = a \log \alpha \text{ (mit beliebiger Basis)},$$

wo a eine willkührliche Constante bedeutet (Cauchy, cours d'analyse, page 111); also haben wir auch $\varphi(1+x) = a \log(1+x)$, und weil $\varphi(1+x) = f(x)$ war, $f(x) = a \log(1+x)$; folglich

$$a \log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots,\ +1 > x > -1. \quad (5)$$

Man hat ebenso

$$a\log(1-x)=-x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3-\ldots,\ +1>x>-1 \quad (6)$$

durch Subtraction

$$\tfrac{1}{2}a\log\frac{1+x}{1-x}=x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\ldots,\ +1>x>-1 \quad (7)$$

und für $\frac{1+x}{1-x}=z$:

$$\tfrac{1}{2}a\log z=\frac{z-1}{z+1}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\ldots,\ \infty>z>0. \quad (8)$$

Daraus bestimmt man a, indem man $z=b$, der Basis des logarithmischen Systems nimmt; es ist dann $\log b=1$, folglich

$$\tfrac{1}{2}a=\frac{b-1}{b+1}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^5+\ldots \quad (9)$$

Hat man auf diese Weise a gefunden, so erhält man aus (8)

$$\log z=\frac{1}{\frac{1}{2}a}\left[\frac{z-1}{z+1}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\ldots\right]$$

und der Factor $\frac{1}{\frac{1}{2}a}$ ist die Grösse, welche man den **Modulus** des logarithmischen Systems nennt.

Der vorstehende Beweis, welcher sich an die von **Cauchy** auf pag. 165 und 168 für die Binomial- und Exponentialreihe gegebenen Beweise anschliesst, dürfte sich hauptsächlich dadurch empfehlen, dass er ebenso wenig von der Kenntniss der Exponentialreihe, noch von der Methode der unbestimmten Coefficienten Gebrauch macht.

II. Beweis, dass für jedes μ $\frac{d(x^\mu)}{dx}=\mu x^{\mu-1}$ ist.

Um den ausgesprochenen Satz zu beweisen, geht man gewöhnlich vom Binomialtheorem für ganze positive Exponenten aus, oder zeigt wenigstens mittelst des Schlusses von n auf $n+1$, dass für

$$(1+x)^n=1+A_1x+A_2x^2+\ldots,+A_nx^n$$

$A_1=n$ ist, woraus sich die Gleichung

$$\frac{d(x^n)}{dx}=n.x^{n-1}$$

ableiten lässt; diese wird dann auch auf gebrochene und negative n ausgedehnt. Man kann aber auf viel kürzerem Wege sogleich zum allgemeinsten Resultate gelangen.

Man weiss nämlich, dass, wenn p, q, r, u. s. w. Functionen von x bedeuten, die Gleichung statt findet:

$$\frac{d(pqr\ldots)}{pqr\ldots}=\frac{dp}{p}+\frac{dq}{q}+\frac{dr}{r}+\ldots$$

Digitized by Google

oder, wenn wir überall mit dx dividiren und den Differentialquotienten einer Function überhaupt mit D bezeichnen ($\frac{df(x)}{dx} = Df(x)$), auch

$$\frac{D(pqr\ldots.)}{pqr\ldots.} = \frac{Dp}{p} + \frac{Dq}{q} + \frac{Dr}{r} + \ldots.$$

Sei nun $p = x^\alpha$, $q = x^\beta$, $r = x^\gamma$, u. s. w., so ist

$$pqr\ldots. = x^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots},$$

also

$$\frac{D(x^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots})}{x^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}} = \frac{D(x^\alpha)}{x^\alpha} + \frac{D(x^\beta)}{x^\beta} + \frac{D(x^\gamma)}{x^\gamma} + \ldots.$$

Bezeichnen wir überhaupt

$$\frac{D(x^\mu)}{x^\mu} \text{ mit } \varphi(\mu),$$

so sagt jene Gleichung, dass diese Function die Eigenschaft hat

$$\varphi(\alpha+\beta+\gamma+\ldots.) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) + \ldots.$$

woraus folgt, dass für jedes beliebige μ die Function φ von der Form ist

$$\varphi(\mu) = \mu\varphi(1)$$

(Cauchy, cours d'analyse, page 106). Aber es ist

$$\varphi(1) = \frac{D(x^1)}{x^1} = \frac{\frac{d(x^1)}{dx}}{x} = \frac{1}{x},$$

folglich

$$\varphi(\mu) = \mu \cdot \frac{1}{x},$$

und weil $\varphi(\mu) = \frac{D(x^\mu)}{x^\mu}$ war, so ergiebt sich

$$D(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} \text{ oder } \frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu-1}$$

für jedes beliebige μ.

III. Summirung der Reihe

$$\frac{n_0}{1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{n_1}{2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{n_2}{3} - \ldots. \pm \frac{2.4.6\ldots.\overline{2n}}{3.5.7\ldots.\overline{2n+1}}\cdot\frac{n_n}{n+1}. \quad (1)$$

Es ist folgendes Integral bekannt:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} x^m dx = \frac{2.4.6\ldots.\overline{2m}}{3.5.7\ldots.\overline{2m+1}}. \quad (2)$$

Man erhält dasselbe am leichtesten durch mehrmalige Anwendung der Reductionsformel

$$X = a + bx^n,$$

$$\int X^p x^{m-1} dx = \frac{X^{p+1} x^{m-n}}{(m+np)b} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b} \int x^{m-n-1} X^p dx$$

für $a = 1$, $b = -1$, $n = 1$, $p = -\frac{1}{2}$, indem man nachher $m+1$ für m setzt.

Substituiren wir die Werthe des Integrals (2) für $m = 0, 1, 2, \ldots n$ in die Reihe (1), so ergiebt sich, dass dieselbe dem folgenden Ausdrucke gleich ist:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{n_0}{1} - \frac{n_1}{2}x + \frac{n_2}{3}x^2 - \ldots\right](1-x)^{-\frac{1}{2}} dx \quad (3)$$

wovon man sich auch umgekehrt durch Integration der einzelnen Glieder leicht überzeugt.

Nun ist aber

$$1 - (1-x)^{n+1} = \frac{n+1}{1}x - \frac{(n+1)n}{1.2}x^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}x^3 - \ldots$$

folglich

$$\frac{1-(1-x)^{n+1}}{(n+1)x} = 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n}{1}x + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}x^2 - \ldots$$
$$= n_0 - \tfrac{1}{2}n_1 x + \tfrac{1}{3}n_2 x^2 - \ldots$$

Durch Substitution dieses Werthes geht das Integral (3) in das folgende über

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-(1-x)^{n+1}}{(n+1)x}(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Für $x = 1 - y$ erhält man daraus

$$-\tfrac{1}{2}\int_1^0 \frac{1-y^{n+1}}{(n+1)(1-y)} y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2n+2}\int_0^1 \frac{1-y^{n+1}}{1-y} y^{-\frac{1}{2}} dy$$
$$= \frac{1}{2n+2}\int_0^1 [1 + y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n] y^{-\frac{1}{2}} dy$$
$$= \frac{1}{2n+2}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3-\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{1}{n+1-\frac{1}{2}}\right\}$$
$$= \frac{1}{n+1}\left\{\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right\}.$$

Es ist daher

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n_0}{1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{n_1}{2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{n_2}{3} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{n_3}{4} + \ldots \\ &= \frac{1}{n+1}\left\{\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right\} \end{aligned}\right\} (4)$$

wodurch die Summe der Reihe in ihrer möglichst einfachen Form dargestellt wird.

IV. Ableitung einer Reihe für Arc² tan x.

Es ist folgende Reihe bekannt:

$$\mathrm{Arc}^2 \sin x = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{x^6}{3} + \ldots . \quad (1)$$

Sie wurde von Stainville zuerst gegeben und ist dann auf verschiedene Weise bewiesen worden. (Einen elementaren Beweis giebt Cauchy a. a. O. page 549 — 550).

Man hat aber

$$\mathrm{Arctan}\, x = \mathrm{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

folglich, wenn man beiderseits quadrirt und rechts die Gleichung (1) anwendet,

$$\mathrm{Arc}^2\tan x = \frac{x^2}{1+x^2} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2.4}{3.5} \cdot \tfrac{1}{3}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \ldots .$$

Unter der Voraussetzung, dass $x < 1$ sei, lassen sich die Grössen

$$\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{1}{(1+x^2)^3} \ldots .$$

mittelst des Binomialtheorems für negative Exponenten in Reihen verwandeln und geben jetzt folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\mathrm{Arc}^2 \tan x = {} & x^2[(-1)_0 + (-1)_1 x^2 + (-1)_2 x^4 + (-1)_3 x^6 + \ldots .] \\ & + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{2}[(-2)_0 + (-2)_1 x^2 + (-2)_2 x^4 + (-2)_3 x^6 + \ldots .] \\ & + \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{x^6}{3}[(-3)_0 + (-3)_1 x^2 + (-3)_2 x^4 + (-3)_3 x^6 + \ldots .] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ordnet man denselben nach Potenzen von x, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\mathrm{Arc}^2 \tan x = {} & x^2 \,.\, (-1)_0 \\ & + x^4\left[\frac{(-1)_1}{1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-2)_0}{2}\right] \\ & + x^6\left[\frac{(-1)_2}{1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-2)_1}{2} + \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{(-3)_0}{3}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe würde sein:

$$x^{2n+2}\left[\frac{(-1)_n}{1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-2)_{n-1}}{2} + \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{(-3)_{n-2}}{3} + \ldots .\right]$$

oder, wenn man bemerkt, dass immer

$$(-m)_p = (-1)^p\,(m+p-1)_p$$

ist,

$$(-1)^n x^{2n+2}\left[\frac{n_n}{1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{n_{n-1}}{2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{n_{n-2}}{3} - \ldots\right]$$
$$= (-1)^n x^{2n+2}\left[\frac{n_0}{1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{n_1}{2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{n_2}{3} - \ldots\right].$$

Die eingeklammerte Reihe ist aber die nämliche, welche wir in No. III. summirt haben; setzen wir ihre Summe, so ist unser allgemeines Glied

$$= (-1)^n x^{2n+2}\cdot\frac{1}{n+1}\left[\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right]$$

und daher erhalten wir das bemerkenswerthe Resultat:

$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{Arc}^2 \tan x \\ = \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{x^4}{2}(1+\tfrac{1}{3}) + \dfrac{x^6}{3}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}) - \ldots\end{array}\right\} \quad (2)$$

oder etwas symmetrischer:

$$\left.\begin{array}{c}\tfrac{1}{2}\mathrm{Arc}^2 \tan x \\ = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4}(1+\tfrac{1}{3}) + \dfrac{x^6}{6}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}) - \ldots\end{array}\right\} \quad (3)$$

welches nach der früheren Bemerkung nur so lange richtig bleibt, als x ein ächter Bruch ist.

Man könnte fragen, ob die Reihe noch für $x=1$ convergire, was man aus ihrer Ableitung nicht unmittelbar erkennen kann. Da die Reihe (3) für $x=1$ nämlich

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}) - \ldots \quad (4)$$

mit wechselnden Zeichen fortgeht, so ist zu ihrer Convergenz nichts weiter nöthig, als dass jedes Glied grösser als das nächste ist, also eine beständige Abnahme der Glieder hinsichtlich ihrer absoluten Werthe statt findet, und dass zugleich diese Abnahme ins Unendliche fortgehe, mithin die Gränze, welcher sich die Glieder nähern, keine andere als die Null sei. Beide Umstände treffen bei unserer Reihe zusammen, wie sich aus dem Folgenden ergieht.

Ein allgemeines Glied der Reihe (4) ist, abgesehen vom Zeichen,

$$u_n = \frac{1}{2n}\left[1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right],$$

wofür sich wie früher das Integral setzen lässt:

$$u_n = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{1-z^{2n}}{1-z^2}dz = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{dz}{1-z^2} - \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{dz}{1-z^2}z^{2n}.$$

Verwandelt man $\frac{1}{1-z^2}$ in die bekannte unendliche Reihe, was sich hier auf ganz ähnliche Weise wie in einem früheren Aufsatze von mir*) rechtfertigen lässt, so ergiebt sich durch Integration der einzelnen Glieder

$$u_n = \frac{1}{2n}[1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots \text{ in inf.}]$$
$$-\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} + \ldots \text{ in inf.}\right]$$

und durch Vereinigung der unter einander stehenden Glieder

$$u_n = \frac{1}{1(2n+1)} + \frac{1}{3(2n+3)} + \frac{1}{5(2n+5)} + \ldots \text{ in inf.},$$

ein schon an und für sich bemerkenswerther Satz.

Man hätte ebenso

$$u_{n+1} = \frac{1}{1(2n+3)} + \frac{1}{3(2n+5)} + \frac{1}{3(2n+7)} + \ldots,$$

folglich $u_n > u_{n+1}$. Geht man ferner in dem Ausdrucke für u_n zur Gränze für wachsende n über, so ist offenbar

$$\text{Lim } u_n = 0.$$

Mittelst dieser beiden Eigenschaften der allgemeinen Glieder u ist die Convergenz der Reihe (4) bewiesen. Wir haben daher aus (3) für $x = 1$

$$\frac{\pi^2}{32} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{6}(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}) - \ldots \quad (5)$$

V. Ueber den Werth des Integrales $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$.

Der Werth des vorstehenden bestimmten Integrales, welches in der Wärmetheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt, ist schon auf verschiedene Weise abgeleitet worden, von Legendre und Laplace durch doppelte Integration, von Poisson durch eine geometrische Betrachtung u.s.w. Eine von anderen Theorien unabhängige Entwickelung desselben ist folgende.

Zuerst erhellt, dass das fragliche Integral einen endlichen Werth haben müsse. Denn da die Function e^{-t^2} rascher abnimmt als die Function e^{-t}, so muss

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt < \int_0^\infty e^{-t}\,dt, \text{ d. h. } < 1$$

*) Thl. III. No. XXXII.

sein. Bezeichnen wir den unbekannten Werth des Integrales mit k, so ergiebt sich aus der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = k \;\ldots.\; (1)$$

dadurch, dass man $\sqrt{u}\,t$ für t setzt, wo u eine beliebige positive Constante bedeutet und $\sqrt{u}$ positiv genommen wird,

$$\int_0^\infty e^{-ut^2}\,dt = \frac{k}{\sqrt{u}} \;\ldots.\; (2)$$

und wenn man diese Gleichung $n$mal nach u partiell differenziirt

$$\int_0^\infty \frac{d^n(e^{-ut^2})}{du^n}\,dt = k\frac{d^n(u^{-\frac{1}{2}})}{du^n},$$

d. h.

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-ut^2}\,dt = \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2^n u^n}\cdot\frac{k}{\sqrt{u}}$$

oder α^2 für u gesetzt

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-\alpha^2 t^2}\,dt = \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2^n \alpha^{2n}}\cdot\frac{k}{\alpha} \;\ldots.\; (3)$$

Mittelst dieser Gleichung lässt sich der Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-\alpha^2 t^2}\,dt$$

in eine unendliche Reihe verwandeln. Setzt man nämlich für $\sin t$ die Reihe

$$\frac{t}{1} - \frac{t^3}{1.2.3} + \frac{t^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

und integrirt die einzelnen Glieder nach Formel (3), so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-\alpha^2 t^2}\,dt$$

$$= [\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2.\alpha^3} + \frac{1.3}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{2^2.\alpha^5} - \ldots.]k$$

$$= [\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^3 + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^5 - \ldots.]2k \;\ldots.\; (4)$$

und diess ist für alle möglichen α richtig, weil diese Reihe jederzeit convergirt.

Man kann aber auf anderem Wege zu ganz der nämlichen Reihe gelangen. Man setze nämlich in dem Integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2\alpha}} e^{-t^2}\,dt$$

Digitized by Google

für $\overset{-t^2}{e}$ die Reihe

$$1 - \frac{t^2}{1} + \frac{t^4}{1.2} - \frac{t^6}{1.2.3} + \ldots.$$

und integrire die einzelnen Glieder, so wird

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{1}{2\alpha}} \overset{-t^2}{e}\, dt\\ &= \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^3 + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^5 - \ldots.\end{aligned}\right\}\ldots.(6)$$

und die vorstehende Reihe ist die nämliche wie die in Formel (4) in Parenthesen stehende. Multipliciren wir daher das vorliegende Resultat mit $2k$, so ist durch Vergleichung von (4) und (6)

$$2k\int_0^{\frac{1}{2\alpha}} \overset{-t^2}{e}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \overset{-\alpha^2 t^2}{e}\, dt \ldots.(7)$$

und diess gilt für jedes beliebige α. Lassen wir dasselbe immer kleiner werden und gehen zur Gränze für $\alpha = 0$ über, so wird

$$2k\int_0^{\infty} \overset{-t^2}{e}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Vermöge der Gleichung (1) ist aber die linke Seite $= 2k^2$; der Werth des Integrales rechts ist bekanntlich $= \frac{\pi}{2}$; mithin wird $2k^2 = \frac{\pi}{2}$ oder $k = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, wodurch die bisher unbestimmte Grösse k ihre Bestimmung gefunden hat.

Wir haben jetzt aus Formel (2) für $u = \alpha^2$

$$\int_0^{\infty} \overset{-\alpha^2 t^2}{e}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \ldots.(8)$$

und aus Formel (3)

$$\int_0^{\infty} t^{2n} \overset{-\alpha^2 t^2}{e}\, dt = \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2^n \alpha^{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ldots.(9)$$

Setzt man in Formel (7) rechts βt für t, so ergiebt sich

$$\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{1}{2\alpha}} \overset{-t^2}{e}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta t}{t} \overset{-\alpha^2\beta^2 t^2}{e}\, dt$$

oder, $\frac{\alpha}{\beta}$ für α gesetzt:

$$\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{\beta}{2\alpha}} \overset{-t^2}{e}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta t}{t} \overset{-\alpha^2 t^2}{e}\, dt.$$

Differenziirt man diese Gleichung nach β, so wird

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}=\int_0^\infty \cos\beta t\,.\,e^{-\alpha^2t^2}dt\;\ldots\;(10)$$

womit die wichtigsten drei Formeln dieser Art, nämlich (8), (9) und (10), bewiesen sind.

Aus der letzteren kann man noch ein allgemeineres Resultat ziehen. Es ist nämlich nach einem früheren Aufsatze von mir über höhere Differenzialquotienten (Thl. IV. No. XL.):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^n(e^{-a^2u^2})}{du^n}\\&=(-a)^n\{(2au)^n-2n_2(2au)^{n-2}+3.4n_4(2au)^{n-4}-\ldots\}e^{-a^2u^2}\end{aligned}\right\}(11)$$

und dieses lässt sich auf folgende Weise benutzen. Man differenziire die Gleichung (10) $n$mal nach β, so ist

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\cdot\frac{d^n(e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}})}{d\beta^n}=\int_0^\infty\frac{d^n(\cos\beta t)}{d\beta^n}e^{-\alpha^2t^2}dt$$

$$=\int_0^\infty\cos(\beta t+\tfrac{1}{2}n\pi)\,.\,t^n\,.\,e^{-\alpha^2t^2}dt$$

und wenn man auf der linken Seite die Gleichung (11) für $u=\beta$, $a=\frac{1}{2\alpha}$ in Anwendung bringt, so erhält man das Integral:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty t^n\cos(\tfrac{1}{2}n\pi+\beta t)\,.\,e^{-\alpha^2t^2}dt\\&=\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{(2\alpha)^{n+1}}\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n-2n_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}+3.4n_4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-4}-\ldots\right]e^{-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}\end{aligned}\right\}(12)$$

welches noch nicht bekannt zu sein scheint.

VI.

Ueber die Auffindung mathematischer Wahrheiten bei den Griechen.

Von

Herrn Doctor **Ludwig Felix Ofterdinger**

zu Tübingen.

I. Artikel.

Die Art, wie die griechischen Mathematiker ihre Entdeckungen gemacht haben, ist ein Gegenstand, der seine volle Lösung immer noch nicht gefunden hat. Peter Nunnez, Franz und Peter Schooten, Wallis und mehrere spätere Mathematiker waren der Ansicht, dass die alten Mathematiker ein Mittel in der Hand gehabt haben, durch welches sie ihre Sätze erfunden hätten, dass uns aber dieses nicht überliefert worden sei. Robert Simson glaubt dieses Mittel sei die Analysis, wie sie uns Pappus im VII. Buch seiner mathematischen Sammlungen zeigt; dieser Ansicht stimmten mehrere Mathematiker bei. Eine genaue Betrachtung der mathematischen Werke der Griechen zeigt, dass die Analysis allerdings bei der Abfassung derselben eine grosse Rolle gespielt hat, dass aber auch die Analysis, wie sie uns Pappus giebt, mehr zur Lösung einer geometrischen Aufgabe, als zur Auffindung neuer Sätze dient, dass deswegen, wenn die Analysis zur Erfindung neuer Wahrheiten gebraucht werden soll, dieselbe allgemeiner aufgefasst werden muss, und dann doch noch ein anderes Etwas übrig bleibt, welches zur Entdeckung mathematischer Wahrheiten führt. Diess alles auszuführen und zu beweisen ist der Zweck nachfolgender Zeilen.

Eine Vergleichung mit neuern Methoden ist bei einer derartigen Arbeit nicht wohl zu umgeben, und wenn der Verfasser diess auch so wenig als möglich gethan hat, so wird er dadurch wohl keinem Tadel ausgesetzt sein.

---

§. 1.

Ueber die Auffindung mathematischer Wahrheiten durch die Analysis, oder über die theoretische Analysis.

Wenn man einen Satz *D* hat, dessen Allgemeinheit und Gültigkeit noch nicht erkannt wäre, so nehme man an, er gelte in aller Allgemeinheit. Nach einer genauen Untersuchung dieses Satzes wird man finden, dass er in aller Allgemeinheit bewiesen werden könnte, wenn der Satz *C* in aller Allgemeinheit gelten würde und bewiesen werden könnte; dieser aber, wenn der Satz *B*, und dieser, wenn der Satz *A* gilt und bewiesen werden kann. Hier sind drei Fälle möglich:

1) Ist *A* ein Satz, der allgemein gültig ist, und entweder schon bewiesen ist, oder gar keines Beweises bedarf, so ist *D* in aller Allgemeinheit wahr und kann bewiesen werden.
2) Ist hingegen *A* ein Satz, von dem man weiss, dass er unwahr ist, da *B* nur als wahr erwiesen werden kann, wenn *A* wahr ist, so ist in diesem Falle *C* und auch *D* unwahr.
3) Ist aber *A* nicht in aller Allgemeinheit wahr, sondern hat dieser Satz Ausnahmen, so haben entweder diese Ausnahmen keinen Einfluss auf *B* und es ist dann die weitere Untersuchung wie im ersten Falle; oder sie machen, dass *B* zwar gilt, aber mit Ausnahmen, wo dann untersucht werden muss, ob *C* dennoch wahr oder unwahr ist oder mit Ausnahmen gilt, und im letztern Falle, ob *D* allgemein wahr ist oder unwahr oder mit Ausnahmen gilt.

Diese Untersuchungsart nennt man die theoretische Analysis *): sie dient also 1) zur Aufsuchung des Beweises eines Satzes und 2) zur Auffindung neuer Sätze, welche hier die Mittelsätze (*B* und *C*) sind, und die zwischen dem Satze, den man beweisen will, und dem, welchen man schon bewiesen hat, liegen.

Alle Beweise aller mathematischen Sätze, alle mathematischen Schriften entstanden durch diese Methode, und sie kann in allen Theilen der Mathematik noch jetzt mit Nutzen gebraucht werden. Es ist daher sehr zu bedauern, dass es fast scheint, sie sei ganz verlohren; denn der Gebrauch, welcher von der griechischen Analysis bei einzelnen geometrischen Aufgaben und hie und da bei einem einzeln stehenden Lehrsatze gemacht wird, kann keinen Anspruch auf eine wissenschaftliche Methode machen **).

---

*) „Duplex est analyseos genus, vel enim est veri indagatrix, diciturque „theoretica; vel propositi investigatrix, ac problematica vocatur. In „theoretico autem genere, quod quaeritur, revera ita se habere supponentes, ac deinde per ea quae consequuntur, quasi vera sint (ut sunt „ex hypothesi) argumentantes; ad evidentem aliquam conclusionem procedimus. Jam si conclusio illa vera sit, vera quoque est propositio „de qua quaeritur; ac demonstratio reciproce respondet analysi. Si „vero in falsam conclusionem incidamus, falsum quoque erit de quo „quaeritur." Pappi Alexandrini praefatio ad septimum librum collectionis mathematicae.

**) Klügel (math. Wörterbuch I. pag. 89.) sagt: „Die theoretische Analysis „wird kaum anders brauchbar sein, als bei der Prüfung eines Satzes,

Unter den vielen Beispielen, welche hier gegeben werden könnten, mag eines angeführt werden, das wegen seines allgemein bekannten Gegenstandes die Sache am leichtesten klar machen wird und das gleichsam die Angel ist, um welche sich alle Sätze der sechs ersten Bücher der Elemente des Euclides drehen.

Multiplicirt man eine Zahl *a* mit sich selbst, so erhält man die Zahl *aa*; nun lehrt die Erfahrung, dass wenn man eine beliebige Anzahl (*a*) gleich grosser Quadrate hat, und davon *aa* nimmt, man daraus ein einziges Quadrat zusammensetzen kann, an dessen jeder Seite *a* Quadrate liegen; so kann man z. B. aus 3.3, 4.4, 5.5 u. s. w. Quadraten einzelne grosse Quadrate bilden, an deren jeder Seite 3, 4, 5 u. s. w. von jenen kleinen Quadraten liegen. Bildet man nun 3 Quadrate, von denen das eine 9, das andere 16, und das dritte 25 gleiche Quadrate enthält, so dass also die beiden ersten Quadrate eben so gross als das dritte sind, so lehrt die Erfahrung, dass wenn man die drei Seiten dieser drei Quadrate zusammenfügt, man ein rechtwinkliges Dreieck erhält, von dem man sagen kann:

das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite ist gleich den Quadraten der ihn einschliessenden Seiten.

Da man dasselbe bei den Quadraten findet, welche aus 36, 64 und 100, ferner bei denen, welche aus 81, 144 und 225 kleinen Quadraten zusammengesetzt sind, so entsteht die Frage, ob der aufgestellte Satz nicht ganz allgemein gilt *).

Zu einem vollständigen Beweise eines Satzes gehört aber, dass man alle gebrauchten Kunstausdrücke gehörig erklärt. Deswegen ist es in vorliegendem Satze nöthig, die Ausdrücke Quadrat und rechtwinkliges Dreieck zu erklären; Quadrate und rechtwinklige Dreiecke sind geradlinigte Figuren; um daher eine vollständige Erklärung davon geben zu können, muss man eine Erklärung von geradlinigten Figuren geben, wozu aber die Erklärungen von Figur und Grenze, Ebene und Fläche, von Linie überhaupt, und besonders von geraden Linien, und dem Aeussersten einer Linie, also die Erklärungen 1—7, 13, 14 und 20 I. Elem. Eucl. gehören.

Rechtwinklige Dreiecke sind Dreiecke; daher gehört zu einer vollständigen Erklärung dieser Figuren die Erklärung vom Dreiecke überhaupt und die der besondern Arten von Dreiecken. Ebenso gehört zur Erklärung des Quadrats die aller vierseitigen Figuren. Um aber die Erklärungen der verschiedenen Arten von Dreiecken und Vierecken zu geben, muss man die Erklärungen vom Winkel und dessen besondern Arten vorausschicken: dadurch erhält man die Erklärungen 8—12, 21—34 I. Elem. Eucl.

„den ein Schriftsteller aufstellt oder anwendet, ohne ihn zu beweisen!" Lehmann (mathematische Abhandlungen. Zerbst 1829. pag. 21.) sagt: „Die Alten hatten zwar auch eine Art von Analysis, die aber doch von „der neuern ganz verschieden war, nur in einem blinden Versuchen „bestand, und, in Beziehung auf das System, als eine Nebensache, bloss „als ein Uebungsmittel der Erfindungskraft, betrachtet worden zu sein „scheint."

*) M. Vitruvii de Architectura libri decem. lib. I. 2. — Procli commentariorum in primum Euclidis librum libri quatuor. lib. IV. ad prop. 47. Eucl.

Nach diesen Vorbereitungen ist es möglich, den Beweis des betreffenden Satzes zu suchen. Um aber den Beweis eines mathematischen Satzes zu finden, ist es nöthig, dass man das, was bewiesen werden soll, sich vor Augen lege, und also bei einem geometrischen Satze das zu Erweisende durch eine Zeichnung sich vergegenwärtige. Es ist also die Aufgabe nöthig: auf einer gegebenen geraden Linie ein Quadrat zu beschreiben. Bei Lösung dieser Aufgabe ist man genöthigt, neue Sätze, durch die man wieder auf andere Sätze kommt, zu beweisen, neue Erklärungen zu geben, und Forderungen, so wie Grundsätze aufzustellen.

Geht man auf diese Weise fort, sucht von jedem gefundenen Satze den Beweis und bildet von jedem die Converse, so wird man alle Erklärungen, Forderungen, Grundsätze und Sätze des ersten Buches der Elemente des Euclides erhalten.

Aus diesem Beispiele ist zu ersehen, wie man durch die Analysis Sätze findet; so dass sie also die Methode ist, durch die man nicht allein die Beweise einzelner Sätze, sondern auch eine Menge neuer Sätze finden kann.

Archimedes hat in den Vorreden seiner geometrischen Schriften jedesmal diejenigen Sätze hervorgehoben, die er beweisen will: wendet man auf sie die analytische Methode an, so wird man alle die übrigen Sätze finden, welche in den betreffenden Büchern sonst noch enthalten sind.

§. 2.

Von der Zusammenfügung der durch die Analysis gefundenen Sätze, oder von der Synthesis.

Wenn man das durch die Analysis Gefundene so zusammenfügt, dass man von dem Bekannten, Einfachen und Erwiesenen auf das Zusammengesetzte und auf das, was nur durch das Einfache zu erweisen ist, übergeht, so befolgt man die synthetische Methode.

Es wird das durch die Analysis Aufgestellte und Gefundene eingetheilt in Erklärungen, Forderungen, Grundsätze*) und Sätze**).

---

*) In der Regel wird der Begriff des mathematischen Grundsatzes zu bebeschränkt aufgefasst. Die Griechen nannten nämlich Axiom (Grundsatz) den letzten Satz, welchen die Analysis gefunden hat (also den Satz A. in §. 1.) und den man als wahr anzunehmen berechtigt ist; (daher Axioma, Annahme, von ἀξιοῦν annehmen.) Sind die Axiomata Sätze, deren Richtigkeit von selbst, ohne eines Beweises zu bedürfen, einleuchtet, so heissen sie κοιναὶ ἔννοιαι, communes notiones, Gemeinsätze; sind es aber Sätze, die eines Beweises bedürfen, der aber nicht gegeben wird, sei es, dass der Beweis sich anderswo findet, oder dass er in der vorgeschriebenen Form gar nicht gegeben werden kann, man aber von der Richtigkeit des Satzes überzeugt ist, so heissen sie λαμβανόμενα sumpta oder kurzweg Annahmen. Die Grundsätze 1 — 10 und 12 Elem. Eucl. sind Gemeinsätze, dagegen der 11 Elem. Eucl., so wie die Grundsätze des Archimedes in seinen verschiedenen Schriften blosse Annahmen sind.

**) Procli l. c. II. 8.

Digitized by Google

Der erste Satz wird also der sein, welcher allein durch die Erklärungen, Forderungen und Grundsätze construirt und erwiesen werden kann und durch den der zweite Satz erwiesen wird. Unter den Sätzen, welche die Analysis gefunden hat, füllt den zweiten Platz der aus, welcher nur durch die Erklärungen, Forderungen, Grundsätze und den ersten Satz construirt und erwiesen werden kann und der nöthig ist zum Beweise und zur Construction des nachfolgenden Satzes u. s. w.

Ob die Sätze, welche unmittelbar auf einander folgen, etwas aussagen, das eine Verwandtschaft unter einander beurkundet oder nicht, hat auf die Folge, nach der sie aufgeführt werden, nicht den geringsten Einfluss; diese richtet sich ganz allein nach der Construction und dem Beweise. Daher kommt es, dass Sätze auf einander folgen können, welche den verschiedensten Inhalt haben; so handelt z. B. 1. I. Elem. Eucl. von der Construction eines gleichseitigen Dreiecks; 2. I. von der Verzeichnung einer geraden Linie von einer gegebenen Länge an einen gegebenen Punkt; 3. I. von der Gleichmachung zweier gegebenen Linien; 4. I. von der Congruenz zweier Dreiecke u. s. w. Archimedes handelt in seiner Schrift von den Schneckenlinien zuerst (Satz 1. und 2.) mechanische, dann (Satz 3 — 9) geometrische, dann (10 — 11) arithmetische und von da erst wieder geometrische Sätze ab. Dasselbe findet man in allen übrigen Schriften der Griechen.

Bei der Synthesis ist also die Ordnung, in der sich die Sätze folgen, streng vorgeschrieben, jede Abweichung lässt sich durch nichts rechtfertigen (es giebt — wie Euclides sagte — nur einen einzigen Weg, der zur Geometrie führt*), und da die Synthesis die durch die Analysis gefundenen Sätze zusammenfügt, so werden durch sie keine neue Wahrheiten gefunden, welche in das System gehören, wohl aber lassen sich Conversen, Verallgemeinerungen der Sätze, analoge Sätze bilden, und ebenso ergeben sich Folgerungen und Zusätze, welche durch eine analytische Behandlung zu neuen Systemen von Sätzen öfters führen.

§. 3.

Vom Zusammenfügen der Sätze und dem Auffinden neuer Wahrheiten durch die philosophische Methode.

Dem griechischen Geiste konnte es nicht entgehen, die Bemerkung zu machen, dass bei der Synthesis eine Masse Sätze neben einander zu stehen kommen, welche wohl in Bezug auf den Beweis, nicht aber in Bezug auf das, was sie aussagen, einen Zusammenhang haben, dass von einem Gegenstande zwar einzelne Relationen aufgestellt werden, übrigens nur so viele, als gerade zur Führung des Beweises irgend eines Satzes gehört, und deswegen der Gegenstand immer noch unerschöpft bleibt. Es war daher schon bei den Griechen der Wunsch rege, es möge diesen Uebeln abgeholfen werden; alle Bemühungen schlugen aber fehl, und erst die

*) Procli l. c. II. 4.

neueste Zeit konnte diesem lange gehegten Wunsche abhelfen, nachdem man bei der Anordnung der Sätze und bei ihrer Beweisführung einen ganz neuen Weg eingeschlagen hat, und die Sätze nicht mehr des Beweises, sondern des Satzes wegen neben einander stellte. Diese Methode heisst die philosophische oder auch die genetische.

Die Aufgabe der philosophischen Methode ist, durch ein Princip die verschiedenen Gegenstände der Mathematik unter sich zu verknüpfen, jeden Gegenstand aber in allen seinen Beziehungen zu untersuchen und daher die Sätze, welche in Bezug auf das, was sie uns sagen, eine Verwandtschaft haben, in Gruppen zu fassen, und die Sätze sowohl als die Gruppen von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus zu betrachten und zu beweisen.

Die Grössen im Allgemeinen, als Grössen betrachtet, dann die Zahlen, sind von einer solchen Einfachheit, ihre Verbindungen, die sie eingehen, beruhen auf den so einfachen Begriffen von vermehren und vermindern, dass die einzelnen Sätze wie von selbst in einzelne Gruppen zerfallen, bewiesen und von dem allgemeinen Gesichtspunkte des Vermehrens und Verminderns betrachtet werden können *). Die geometrischen Grössen dagegen sind von viel complicirterer Natur, weswegen in der Geometrie die philosophische Methode viel später Eingang gefunden hat, und hier etwas mehr im Einzelnen zu betrachten ist.

Wenn in der Arithmetik der erste Begriff der der Einheit **) ist, so ist in der Geometrie der erste der des Punktes ***); ein Punkt, der sich bewegt, beschreibt eine Linie, und wenn diese Bewegung nach ein und derselben Richtung erfolgt, so entsteht eine gerade Linie. Denkt man sich zwei gerade Linien auf einander gelegt, wovon die eine fest liegt, die andere aber um einen Endpunkt der festliegenden Linie sich zu bewegen im Stande ist, so entsteht durch diese Drehung ein Winkel, der alle Werthe von 0° bis zu 360° annehmen kann. Drehen sich nun um die beiden Endpunkte der festliegenden Linie zwei gerade Linien, so entsteht in gewissen Fällen ein Dreieck. Auf ähnliche Weise kann man so nach und nach alle andere Figuren entstehen lassen.

Linien, Winkel und Figuren unterscheiden sich von einander so sehr durch ihre Entstehung, dass diese das Kennzeichen zu der Bildung der einzelnen Gruppen giebt. Jenachdem sich die bewegliche Linie bei den Winkeln bewegt hat, sind die einzelnen Arten der Winkel, so wie ihre Eigenschaften entstanden, woraus sich die Sätze und ihre Beweise ergeben. Ebenso ist es bei den Dreiecken: dreben sich eine oder mehrere Linien um einen oder mehrere Punkte, so erhält man nicht allein die verschiedenen Arten der Dreiecke und ihre allgemeinen Eigenschaften, sondern auch die Lehre von der Congruenz derselben; bewegen sich aber eine oder mehrere Linien mit unwandelbaren Winkeln, so erhält man die Lehre von der

*) B. F. Thibaut, Grundriss der Mathematik. 5. Auflage. Göttingen. 1831. p. 3. seq.

**) Theonis Smyrnai Platonici expositio eorum, quae in arithmeticis ad Platonis lectionem utilia sunt. cap. IV.

***) Procli l. c. II. def. 1.

Aehnlichkeit der Dreiecke. Auf dieselbe Art werden die andern Figuren behandelt *).

Bei der philosophischen Methode entspringen die Eigenschaften der Grössen — also die Sätze — aus einem bestimmten Begriff (in der Arithmetik aus dem Vermehren (Zusammensetzen mehrerer Zahlen) und Vermindern (Theilen der Zahlen); in der Geometrie aus dem der Möglichkeit der Erzeugung von Constructionen) und darin liegt die Beweiskraft der Sätze, ihre Folgen und ihre Gruppen. Bei der synthetischen Methode dagegen werden die Eigenschaften ausgesagt und nachher bewiesen, die Folge liegt hier im Beweise; ohne die analytische Methode weiss man daher nicht, woraus die Eigenschaften gefolgert werden können. Bei der philosophischen Methode sucht man alle Eigenschaften einer Grösse zu erforschen, indem man die Elemente aller Grössen auf jede mögliche Weise sich ändern lässt, und darin liegt das Mittel zur Erforschung neuer Sätze. Bei der analytischen Methode sucht man eine Eigenschaft einer Grösse um eine andere zu beweisen, man sucht also nicht alle Eigenschaften einer Grösse zu finden, sondern nur die Eigenschaften verschiedener Grössen, die zum Beweise nöthig sind.

§. 4.

Ueber die Auffindung der ersten Sätze der Analysis.

Bei der philosophischen Methode findet man Sätze, indem man eine Grösse betrachtet, sie in ihre einzelnen Elemente auflöst und diese alle nur mögliche Aenderungen eingehen lässt. Bei der analytischen Methode findet man dagegen neue Sätze (Mittelsätze), indem man einen Satz, der etwas aussagt, das bis jetzt noch unbekannt war, zu erweisen sucht. Dieser Satz, welcher gleichsam den Schlussstein eines Systems von Sätzen bildet, wird also aufgestellt, bevor man von der Richtigkeit desselben durch den Beweis überzeugt ist **); da aber derlei Sätze nicht aus der Luft gegriffen werden können ***), so muss man bestimmte Anhaltspunkte haben, durch die sie gefunden werden. Diese sind aber

1) die Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie;
2) die Anwendung der Geometrie auf die Arithmetik;
3) die mechanischen Hülfsmittel;
4) die angewandte Mathematik;
5) die Analogie;
6) die Induction.

Zu 1. und 2.

Die Auffindung des pythagoräischen Lehrsatzes, die Sätze des II. Buches der Elemente des Euclides, die vielfachen Entdeckungen, welche seit Cartesius durch die Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie gemacht wurden, machen es überflüssig, die Behauptung

*) Thibaut l. c. pag. 187. seq.

**) Archimedes über Schneckenlinien, Vorrede.

***) Archimedes vorhandene Werke übersetzt von Nizze. Stralsund. 1824. pag. 281.

Digitized by Google

1. durch weitere Beispiele aus der ältern oder neuern Zeit zu bekräftigen.

In den arithmetischen Schriften der Griechen finden sich überall Spuren der Anwendung der Geometrie auf arithmetische Untersuchungen. Euclides hat in VI. 16. Elem. den Satz aufgestellt, dass wenn vier gerade Linien proportional sind, das unter den äussern enthaltene Rechteck dem unter den mittlern enthaltenen gleich sei, einen Satz, den Euclides durch die Analysis gefunden und in VII. 19. Elem. auf die Arithmetik angewendet hat, und der einer der Schlusssteine des siebenten Buches der Elemente ist. Aehnliche Beispiele finden sich viele bei den Griechen, um so mehr, als bei ihnen die Zahlenverbindungen viel schwieriger als bei uns auszuführen waren.

Zu 3.

Lineal, Zirkel, Maassstab, Waage wurden und werden immer noch häufig zur Erfindung einzelner Sätze gebraucht, ebenso wie Instrumente, welche eigens zur Satzerfindung geschaffen werden mussten. Geometrische Eigenschaften fallen durch Anschauung sehr leicht in die Augen, daher das Zeichnen, das Verschneiden von Flächen und Körpern öfters Veranlassungen wurden, geometrische Eigenschaften aufzufinden. Von all dem finden sich in den Schriften der Griechen viele Beispiele: bei Sätzen, bei denen es sich um unmittelbares Vergleichen von Grössen handelt, ist das Decken und Messen das Mittel, bei Sätze zu erfinden. Die Sätze 18, 24, 27, 28 der archimedischen Schrift über Schneckenlinien sind die Grundpfeiler des ganzen Buches und können allein durch Zeichnung und Maassstab gefunden sein. Die Sätze 35, 48, 49, 37 (zweiter Theil) I. über Kugel und Cylinder sind durch Auflegen dünner Flächen (Blätter) und nachheriges Ausmessen derselben gefunden worden. Der erste Theil des 37. Satzes I. und die Sätze 2, 4, 5, 6, 7, 8. II. über Kugel und Cylinder, die Sätze 23, 26, 27, 28 des Buches über Konoiden und Sphäroiden, ebenfalls die Grundpfeiler des ganzen Werkes, sind durch wirkliches Messen des Körperinhaltes, das hier aber nur durch die Waage geschehen kann, gefunden worden. Die Sätze 3, 4, 5, 7. XII. Elem. sind durch Zerschneiden der Körper und nachheriges Messen der einzelnen Theile gefunden worden.

Zu der Erfindung neuer Sätze gebraucht man öfters eigene Instrumente, die erst noch zu diesem Zwecke ausgedacht werden müssen; so um die Eigenschaften der Curven zu finden, dienen öfters Instrumente, mit denen dieselben gezeichnet werden können.

Zu 4.

Zu allen Zeiten hat die angewandte Mathematik eine Menge neuer Sätze geliefert; so hat z. B. Archimedes durch die Statik gefunden, dass ein parabolischer Abschnitt $= \frac{4}{3}$ eines Dreiecks sei, das einerlei Basis und gleiche Höhe mit dem Abschnitt habe*) und erst später hat Archimedes diesen Satz durch geometrische Schlüsse bewiesen**).

---

*) Archimedes sagt in der Vorrede zur Quadratur der Parabel ausdrücklich, er habe diesen Satz durch Anwendung der Mechanik gefunden.

**) Archimedes Quadratur der Parabel. Satz 24.

Auf ähnliche Art hat Pappus*) mehrere Sätze gefunden, ebenso mehrere neuere Mathematiker, von denen ich nur Lucas Valerius**), Lalovera***), Gregorius a St. Vincentio****) und Guldinus*****) nenne. Die Entdeckung der Fluxionsrechnung, die Theorie mancher krummen Linie zeigen in ihrem Ursprung vielfach auf die angewandte Mathematik.

Zu 5 umd 6.

Durch Analogie und Induction wurden von jeher eine Masse neuer Sätze aufgefunden, wie aus den ältesten und neuesten mathematischen Werken nachgewiesen werden kann.

Nachdem einmal der pythagoräische Satz erfunden war, entstanden gleichsam von selbst die Fragen: ob dieser Satz bloss bei rechtwinkligen Dreiecken gelte, oder ob bei schiefwinkligen nicht analoge Sätze gefunden werden können, d. h. ob das Quadrat der Hypotenuse bei diesen Dreiecken gleich. grösser oder kleiner sei, als die Summe der Quadrate der Katheten; ob nicht auch andere Figuren als Quadrate auf die Seiten gezeichnet werden können.

Wendet man zur ersten Untersuchung ein ähnliches Verfahren an, wie beim pythagoräischen Satze, d. h. giebt man den Seiten bestimmte Zahlenwerthe, so wird man bald die Sätze 12 und 13 des II. Buches der Elemente des Euclides finden. Um aber diese Sätze geometrisch beweisen zu können, ist die analytische Methode nöthig, durch die man die übrigen Sätze des zweiten Buches finden wird******). Versucht man bei einem rechtwinkligen Dreiecke auf den Seiten statt der Quadrate andere Figuren zu beschreiben, die gleichseitig und gleichwinklig sind, wozu man die Sätze des IV. und III. Buches der Elemente nöthig hat, so wird man finden, wenn man den Inhalt dieser Figuren durch irgend ein Mittel bestimmt, dass auch hier der Inhalt der Figur auf der Hypotenuse gleich ist dem Inhalt der zwei Figuren auf den Katheten zusammengenommen. Sucht man diesen Satz noch mehr zu verallgemeinern, indem man beliebige Figuren auf die drei Seiten zeichnet, so wird man finden, dass der Satz nur in dem Falle gilt, wenn die Figuren ähnlich sind. Daraus entspringt der Begriff von Aehnlichkeit, aus dem sich wieder der der geometrischen Verhältnisse ergiebt. Man findet also durch Analogie den 31. VI Elem. Eucl., und wird, wenn man die analytische Methode gebraucht, die Conversen und Folgerungen bildet, die übrigen Sätze des VI. und V. Buches finden.

Durch Induction und Analogie sind die Sätze des XII. Buches, die meisten des Theodosius in seinem Werke über Kugelschnitte und

---

*) Pappi l. c. lib. VIII.

**) Lucae Valerii de centro gravitatis solidorum libri III. Romae. 1604.

***) Quadratura circuli et hyperbolae segmentorum. Auct. A. Lalovera. Tolosae. 1651.

****) P. Gregorii a St. Vincentio opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, decem libris comprehensum. Antwerpiae. 1647.

*****) P. Guldin de centro gravitatis. Vien. 1635.

******) cf. Procli l. c. cap. IV. ad prop. 47.

Digitized by Google

den meisten andern Werken der Griechen gefunden worden. Bei Pappus findet sich ein besonders merkwürdiges Beispiel, da er nicht allein einen Satz auf diese Art gefunden, sondern auch durch sie ihn zu beweisen gesucht hat; Pappus sagt nämlich: unter allen Körpern, die gleiche Oberflächen haben, habe die Kugel den grössten Inhalt*). In einer Reihe von Sätzen beweist nun Pappus, dass unter allen regulären Körpern von gleicher Oberfläche der den grössten Inhalt habe, welcher von am meisten ebenen Flächen eingeschlossen ist**), und folgert nach der Analogie obigen Satz, wodurch übrigens ein vollständiger Beweis nicht hergestellt ist***).

In neuerer Zeit ist die Methode, Sätze durch Analogie und Induction zu finden, viel allgemeiner als im Alterthum angewandt worden, ja manche Mathematiker wollen diese Methode zu einer Beweisart erheben****). Die vielen neuen Entdeckungen in der Geometrie, der binomische Lehrsatz, die Sätze von den Potenzen (wo untersucht wird, was a^n bedeutet, wenn n constant oder veränderlich ist, und im ersten Falle, wenn n eine positive ganze oder gebrochene, oder eine negative ganze oder gebrochene Zahl ist, oder wenn $n = 0$ gesetzt wird) sind genug Beispiele.

Sind durch diese sechs angeführten Arten gleichsam die Grenzsteine eines Systems von Sätzen aufgestellt, so wird sich an diese eine Menge neuer Sätze anreihen lassen, die theils durch die Analysis — als Mittelsätze — gefunden werden, theils aber Conversen, Folgerungen oder Zusätze des vorher Aufgefundenen sind.

VII.

Miscellen.

Auszug aus einem Briefe an den Herausgeber von Herrn G. D. E. Weyer, Assistenten an der Sternwarte zu Hamburg.

„Euer u. s. w. erlaube ich mir ergebenst die Anfrage zu machen, ob die Aufgabe

*) Pappi l. c. V. mech. Theorien 17.

**) Pappi l. c. V. 18—57.

***) L. F. Ofterdinger methodorum expositio, quarum ope principia calculi superioris inventa sunt. Pars I. Berol. 1831. pag. 8.

****) J. J. v. Littrow kurze Anleitung zur gesammten Mathematik. Wien. 1838. pag. IX.

„ein Viereck von gegebenen Seiten so zu construiren,
„dass die Diagonalen einander gleich werden,"
vielleicht schon specielle Auflösungen erhalten hat? Ein Lehrer der Mathematik erwähnte dieser Aufgabe vor einiger Zeit gegen mich. Ich fand bald, dass sich dieselbe einer schon allgemeiner gelösten Aufgabe unterordnen liess, nämlich der in Carnots Géométrie de Position, in der deutschen Bearbeitung von Schumacher Th. 2. S. 148.:

„wenn von den 4 Seiten und 2 Diagonalen eines Vier-
„ecks 5 gegeben sind, die 6te zu finden."
Die quadratische Gleichung, welche Carnot, und wie ich ebendaselbst angemerkt finde, auch schon Euler und Lexell für die Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe gefunden haben, geht für den obigen speciellen Fall in die folgende cubische über — welches immer bemerkenswerth genug sein mag:

$$\begin{array}{llll} 2x^3 & -a\,.\,x^2 & +ab\,.\,x & +add = 0 \\ & -b & +ac & +daa \\ & -c & +bd & +bcc \\ & -d & +cd & +cbb \\ & & -2ad & -abc \\ & & -2bc & -abd \\ & & & -acd \\ & & & -bcd \end{array}$$

wo x das Quadrat der Diagonale, und a, b, c, d die Quadrate der Seiten des Vierecks bezeichnen. Die immer mögliche eine reelle Wurzel kann negativ, und damit die Diagonale ($=\sqrt{-x}$) imaginär werden, wo die Auflösung unmöglich ist, z. B. wenn zwei neben einander liegende Seiten des Vierecks gegen die beiden übrigen für den verlangten Zweck zu klein sind."

Mir ist die obige Bemerkung neu gewesen. G.

Digitized by Google

VIII.

Geometrische Untersuchungen über Potenzlinie, Potenzcentrum und Potenzkreis, Polarität, Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsaxen.

Von

Herrn C. F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund. *)

I. Potenzlinie, Potenzcentrum und Potenzkreis.

1.

Aufgabe. Den geometrischen Ort des Punktes zu bestimmen, für welchen die Quadratdifferenz seiner Entfernungen von zwei festen Punkten eine constante Grösse ist.

Auflösung. Sind A, B die festen Punkte, M der Mittelpunkt von AB, und ist Q der Durchschnitt des von dem beliebigen Punkte P auf AB gefällten Perpendikels mit AB, so ist (Euclid. Elem. Lib. II. prop. 12. 13.)

$$PA^2 = PM^2 + AM^2 \pm 2AM \times QM$$
$$PB^2 = PM^2 + AM^2 \mp 2AM \times QM,$$

*) Ich glaube, dass diese ganz einfache, bloss die elementarsten Sätze in Anspruch nehmende Darstellung der Hauptresultate der neueren geometrischen Untersuchungen wohl zu der so sehr zu wünschenden weitern Verbreitung dieser Gegenstände geeignet sein und vielleicht eine neue Veranlassung zu deren Einführung in den geometrischen Elementarunterricht geben wird. G.

mit Beziehung der Zeichen auf einander; folglich durch Subtraction

$$PA^2 - PB^2 = \pm 4AM \times QM,$$

indem man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem PA grösser oder kleiner als PB ist.

Nun bewege der Punkt P sich so, dass $PA^2 - PB^2$ dem constanten Quadrat q^2 gleich sei, so dass $q^2 = 4AM \times QM$, so muss QM constant bleiben, d. h. die von allen den Punkten, für welche die Quadratdifferenz der Entfernungen derselben von A und B constant ist, auf AB gefällten Perpendikel müssen AB in demselben Punkte schneiden, und folglich müssen gedachte Punkte selbst in einer auf AB perpendikulären Geraden liegen.

Wegen des doppelten Vorzeichens werden also zwei Gerade den gesuchten Ort repräsentiren. Zur Construction der Oerter bedient man sich am besten der Relation $PA^2 - PB^2 = q^2 = OA^2 - OB^2$, und man hat also folgende Aufgabe zu lösen.

2.

Auf einer Geraden AB einen Punkt Q so zu bestimmen, dass der Quadratunterschied seiner Entfernungen von den Endpunkten der Geraden A und B einem gegebenen Quadrate q^2 gleich ist.

Auflösung. (Taf. II. Fig. 1.) Ist 1) $q < AB$, so beschreibe man über AB als Diameter einen Halbkreis, trage q von A aus als Sehne AC ein, fälle von C auf AB das Perpendikel CD und halbire DB in Q, so ist Q der gesuchte Punkt. Denn es ist $q^2 = AB \times AD = (AQ + BQ)(AQ - BQ) = AQ^2 - BQ^2$.

Wenn aber 2) $q > AB$, so errichte man BC senkrecht auf AB, trage zwischen die Schenkel des rechten Winkels q von A aus als Hypotenuse AC ein, ziehe CD senkrecht auf AC, dass es AB in D schneidet, und halbire DB in Q, so ist Q der verlangte Punkt. Denn es ist $q^2 = AD \times AB = (AQ + BQ)(AQ - BQ) = AQ^2 - BQ^2$.

Ist endlich 3) $q = AB$, so ist B der verlangte Punkt.

3.

Aufgabe. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, für welchen die Quadratsumme seiner Entfernungen von zwei festen Punkten einem constanten Quadrate q^2 gleich ist?

Auflösung. Nach 1. hat man die Relation

$$PA^2 + PB^2 = 2PM^2 + 2AM^2,$$

folglich muss PM constant sein, da $2PM^2 = q^2 - 2AM^2 = q^2 - \frac{1}{2}AB^2$, oder $PM = \sqrt{\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{4}AB^2}$ ist.

Falls daher q^2 nicht kleiner als $\frac{1}{2}AB^2$ ist, wird der gesuchte Ort eine aus dem Mittelpunkte von AB mit dem obigen Radius beschriebene Kreislinie sein.

Zur Construction des Orts, wenn solcher vorhanden, bedient

man sich mit Vortheil eines der Durchschnitte Q der Kreislinie mit der Geraden AB. Zu dem Ende ist die folgende Aufgabe zu lösen.

4.

Aufgabe. Auf einer Geraden AB (Taf. II. Fig. 2.) einen Punkt Q so zu bestimmen, dass die Quadratsumme seiner Entfernungen von den Endpunkten der Geraden A und B einem gegebenen Quadrate q^2 gleich ist.

Auflösung. Man trage an B und AB die Gerade BL so an, dass der Winkel ABL die Hälfte eines Rechten beträgt, und denke sich von A auf BL und AB die senkrechten AK und AL gezogen, so dass $KA = KB$, $AL = AB$ und $BK = LK$ wird.

Da nun $AK^2 = \frac{1}{2}AB^2$, $AL^2 = AB^2$ ist, so wird ein aus A mit q beschriebener Kreis die Gerade BL gar nicht, oder in einem Punkte Q, oder in zwei Punkten treffen, jenachdem $q^2 < \frac{1}{2}AB^2$ oder $= \frac{1}{2}AB^2$ oder $> \frac{1}{2}AB^2$ ist, auch wird der Kreis die Verlängerung von BL über die Endpunkte treffen, wenn $q > AB$ ist.

Findet kein Durchschnittspunkt statt, so ist nach dem Obigen die Aufgabe unmöglich, findet aber einer oder zwei statt, so fälle man von einem beliebigen C auf AB das Perpendikel CQ, so ist Q der gesuchte Punkt, weil AC^2 oder $q^2 = AQ^2 + CQ^2 = AQ^2 + BQ^2$ ist.

5.

Zusatz. Die Quadratsumme der Theile einer geraden Linie ist ein Minimum, wenn die beiden Theile einander gleich sind; sonst fällt ihr Werth zwischen $\frac{1}{2}a^2$ und a^2, wenn a die Gerade ist, und liegt ein Punkt auf der Verlängerung der Geraden, so ist die Quadratsumme der Entfernungen desselben von den Endpunkten der Geraden grösser als das Quadrat der letztern.

6.

Lehrsatz. Führt man in der Ebene eines Kreises durch einen festen Punkt nach beliebiger Richtung eine Gerade, so jedoch, dass sie den Kreis in zwei Punkten schneidet, so ist das Rechteck aus den Entfernungen des erst gedachten Punktes von den Durchschnittspunkten der durch ihn geführten Geraden mit der Kreislinie von unveränderlicher Grösse.

Nämlich wenn der gegebene Punkt sich ausserhalb der Kreislinie befindet, so gleicht das constante Rechteck dem Quadrate der vom in Rede stehenden Punkte an die Kreislinie gezogenen Tangente; liegt jener aber innerhalb der Kreislinie, so hat jenes Rechteck zum einfachen Maass das Quadrat der halben Sehne, welche auf der den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindenden Geraden in dem gegebenen Punkte senkrecht steht und auch wohl Mittelsehne genannt wird.

Beweis*). Die von dem gegebenen Punkte P aus gezogene

*) Euclid Lib. III. prop. 35. 36. erweist unser Theorem bloss mit Hülfe der Gleichheit.

Gerade schneide den Kreis in D, D', und wenn P ausserhalb der Kreislinie liegt, so sei B der Berührungspunkt der von P aus an den Kreis gezogenen Tangente. Dann ist, wenn man sich BD, BD' gezogen denkt, $\triangle PBD \sim \triangle PBD'$ und folglich $PB^2 = PD \times PD'$, so dass $PD \times PD'$ für alle Lagen der Geraden PDD' constant ist.

Wenn aber der Punkt P innerhalb der Kreislinie liegt, so schneide die durch denselben gehende Mittelsehne den Kreis in E und E', so wird $\triangle EPD \sim \triangle EPD'$, folglich $PD \times PD' = PE \times PE' = PE^2$ sein, so dass $PD \times PD'$ wiederum für alle Lagen der Geraden constant ist.

7.

Zusatz. Bezeichnet man durch e die Entfernung des gegebenen Punktes vom Mittelpunkte der Kreislinie, so überzeugt man sich kraft des pythagoräischen Lehrsatzes, dass das constante Rechteck $PD \times PD'$ der Grösse $e^2 - r^2$ oder $r^2 - e^2$ gleich ist, jenachdem P sich ausserhalb oder innerhalb der Kreislinie befindet.

8.

Jenes gedachte Rechteck, dessen besondere Betrachtung eine der fruchtbarsten in der Theorie des Kreises ist, hat man mit einem eigenen Namen belegt, und es die Potenz des Punktes P in Bezug auf die gegebene Kreislinie genannt. Auch ist zu bemerken, dass unter gleichartigen Potenzen fortan diejenigen verstanden werden sollen, welche zu Punkten gehören, die zugleich ausserhalb oder zugleich innerhalb der Kreislinie liegen, die übrigen hingegen ungleichartige Potenzen genannt werden.

Diese Unterscheidung wird durch den besonderen Charakter solcher Potenzen motivirt; das Folgende giebt weiteren Aufschluss darüber.

9.

Lehrsatz. Der geometrische Ort aller Punkte, welchen gleiche und gleichartige Potenzen in Bezug auf zwei feste Kreislinien zugehören, ist eine auf der Centrale der Kreise senkrechte gerade Linie.

Beweis. Die gegebenen Kreise werden im Folgenden immer durch ihre Mittelpunkte C und C', die Centrale CC' durch a und die Halbmesser durch r und r' bezeichnet.

Jedes Punktes P Potenzen in Bezug auf die gegebenen Kreislinien werden durch die Grössen $\pm(e^2 - r^2)$, $\pm(e'^2 - r'^2)$ repräsentirt (7.), wenn e und e' die Entfernungen des Punktes P von den Mittelpunkten C und C' sind. Soll nun P gleiche und gleichartige Potenzen in Bezug auf C und C' darbieten, so muss mit Beziehung der Zeichen auf einander $\pm(e^2 - r^2) = \pm(e'^2 - r'^2)$ sein, also immer $e^2 - e'^2 = r^2 - r'^2$, oder der geometrische Ort aller Punkte, welchen gleiche und gleichartige Potenzen zukommen, stimmt mit dem Orte aller Punkte überein, für welche die Quadratdifferenz ihrer Entfernungen von den festen Punkten C und C' der constanten Grösse $r^2 - r'^2$ gleich ist, weshalb (1. 2.) der Ort,

wenn er überhaupt existirt, eine auf der Centrale senkrechte gerade Linie ist. Um aber den Ort für alle Fälle nachzuweisen, betrachten wir die verschiedenen Lagen der Kreislinien C und C' gegen einander.

10.

Den in 9. betrachteten Ort nennt man die **Potenzlinie** (*axe radical*) der gegebenen Kreise.

Nun behaupte ich zuerst, dass die Potenzlinie zweier sich tangirender Kreise deren gemeinschaftliche Tangente ist.

Denn für jeden Punkt dieser Tangente ist $e^2 - e'^2 = r^2 - r'^2$, folglich dieselbe die Potenzlinie (9.); auch erhellt dies rein geometrisch schon daraus, dass jeder Punkt der Berührenden gleiche und gleichartige Potenzen für beide Kreislinien darbietet, indem jede Potenz durch das Quadrat der gemeinschaftlichen vom Punkte P und dem Berührungspunkte begrenzten Tangente gemessen wird.

2) **Die Potenzlinie zweier sich schneidender Kreise ist deren gemeinschaftliche Sehne.**

Denn für jeden der Durchschnittspunkte der Kreislinien ist der Quadratunterschied der Entfernungen von den Mittelpunkten C und C' dem Quadratunterschiede der Radien gleich.

3) Liegen die Kreislinien ausser einander, so befindet sich der Durchschnitt Q der Potenzlinie mit der Centrale CC' zwischen den Mittelpunkten C und C' ausserhalb der Peripherien beider Kreise.

Denn bestimmt man auf CC' den Punkt Q so, dass $QC^2 - QC'^2 = r^2 - r'^2$ ist, so muss das in Q auf CC' errichtete Perpendikel die Eigenschaft haben, dass der Quadratunterschied der Entfernungen jedes Punktes im Perpendikel von C und C' der Grösse $r^2 - r'^2$ gleich ist (§. 1. 2.), und das Perpendikel wird die Potenzlinie sein, wenn jeder seiner Punkte gleichartige Potenzen darbietet. Dies ist aber wirklich der Fall; denn da $r^2 - r'^2 = (r + r')(r - r')$ und $r + r' < CC'$, so ist $r^2 - r'^2 < CC'$ und Q liegt folglich (2.) zunächst zwischen C und C'. Ferner findet man leicht $QC = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a}$, wo a die Centrale, und $QC' = \frac{a^2 - (r^2 - r'^2)}{2a}$. Nun ist aber $QC > r$, da wegen $r + r' < a$ der Unterschied $\frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a} - r = \frac{(a-r)^2 - r'^2}{2a}$ positiv ist, und eben so ist $QC' > r'$, da der Unterschied $\frac{a^2 - (r^2 - r'^2)}{2a} - r' = \frac{(a - r')^2 - r^2}{2a}$ ebenfalls positiv ist, weshalb Q ausserhalb beider Peripherien liegt.

4) Liegen endlich die Kreislinien in einander, so befindet sich Q ausserhalb beider Peripherien auf der Verlängerung von CC' über C' hinaus, wenn der Kreis $C' < C$ ist, welches ebenso wie in 3) bewiesen werden kann.

11.

Zusatz. **Bestimmt man zu je zweien von 3 Kreislinien die Potenzlinien, so treffen diese drei Potenzlinien in einem und demselben Punkte, dem Potenzcentrum** (*centre radical*), **zusammen.**

Denn der Durchschnitt O der Potenzlinien der Systeme C und C', C und C'' bietet sowohl für C und C', als für C und C'' gleiche Potenzen dar, also muss er auch gleiche Potenzen für C' und C'' darbieten, und folglich auf der Potenzlinie der Kreislinien C' und C'' liegen.

Hieraus fliesst, dass sowohl die gemeinschaftlichen Tangenten dreier Kreislinien, als auch die gemeinschaftlichen Sehnen in einem und demselben Punkte zusammentreffen (§. 10).

12.

Lehrsatz. Der geometrische Ort aller Punkte, welche gleiche und ungleichartige Potenzen in Bezug auf zwei Kreislinien C und C' darbieten, ist, wenn er überhaupt existirt, eine aus dem Mittelpunkte der Centrale CC' beschriebene dritte Kreislinie, und das Quadrat des Halbmessers derselben ist der Grösse $\frac{r^2+r'^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ gleich.

Beweis. Jedes Punktes P Potenzen in Bezug auf die gegebenen Kreislinien werden durch die Grössen $\pm(e^2-r^2)$, $\pm(e'^2-r'^2)$ repräsentirt (7). Soll nun P gleiche und ungleichartige Potenzen darbieten, so muss mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander $\pm(e^2-r^2)=\mp(e'^2-r'^2)$, oder für beide Fälle $e^2+e'^2=r^2+r'^2$ sein. Folglich stimmt der betrachtete Ort mit dem Orte aller Punkte überein, für welche die Quadratsumme ihrer Entfernungen von den festen Punkten C und C' der constanten Grösse $r^2+r'^2$ gleich ist, weshalb der Ort (3. 4. 5.), wenn er überhaupt existirt, eine aus dem Mittelpunkte von CC' mit dem obigen Halbmesser beschriebene Kreislinie ist. In 4. und 5. ist aber gezeigt, dass der Ort nur dann möglich ist, wenn $r^2+r'^2$ nicht kleiner als $\frac{1}{2}a^2$ ist. Die Lage des Orts für die verschiedenen Lagen der Kreislinien wird durch den nächsten Paragraphen näher bestimmt.

13.

1) Wenn die gegebenen Kreislinien sich berühren, so ist der Ort, den wir im Folgenden Potenzkreis nennen wollen, die beide Kreise in ihrem gemeinsamen Berührungspunkte tangirende Kreislinie, und liegt ganz innerhalb des grössern Kreises. Nur wenn die Kreislinien gleich sind, und Berührung von Aussen stattfindet, geht der Potenzkreis in den gemeinschaftlichen Contactpunkt über.

Denn die Quadratsumme der Entfernungen des Berührungspunktes von den Mittelpunkten C und C' ist der Quadratsumme der Radien gleich, weshalb (12) der Potenzkreis beide berührt, und da der Mittelpunkt desselben innerhalb der grössern Kreislinie liegt, so wird der Kreis auch ganz innerhalb der grössern liegen.

In der That ist hier $r^2+r'^2-\frac{1}{2}a^2=r^2+r'^2-\frac{1}{2}(r\pm r')^2=\frac{1}{2}(r\mp r')^2$, und folglich der gesuchte Halbmesser $\frac{1}{2}(r\mp r')=\frac{1}{2}(r\pm r')\mp r'$, und dies ist die Entfernung des Mittelpunkts der Centrale vom gemeinschaftlichen Contactpunkte.

2) Schneiden sich die Kreislinien, so geht der Potenzkreis durch ihre Durchschnittspunkte, weil jedem der letztern die Eigenschaft zukommt, dass die Quadratsumme seiner Entfernungen von den Mittelpunkten C und C' der Quadratsumme der Radien gleichkommt.

3) Liegt eine Kreislinie C' in der andern C, so findet immer ein Potenzkreis statt, da in diesem Falle $a < r - r'$, mithin $r^2 + r'^2 - \frac{1}{2}a^2 > \frac{1}{2}(r - r')^2$, also positiv ist.

4) Nur wenn die eine Kreislinie ausserhalb der andern liegt, findet nicht immer ein Potenzkreis statt, da hier $r^2 + r'^2$ kleiner als $\frac{1}{2}a^2$ sein kann.

14.

Berühren sich drei Kreislinien von Aussen, und ist C unter ihnen die grösste, so werden die etwanigen Durchschnitte der Potenzkreise für die Systeme C und C', C und C'' auf der gemeinschaftlichen Tangente der Kreislinien C' und C'' sein.

Denn jedem der gedachten Durchschnitte entsprechen gleiche Potenzen sowohl für C und C', als für C und C'', und da er ausserhalb der beiden Kreislinien C' und C'' liegt, so muss er sich auf der Potenzlinie der letztern befinden.

15.

Für zwei Kugeln C, C' giebt es immer eine Ebene, deren sämmtliches Punkten gleiche und gleichartige Potenzen in Bezug auf die Kugeln entsprechen, und diese Ebene nennt man die Potenzebene der beiden Kugeln.

Man schneide nämlich die Kugeln durch beliebig viele durch ihre Mittelpunkte gehende Ebenen, so giebt es für jedes der dadurch entstehenden Kreispaare eine Potenzlinie, welche auf der Centrale CC' senkrecht steht, und zwar in einem Punkte der Centrale, dessen Lage nur von der Grösse der Halbmesser und der Centrale abhängt. Deshalb werden alle Potenzlinien in demselben Punkte der Centrale auf der letztern senkrecht stehen, und sie liegen daher in einer und derselben auf der Centrale senkrechten Ebene (Euclid Lib. XI. prop. 5.).

16.

Zusatz. Die Potenzebene zweier sich berührender oder schneidender Kugeln ist resp. deren gemeinschaftliche Berührungs- oder Durchschnittsebene (§. 10. 1. 2.).

17.

Zusatz. Die Potenzebenen dreier Kugeln, zu zweien verbunden, haben eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie, welche auf der durch die Mittelpunkte der 3 Kugeln bestimmten Ebene senkrecht steht, und Potenzlinie der Kugelflächen genannt wird.

Denn die 3 Kreise, in welchen die durch C, C', C'' gehende Ebene die Kugeln schneidet, haben (11.) ein gemeinschaftliches

Digitized by Google

Potenzcentrum und dieses muss zunächst (15.) allen Potenzebenen gemeinsam sein. Sodann müssen die 3 Potenzebenen, da sie alle auf der Centrale senkrecht stehen, noch einen gemeinsamen Durchschnittspunkt haben, und die beide Durchschnitte verbindende Grade ist folglich den drei Potenzebenen gemeinsam.

18.

Lehrsatz. Die 6 Potenzebenen oder die 4 Potenzlinien von 4 Kugeln, von deren Mittelpunkten 3 nimmer in gerader Linie liegen, haben einen gemeinsamen Durchschnittspunkt, das Potenzcentrum für die vier Kugeln genannt.

Beweis. Der Durchschnittspunkt der Potenzlinien für die beiden Systeme C, C', C''; C, C', C''' hat die Eigenschaft, dass ihm gleiche Potenzen für beide Systeme zugehören; also bietet jener Punkt gleiche Potenzen sowohl in Bezug auf die Kreislinien C, C'', C''', als in Bezug auf die Kreislinien C', C'', C''' dar, und er muss daher einerseits in der Potenzlinie des Systems C, C'', C''', andrerseits in der Potenzlinie des Systems C', C'', C''' liegen, so dass die 4 Potenzlinien, also auch die 6 Potenzebenen, in einem Punkte zusammentreffen.

19.

Mit Rücksicht auf zwei Kugeln giebt es immer eine dritte Kugel, deren sämmtliche Punkte gleiche und ungleichartige Potenzen für die ersten Kugeln darbieten, wenn nur die Quadratsumme der Halbmesser der letztern nicht kleiner als die Hälfte des Quadrats der Centrale ist.

Wie nämlich 15. aus 9. erhellet, so fliesst unser Satz aus 12.

20.

Aus 13. 1) 2) folgt ferner, dass der in 19. betrachtete Ort, den man Potenzkugel nennen könnte, für zwei sich tangirende oder schneidende Kugeln beide zugleich in dem gemeinschaftlichen Contactpunkte berührt, oder durch den gemeinschaftlichen Durchschnittskreis beider Kugeln geht.

II. Anwendung des Princips der Potenzialität von Kreisen auf geometrische Lehrsätze.

21.

Lehrsatz. Die drei in den Mittelpunkten der Seiten eines Triangels auf dieselben senkrecht errichteten Geraden treffen in einem und demselben Punkte zusammen.

Beweis. Aus den Spitzen des Triangels C, C', C'' denke man sich drei willkührliche, aber gleiche Kreislinien beschrieben, so erhellt aus 9., dass die in den Mittelpunkten von CC', CC'', $C'C''$ auf diese Geraden senkrecht errichteten geraden Linien die Potenzlinien der Systeme C, C'; C, C''; C', C'' sind, und sich folglich (11.)

in einem Punkte schneiden. Dieser letztere ist zugleich von den Spitzen des Triangels gleich weit entfernt, oder der Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

22.

Lehrsatz. Die 3 von den Spitzen eines Triangels auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel treffen in einem und demselben Punkt zusammen*).

Beweis. A, B, C seien die Spitzen des Triangels, D, E, F die Durchschnittspunkte der von C, B, A auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel mit diesen Seiten.

Man denke sich aus A, B, C als Mittelpunkten mit den drei Halbmessern R, r, ϱ Kreislinien beschrieben, und bestimme diese Halbmesser so, dass die Relationen stattfinden:

$$R^2 - r^2 = CA^2 - CB^2,$$
$$R^2 - \varrho^2 = BA^2 - BC^2,$$

so dass also R willkührlich ist, die beiden andern Radien aber durch R bestimmt werden. Aus diesen Gleichungen fliesst aber

$$r^2 - \varrho^2 = AB^2 - AC^2.$$

Da nun (§. 9.) CD, BE, AF die Potenzlinien der drei beschriebenen Kreise sind, so treffen (§. 11.) dieselben in einem einzigen Punkte zusammen.

23.

Zusatz. (Taf. II. Fig. 3.) Es sei BF die Höhe des bei B rechtwinkligen Triangels ABC, ferner $AD = AB$ senkrecht auf AB, $CE = CB$ senkrecht auf CB, und CD, AE gezogen, so wird behauptet, dass CD, AE, BF in demselben Punkte zusammentreffen. (Hülfslinien des pythagoräischen Satzes.)

Es kommt darauf an, ein Dreieck nachzuweisen, in welchem die so eben charakterisirten Linien Höhen sind. Zu dem Ende fälle man von A und C auf CD und AE die Perpendikel AG und CH, deren erstere BF in P schneiden mag. Dann finden folgende Umstände statt:

Weil erstens $\angle D = PAB$ (jeder $= 90° - DAG$), ferner $\angle BAC = \angle KBP$ (denn jeder $= 90° - ABF$), also auch $90° + BAC = 90° + KBP$, d. i. $\angle DAC = ABP$, und endlich $AD = AB$ ist, so erhellt die Congruenz der Triangel DAC und ABP, woraus fliesst $PB = AC$.

---

*) Grunert Analyt. Geom. Theil I. S. 58, Theil II. S. 54 — 55. Der letztere Beweis stützt sich auf die Theorie der Transversalen, und der erstere ist analytisch.

M. vgl. auch den sinnreichen Beweis von Gauss in Carnots Geom. der Stellung (Ueb. v. Schumacher) Theil II. S. 363. Gauss weist ein Dreieck nach, für welches die in den Mittelpunkten der Seiten auf letztere errichteten Perpendikel die Höhen des gegebenen Dreiecks sind, so dass dann dieselben (21.) sich in einem Punkt schneiden müssen.

Ganz ebenso wird erwiesen, dass CH die Linie BF in einem Punkte schneidet, dessen Entfernung von B der Geraden AC gleich ist, so dass also die Gerade BF mit den Perpendikeln AG, CH in einem und demselben Punkte P zusammentrifft, wodurch das Dreieck ACP entstanden ist, das BF, CD, AE zu Höhen hat. Die letztern müssen sich daher in demselben Punkte schneiden (22.).

24.

Lehrsatz. Die 3 Geraden, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, und auch die 3 Geraden, von denen eine einen Winkel des Dreiecks, die andern die Nebenwinkel der übrigen halbiren, treffen in einem und demselben Punkte zusammen.

Beweis. 1ster Fall. Das Dreieck sei ABC. Zunächst behaupte ich, dass man auf den Seiten AB, AC, BC die Punkte D, E, F so bestimmen könne, dass je zwei der dadurch bewirkten 6 Abschnitte, welche eine Winkelspitze des Dreiecks zum gemeinschaftlichen Endpunkt haben, einander gleich sind.

Denn setzt man $AD = x$, und nimmt $AE = AD$, $CF = CE$, so wird sein $CE = b - x$, $BF = a - b + x$, und damit nun $BF = BD$ werde, hat man x nur so zu wählen, dass die Relation statt habe $x = c - a + b - x$, oder $x = \frac{1}{2}(b + c - a)$, und das ist immer möglich.

Nachdem die Punkte D, E, F so bestimmt sind, denke man sich aus A, C, B resp. mit $AD = AE$, $CE = CF$, $BF = BD$ drei Kreise beschrieben, welche sich in D, E, F von Aussen berühren werden, so werden die in D, E, F auf AB, AC, BC errichteten Senkrechten die gemeinschaftlichen Tangenten sein, und sich (11.) in einem Punkte O schneiden. Die von O nach den Winkelspitzen gezogenen Geraden müssen aber die Winkel des Dreiecks halbiren, da, indem O das Potenzcentrum, z. B. $OD = OE$, also die Triangel AOD, AOE congruent sind, und mithin der Winkel A durch OA halbirt wird. Folglich treffen AO, BO, CO in demselben Punkte zusammen, der der Mittelpunkt des in das Dreieck beschriebenen Kreises ist.

2ter Fall. Ganz wie vorher wird gezeigt, dass man auf der Seite AB selbst den Punkt D, und auf den Verlängerungen der Seiten CA, CB über A, B hinaus die Punkte E, F so bestimmen könne, dass $AD = AE$, $BD = BF$, $CE = CF$ sei, und dass man also aus A, B, C drei Kreise beschreiben könne, welche sich berühren. Die drei in D, E, F auf die Seiten errichteten Perpendikel treffen dann in einem Punkte O zusammen, der die Eigenschaft hat, dass OA, OB, OC die Winkel des Dreiecks halbiren. Uebrigens berühren sich die Kreise A und B von Aussen, A und C, so wie B und C von Innen.

Auch erhellet, dass stets 4 Kreise existiren, welche drei sich schneidende gerade Linien berühren.

25.

Dass die drei von den Spitzen eines Triangels nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Geraden sich in einem Punkte schneiden, kann auf die einfachste Art so erwiesen werden.

In Taf. II. Fig. 4. seien D, E die Mittelpunkte von AB und BC, und CD, AE schneiden sich in O, so kann zunächst behauptet werden, dass CO doppelt so gross als DO, und AO doppelt so gross als OE ist.

Denn zieht man DH parallel AE, so wird EB in H halbirt, oder EH ist die Hälfte von EC, also muss auch DO die Hälfte von OC sein. Auf ähnliche Art wird gezeigt. dass OE die Hälfte von OA ist.

Da sich also je zwei Transversalen so schneiden, dass der nach der Winkelspitze gerichtete Abschnitt doppelt so gross als der andere ist, so muss die Transversale von B nach der Mitte von AC durch O gehen; denn wenn sie CD in O' schnitte, so müsste $CO' = 2DO'$ sein, welches ungereimt ist.

Diesen Durchschnittspunkt nennt man den **Schwerpunkt** des Triangels.

26.

Lehrsatz. Der Schwerpunkt eines Triangels, der Durchschnittspunkt der 3 Höhen, und der Mittelpunkt des um den Triangel beschriebenen Kreises liegen stets in gerader Linie, so dass sich der Schwerpunkt zwischen den beiden andern befindet und vom Höhendurchschnitt doppelt so weit entfernt ist, als vom Mittelpunkte des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

Beweis. ABC (Taf. II. Fig. 5.) sei der Triangel, CD und AE senkrecht auf AB und BC, ihr Durchschnitt H, CF nach der Mitte von AB gerichtet, und CS doppelt so gross als SF, so dass S der Schwerpunkt (25.), und endlich M der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so dass MF senkrecht auf AB ist. Man ziehe SH, SM, so soll HSM eine gerade Linie und HS doppelt so gross als SM sein.

Da jeder der Winkel ABE, $CHE = 90° - BCD$, so ist $\triangle ABE \sim \triangle CHE$, und folglich $CH:AB = CE:AE$. Da ferner $\angle FMB = \angle ACB$, so ist $\triangle FMB \sim \triangle ACE$, und folglich $FM:FB = CE:AE$, also nach dem Obigen $CH:AB = FM:FB$. Nun ist aber AB doppelt so gross als FB, also muss CH doppelt so gross als FM sein; und da $SC = 2SF$, und endlich $\angle HCS = \angle SFM$, so sind die $\triangle\triangle$ CHS, SFM ähnlich, mithin $\angle CSH = \angle FSM$, folglich HSM eine gerade Linie, und $SH = 2SM$.

III. Ueber Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsaxen.

27.

Lehrsatz. Zieht man zwei parallele Radien zweier Kreislinien, und verbindet die Endpunkte derselben durch eine Gerade, so geht diese für alle Paare auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Centrale befindlicher Radien immer durch denselben Punkt der Centrale.

Beweis. Der Kreislinien Mittelpunkte seien C, C' und r, r' die Radien, die wir ungleich setzen, wenn die Radien auf derselben

Seite der Centrale liegen. Findet nun das Letztere statt, so sei A der Durchschnittspunkt der Centrale mit der die Endpunkte der parallelen Radien verbindenden Geraden; dann wird sein $CA : C'A = r : r'$, folglich $CA - C'A : CA$ (oder $C'A$) $= r - r' : r$ (oder r'), folglich $CA = \frac{ar}{r-r'}$, $C'A = \frac{ar'}{r-r'}$, wenn a die Centrale bedeutet. Demnach behält CA oder $C'A$ einen unveränderlichen Werth, *w. z. b. w.*

Liegen nun ferner die parallelen Radien auf verschiedenen Seiten der Centrale, so sei I der Durchschnittspunkt der die Endpunkte der Radien verbindenden Geraden mit der Centrale, und man findet $CI = \frac{ar}{r+r'}$, $C'I = \frac{ar'}{r+r'}$, so dass I ein unveränderlicher Punkt ist.

28.

Die Punkte A, I, welche wir so eben betrachtet haben, werden resp. der äussere (directe) und innere (inverse) **Aehnlichkeitspunkt** der gegebenen Kreislinien genannt.

29.

Zusätze. 1) Zweier sich von Aussen tangirender Kreislinien inverser Aehnlichkeitspunkt ist deren gemeinsamer Berührungspunkt.

2) Berühren sich zwei Kreislinien von Innen, so ist ihr directer Aehnlichkeitspunkt ihr gemeinsamer Berührungspunkt.

3) Liegt eine Kreislinie innerhalb der andern, so befindet sich der directe Aehnlichkeitspunkt beider innerhalb der kleinern Kreislinie, in allen andern Fällen aber ausserhalb derselben.

4) Liegt eine Kreislinie ganz ausserhalb der andern, so befindet sich der inverse Aehnlichkeitspunkt beider ausserhalb beider Peripherien, in allen andern Fällen ist er innerhalb der kleinern Peripherie.

5) Zieht man von einem der Aehnlichkeitspunkte an die eine Kreislinie die Tangenten, so werden diese auch Tangenten der andern Kreislinie sein, so dass man an zwei Kreislinien die 4 gemeinschaftlichen Tangenten sehr leicht mit Hülfe der Aehnlichkeitspunkte construiren kann.

30.

Beschreibt man mit zwei gegebenen Kreisen zwei neue Kreise concentrisch, deren Halbmesser dasselbe Verhältniss zu einander haben, als die Halbmesser der ursprünglichen Kreise, so kommt den neu beschriebenen Kreisen derselbe directe und inverse Aehnlichkeitspunkt zu als den gegebenen.

Denn sind r, r' die ursprünglichen, ϱ, ϱ' die neuen Halbmesser, so dass $r : r' = \varrho : \varrho'$, so ist, wenn A der directe Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreislinien ist, $AC = \frac{ar}{r-r'}$ (27.). Weil aber

$r : r - r' = \varrho : \varrho - \varrho'$, also $\frac{r}{r - r'} = \frac{\varrho}{\varrho - \varrho'}$, so hat man $AC = \frac{a\varrho}{\varrho - \varrho'}$, also ist auch A der directe Aehnlichkeitspunkt der mit ϱ, ϱ' beschriebenen Kreislinien.

Aehnlicherweise erhellt das Theorem für den innern Aehnlichkeitspunkt.

31.

Die Aufgabe, alle Systeme je zweier mit zwei gegebenen Kreislinien concentrischer Kreise zu finden, welche mit den erstern dieselben Aehnlichkeitspunkte haben, wird am einfachsten so gelöst: Um die Entfernungen eines Aehnlichkeitspunktes von den Mittelpunkten der gegebenen Kreise als Diameter beschreibe man zwei Kreise, und ziehe durch den Aehnlichkeitspunkt eine beliebige Gerade, welche die neu beschriebenen Kreislinien in zwei Punkten schneidet, so müssen die gesuchten concentrischen Kreise durch diese Punkte gehen, weil die gezogene Gerade solche Kreise in den genannten Punkten zugleich tangirt.

32.

Construirt man also für drei aus C, C', C'' mit den Halbmessern r, r', r'' beschriebene Kreislinien die äussern Aehnlichkeitspunkte A, A', A'' und die inneren I, I', I'', so giebt es unendlich viele Systeme je dreier mit den gegebenen concentrischer Kreislinien, welchen dieselben Aehnlichkeitspunkte zukommen.

Man bestimme nämlich für ein willkührliches ϱ den Radius ϱ' so, dass $r : r' = \varrho : \varrho'$, so werden die mit ϱ, ϱ' beschriebenen Kreislinien dieselben Aehnlichkeitspunkte haben, als die mit r, r' jenen concentrisch beschriebenen (30). Sodann werde ϱ'' so angenommen, dass $r : r'' = \varrho : \varrho''$, so kommt auch den Kreislinien ϱ, ϱ'' derselbe Aehnlichkeitspunkt zu als den mit ihnen concentrischen r, r''. Aus beiden Proportionen fliesst aber die dritte $r' : r'' = \varrho' : \varrho''$, und folglich wird zu gleicher Zeit der Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien ϱ', ϱ'' mit dem der jenen concentrischen Kreislinien r', r'' übereinkommen.

Da ϱ willkührlich ist, so geht die Zahl der Systeme ins Unendliche.

33.

Lehrsatz. Zieht man durch den einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreislinien C und C' z. B. A eine beliebige Transversale, und bezeichnet die Durchschnittspunkte derselben mit den Kreislinien C und C' resp. mit M, N; M', N', so dass M und M' die dem Aehnlichkeitspunkt zunächst liegenden Punkte sind, so sind die Rechtecke

$$AM \times AN', \quad AN \times AM'$$

stets gleich, und von unveränderlicher Grösse, wie man auch die Transversale ziehen mag.

Beweis. Wegen der Parallelität der Radien CM, $C'M'$; CN, $C'N'$ ist $AM : AM' = r : r'$, $AN : AN' = r : r'$, folglich $AM : AM' = AN : AN'$, oder die Rechtecke $AM \times AN'$, $AN \times AM'$ sind einander gleich. Ferner ist $\frac{AM}{AM'} \times AM'. AN' = AM \times AN' = \frac{r}{r'} \times AM' \times AN'$, und da $AM' \times AN'$ die Potenz des Punktes A für die Kreislinie C', also unveränderlich ist, so muss auch $AM \times AN'$, oder $AN \times AM'$ von unveränderlicher Grösse sein.

Sind B, B' die Berührungspunkte der von A aus gezogenen gemeinschaftlichen Tangente mit den Kreislinien, so übersieht man leicht, dass das in Rede stehende constante Rechteck dem Rechteck $AB \times AB'$ gleich ist.

34.

Lehrsatz. Werden zwei Kreislinien von einer dritten gleichartig (d. h. zugleich von Aussen, oder zugleich von Innen) berührt, so liegen die Berührungspunkte mit dem directen Aehnlichkeitspunkte in gerader Linie. Findet aber ungleichartige Berührung statt, so liegt der inverse Aehnlichkeitspunkt mit den Berührungspunkten in gerader Linie.

Beweis. Zuerst berühre (Taf. II. Fig. 6.a.) die Kreislinie O die gegebenen C und C' in den Punkten M, N' von Aussen, so dass O, M, C; $O, N' C'$ in gerader Linie liegen, und $OM = ON'$ ist. Zieht man die Gerade MN', welche die Kreislinie C' in M' schneidet, so ist $\angle OMN' = ON'M = C'N'M' = C'M'N'$, folglich $C'M'$ mit CM parallel, weshalb MN' durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A der Kreislinien C, C' geht.

Berührt zweitens die Kreislinie o (Taf. II. Fig. 6.a.) die gegebenen in m und n' von Innen, so dass ocm, $oc'n'$ gerade Linien sind, und $om = on'$ ist, so ist, wenn die Gerade mn' die Kreislinie C' in m' schneidet, $\angle omm' = on'm = C'm'n'$, also $C'm'$ mit Cm parallel, weshalb mn' durch den directen Aehnlichkeitspunkt geht.

Wenn endlich drittens (Taf. II. Fig. 6. b.) die Kreislinie O die Kreislinie C in M von Aussen, die Kreislinie C' aber in N' von Innen berührt, so dass OMC, $ON'C'$ gerade Linien sind, und $OM = ON'$ ist, so ist, wenn MN' den Kreis C' in M' schneidet, $\angle OMM = ON'M' = CM'N'$, folglich $C'M'$ parallel mit CM, weshalb, da die Halbmesser auf verschiedenen Seiten der Centrale liegen, die Gerade MN' durch den innern Aehnlichkeitspunkt I geht.

35.

Denkt man sich in Taf. II. Fig. 6. a. von A die gemeinschaftlichen äussern Tangenten gezogen, welche die Kreislinie C in B, b, die andere in B', b' berühren, so erhellt, dass die Berührungspunkte jeder beide Kreislinien von Aussen tangirenden Kreislinie auf den Bogen BMb, $B'M'b'$ liegen werden, und auf den andern Bogen die Berührungspunkte aller beide von Innen tangirenden Kreise.

Das Umgekehrte findet statt, wenn die Kreislinien ungleichartig berührt werden.

Auch erhellt, dass keine Kreislinie die gegebenen in den Berührungspunkten der Tangenten zugleich berühren kann.

36.

Es seien nnn die Kreislinien C, C', C'' so beschaffen, dass sich zwei neue C''', C^{IV} beschreiben lassen, von denen die erste die drei gegebenen von Aussen in den Punkten M, M', M'', die andere dieselben von Innen in den Punkten N, N', N'' berührt. Der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien C, C' liegt dann (34.) sowohl auf der Geraden MM', als auf NN', der äussere Aehnlichkeitspunkt von C, C'' sowohl auf MM'', als auf NN'', der äussere Aehnlichkeitspunkt von C', C'' sowohl auf $M'M''$, als auf $N'N''$. Da nun, wenn A, A', A'' die directen Aehnlichkeitspunkte der Systeme C, C'; C, C''; C', C'', die Geraden AMM', ANN'; $A'MM''$, $A'NN''$; $A''M'M''$, $A''N'N''$ Transversalen der Systeme C, C'; C, C''; C', C'' sind, so finden (33.) die Relationen statt:

$$\left\{\begin{array}{l} AM \,.\, AM' = AN \,.\, AN' \\ A'M \,.\, A'M'' = A'N \,.\, A'N'' \\ A''M' \,.\, A''M'' = A''N \,.\, A''N'' \end{array}\right\},$$

und die Pnnkte A, A', A'' bieten somit gleiche nnd gleichartige Potenzen für die Kreislinien C''', C^{IV} dnr, oder $AA'A''$ ist eine gerade Linie, nämlich die Potenzlinie der Kreise C''', C^{IV}.

Sind die Kreise C, C', C'' ferner so beschaffen, dass sich zwei neue C''', C^{IV} beschreiben lassen, deren erster die Kreise C, C' von Aussen, C'' von Innen, der andere C, C' von Innen, C'' aber von Aussen berührt, so erhellet ganz wie vorher, dass die Aehnlichkeitspnnkte A, I', I'' in gerader Linie, nämlich in der Potenzlinie der Kreise C''', C^{IV} liegen.

Wir haben daher folgendes

37.

Theorem. Wenn drei Kreise C, C', C'' so beschaffen sind, dass sich zwei neue C''', C^{IV} beschreiben lassen, von welchen der erste alle drei von Aussen, der andere alle drei von Innen berührt, so liegen die drei directen Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise in der Potenzlinie der neu beschriebenen.

Kann man zweitens zwei Kreise beschreiben, von welchen der eine C, C' von Aussen, C'' von Innen, der andere C, C' von Innen, C'' von Aussen berührt, so liegen der directe Aehnlichkeitspunkt von C, C', und die inversen Aehnlichkeitspunkte von C, C''; C', C'' in der Potenzlinie der neu beschriebenen Kreise.

38.

Die so eben charakterisirten Aehnlichkeitspunkte liegen stets in gerader Linie, ohne dass die Kreislinien von der in 37. angegebenen Beschaffenheit sind, nur kann dnnn von einer Potenzlinie nicht die Rede sein.

Denn nach 32. kann man die Halbmesser der 3 Kreise so lange abnehmen lassen, dass die Kreise ganz ausserhalb einander liegen, und doch dieselben Aehnlichkeitspunkte haben, und für 3 ganz ausserhalb einander liegende Kreise sind die Bedingungen in 37. erfüllt. Wir haben also folgendes Theorem:

Bezeichnet man die äussern Aehnlichkeitspunkte dreier Kreislinien durch A, A', A'', die innern durch I, I', I'', so liegen die Ternionen

$$A,\ A',\ A''$$
$$A,\ I',\ I''$$
$$A',\ I,\ I''$$
$$A'',\ I,\ I'$$

stets in gerader Linie, und diese vier Geraden heissen Aehnlichkeitsaxen, $AA'A''$ die directe, die übrigen inverse.*)

Ist es möglich, an die drei Kreislinien die 6 äussern gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen, so ergiebt sich aus dem Obigen der von Monge gefundene Satz:

Dass die drei Punkte, in denen je zwei zusammengehörende der sechs an drei Kreise gezogenen äussern Tangenten sich schneiden, stets in einer geraden Linie liegen.

IV. Die hauptsächlichsten Folgerungen der Aehnlichkeitstheorie bei Kreisen.

39.

Zuerst denken wir uns in und um einen Kreis einen Triangel beschrieben, ABC, KLM (Taf. II. Fig. 7.), so dass die Seiten des letztern durch die Winkelspitzen des erstern gehen, und ferner denken wir uns die Seiten des $\triangle ABC$ verlängert, bis sie den Tangenten in den Gegenecken in D, E, F begegnen. Dann treten folgende Umstände ein:

Die aus K mit $KA = KB$ beschriebene Kreislinie wollen wir der Kürze halber bloss die Kreislinie K nennen, und eine ähnliche Benennung für die aus L mit $LB = LC$, und aus M mit $MA = MC$ beschriebenen Kreislinien anwenden.

Dies vorausgesetzt werden die Kreislinien K und M von der Kreislinie L in B und C von Aussen (d. h. gleichartig) berührt, weshalb ihr directer Aehnlichkeitspunkt auf der Geraden BC liegt

*) M. vgl. den analytischen Beweis von Grunert in d. Analyt. Geometrie. Theil I. S. 111 ff. Der Beweis in demselben Werke Theil II. S. 267 ff. gründet sich auf die Theorie der Transversalen. Einen speciellen Fall des Theorems beweist Meier Hirsch (Sammlung geometrischer Aufgaben Theil II. S. 368—70) durch Rechnung. Magnus Sammlung von Aufg. und Lehrsätzen aus der analyt. Geometrie. Erste Abtheilung S. 80.

Digitized by Google

(34.), und da derselbe sich auch auf der Centrale KM befindet, so ist der Durchschnitt von BC und MK, nämlich D, der directe Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien K und M.

Ganz ebenso erhellt, dass E der directe Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien K und L, F der directe Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien L und M ist.

Daher (38.) liegen die Punkte D, E, F in einer geraden Linie, nämlich in der äussern Aehnlichkeitsaxe der Kreislinien K, L, M.

Ferner werden die Kreislinien D und E (d. h. die aus D, E mit DA, EB beschriebenen Kreislinien) von der Kreislinie K in A und B ungleichartig berührt, weshalb ihr inverser Aehnlichkeitspunkt auf AB und DE zu gleicher Zeit liegt, also F ist.

Eben so wird eingesehen, dass E der directe Aehnlichkeitspunkt von den Kreislinien D und F, D der directe Aehnlichkeitspunkt von den Kreislinien E und F ist.

Demnach haben wir folgendes Theorem:

Bei jedem einem Kreise eingeschriebenen Dreieck liegen die Durchschnittspunkte der Seiten mit den Tangenten in den Gegenecken stets in gerader Linie*).

40.

Dass dieser Satz für alle Kegelschnitte gilt, wird so erwiesen.

Die Spitze des Kegels, aus welchem der Kegelschnitt geschnitten ist, heisse S und ABC sei ein in den Kegelschnitt beschriebenes Dreieck; legt man durch SA eine Berührungsebene des Kegels, welche die Ebene SBC in der Geraden SD schneidet, so dass D der Durchschnittspunkt von BC mit der Durchschnittslinie der Berührungsebene und der Ebene des Kegelschnitts ist, so wird DA eine Tangente des Kegelschnitts in A sein. Auf dieselbe Art construire man die übrigen Tangenten, und deren Durchschnittspunkte mit den übrigen Seiten des Triangels.

Man schneide nun den Kegel durch eine Ebene so, dass der Schnitt ein Kreis und von den Kanten SA, SB, SC resp. in A', B', C' getroffen wird. Sodann sei $A'D'$ die Durchschnittslinie der Berührungsebene durch SA mit der Kreisebene, dass also $A'D'$ eine Tangente des Kreises ist, welche die Verlängerung von $B'C'$ in D' schneidet, und ebenso bestimme man die Punkte E', F'.

Nach 39. liegen nun die Punkte D', E', F' in gerader Linie, und da D, E, F auf den Geraden SD', SE', SF' liegen, so werden die letztern Punkte in einer Ebene, und zugleich in der Ebene des Kegelschnitts liegen, und müssen sich also in der Durchschnittslinie beider Ebenen, oder in gerader Linie befinden.

41.

Betrachten wir jetzt zwei Vierecke $ABCD$, $KLMN$, von denen das erste in einen Kreis, das andere um denselben so beschrieben ist, dass seine Seiten durch die Ecken des erstern gehen; E sei der Durchschnitt der Seiten AB und CD, F der Durchschnitt der Gegenseiten AD und BC, G der Durchschnitt der Tangenten in

*) Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit der geometr. Gestalten von einander etc. S. 155. — Grunert Analyt. Geometr. Theil II. S. 269. (Theorie der Transversalen).

den Gegenecken LK und MN, endlich H der Durchschnitt der Tangenten KN und LM (Taf. II. Fig. 8.).

Da nun die Kreislinien N und L sowohl von der Kreislinie K als von der Kreislinie M resp. in A, B; D, C gleichartig berührt werden, so liegt ihr directer Aehnlichkeitspunkt auf den drei Geraden AB, CD, NL, so dass also die letztern in einem und demselben Punkte E zusammentreffen.

Ganz ebenso wird erwiesen, dass die drei Geraden BC, AD, MK in demselben Punkte F zusammenstossen.

Ferner werden die Kreislinien N und L von der Kreislinie G in D und B, von der Kreislinie H in A und C ungleichartig berührt, weswegen ihr inverser Aehnlichkeitspunkt auf den Geraden BD, AC, NL zugleich liegt, und die letztern also in einem und demselben Punkt O sich schneiden müssen.

Ganz ebenso wird erwiesen, dass BD, AC, KM sich in einem Punkte schneiden, und folglich treffen die vier Geraden AC, BD, KM, LN in demselben Punkte O zusammen.

Nun werden auch die Kreislinien G und H von den Kreislinien K und M resp. in A, B; D, C ungleichartig berührt, daher ihr innerer Aehnlichkeitspunkt E ist, und somit H, G, E in gerader Linie liegen. Sodann werden die Kreislinien G und H von den Kreislinien L und N resp. in B, C; A, D gleichartig berührt, so dass ihr directer Aehnlichkeitspunkt F ist, und somit auch F mit G, H in gerader Linie liegt. Also befinden sich die vier Punkte E, F, G, H in einer geraden Linie.

42.

Diese Resultate finden für alle Kegelschnitte statt.

Denn es sei wieder S des Kegels Spitze, zu welchem der Schnitt gehört, $ABCD$, $KLMN$ ein in und um den Kegelschnitt beschriebenes Viereck, dass die Seiten des letztern durch die Spitzen des erstern gehen, E, F die Durchschnitte der Gegenseiten des eingeschriebenen, G, H die Durchschnitte der Gegenseiten des umschriebenen Vierecks, so dass also SE der Durchschnitt der Ebenen SAB, SDC, E der Durchschnittspunkt der Geraden SE mit dem Kegelschnitt etc., SG der Durchschnitt der durch SB, SD gelegten Berührungsebene des Kegels, G der Durchschnitt der Geraden SG mit dem Kegelschnitt ist etc.

Man schneide die Kegelfläche durch eine Ebene, dass der Schnitt ein Kreis wird, bezeichne durch A', B', C', D'; K', L', M', N'; E', F', G', H' die Durchschnittspunkte der Geraden SA, SB, SC, SD; SK, SL, SM, SN; SE, SF, SG, SH mit der Kreisebene, so wird erhellen, dass $A'B'C'D'$, $K'L'M'N'$ ein in und um den Kreis beschriebenes Viereck ist, dessen Seiten und Spitzen sich berühren, und E', F' die Durchschnitte der Gegenseiten des in den Kreis, und G', H' die Durchschnitte der Gegenseiten des um den Kreis beschriebenen Vierecks sind.

Nach 41. liegen die Punkte E', L', N' in gerader Linie, so dass SE', SL', SN' eine Ebene bilden, in welcher auch die Punkte E, L, N liegen, und da die letztern in der Ebene des Kegelschnitts sind, so befinden sie sich im Durchschnitt beider Ebenen oder in gerader Linie.

Ferner schneiden sich nach 41. die vier Geraden $A'C'$, $B'D'$,

$K'M'$, $L'N'$ in demselben Punkte O', weswegen die vier Ebenen $SA'C'$, $SB'D'$, $SK'M'$, $SL'N'$ sich in der Geraden SO' treffen, und mithin der Punkt O, als auf SO' liegend, allen vier Ebenen gemeinsam ist. Nun liegt aber O im Kegelschnitt, also auf den vier Geraden AC, BD, KM, LN, in welchen jene Ebenen den Kegelschnitt treffen.

Endlich befinden sich (41.) die vier Punkte E', F', G', H' in gerader Linie, weshalb SE', SF', SG', SH' eine Ebene bilden, in welcher auch E, F, G, H liegen, und da die letztern auch im Kegelschnitt sind, so liegen sie in beider Ebenen Durchschnitt oder in gerader Linie.

Demnach entspringen folgende Theoreme:

1) Sind in und um einen Kegelschnitt zwei Vierecke so beschrieben, dass die Seiten des letztern durch die Ecken des erstern gehen, so liegt der Durchschnitt der Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks mit einem Paar der Gegenecken des umschriebenen in gerader Linie.

2) Die vier Diagonalen beider Vierecke treffen in demselben Punkt zusammen, so dass also auch der Durchschnitt der Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks mit einem Paar Gegenecken des umschriebenen, und dem Durchschnitt der vier Diagonalen in gerader Linie liegt.

3) Die vier Durchschnittspunkte der Gegenseiten beider Vierecke befinden sich in einer geraden Linie*).

43.

Betrachten wir nun das in einen Kreis beschriebene Sechseck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ (Taf. III. Fig. 9.), und verlängern je zwei Seiten, zwischen denen zwei andere liegen, bis sie sich in G_1, G_2, G_3 schneiden, so treten folgende Umstände ein.

Zieht man in A_2, A_5; ferner in A_3, A_6; endlich in A_4, A_1 Tangenten, bis sie sich in K_2, K_3, K_1 schneiden, so ist (42.) G_1 der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien K_1, K_2, ferner G_2 der inverse Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien K_2, K_3; endlich G_3 der inverse Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien K_1, K_3; folglich müssen (38.) die Punkte G_1, G_2, G_3 in gerader Linie liegen, und zugleich werden die 6 Punkte G_1, G_2, G_3, K_1, K_2, K_3 in einer geraden Linie sein.

Da sich nun ganz wie 41. und 42. diese Sätze für alle Kegelschnitte beweisen lassen, so entspringen die Theoreme:

1) Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseck liegen die Durchschnittspunkte der drei Seitenpaare, zwischen denen zwei andere Seiten liegen, stets in einer geraden Linie und

2) auch die Durchschnitte der Tangentenpaare in den Ecken, zwischen denen zwei andere liegen, befin-

---

*) Grunert Analyt. Geomet. Theil I. S. 114—15. (Speciell. Fall für den Kreis). — J. Steiner Geometr. Gestalten. S. 153. — Magnus Sammlung analyt. Aufgaben. S. 191.

den sich in einer geraden Linie, welche mit der in 1) genannten Geraden zusammenfällt*).

44.

Aus dem ersten Theorem lässt sich ein anderes ableiten, welches sich auf ein in einen Kegelschnitt beschriebenes Fünfeck bezieht, und als ein Grenzfall jenes betrachtet werden kann, wenn man sich vorstellt, dass eine Seite des in einen Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks allmählig verschwinde. Der Satz ist folgender:

Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Fünfeck liegen die Durchschnittspunkte irgend zweier Seitenpaare, und der Durchschnittspunkt, welchen die jedesmalige fünfte Seite mit der Tangente in der gegenüberstehenden Ecke bildet, allemal in einer geraden Linie (Steiner Geom. Gestalt. S. 153.)

Beweis. In Taf. III. Fig. 10. sei $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ das in den Kegelschnitt beschriebene Fünfeck, die Seiten A_1A_2, A_3A_4 schneiden sich in G_1, die Seiten A_2A_3, A_4A_5 schneiden sich in G_2, und die Seite A_1A_5 begegne der in A_3 gezogenen Tangente in G_3, so soll erwiesen werden, dass $G_1G_2G_3$ eine gerade Linie ist.

Man nehme zwischen A_2 und A_3 noch einen sechsten Punkt A_6 an, verbinde ihn mit A_2 und A_3, so dass $A_1A_2A_6A_3A_4A_5$ ein in den Kegelschnitt beschriebenes Sechseck ist, und verlängere A_2A_6 bis es A_4A_5 in Γ_2, A_6A_3 bis es A_1A_5 in Γ_3 begegnet, so muss (43.) $G_1\Gamma_2\Gamma_3$ eine gerade Linie sein.

Gesetzt nun G_1, G_2, G_3 lägen nicht in gerader Linie, sondern die Gerade G_1G_2 begegnete der Geraden A_1A_5 in g_3, so lasse man sich nun den Punkt A_6 dem Punkte A_3 immer näher und näher bewegen, ohne dass er mit ihm zusammenfällt; unter diesen Umständen wird die Gerade A_2A_6 der Geraden A_2A_3 immer näher kommen, und der Punkt Γ_2 somit dem Punkte G_2 sich näher bringen lassen, als jede vorgegebene Distanz beträgt. Ebenso wird der Punkt Γ_3 dem Punkte G_3 beliebig nahe kommen.

Wenn nun der Punkt g_3 nicht mit G_3 zusammenfällt, so wird, während Γ_2 sich nach G_2 bewegt, die Gerade $G_2\Gamma_2$ zwar beliebig klein gemacht werden können, aber nicht die Gerade Γ_3G_3, da sie im vorliegenden Falle stets grösser als G_3g_3 ist, und da dies gegen das Obige, so muss g_3 mit G_3 zusammenfallen, oder die Punkte G_1, G_2, G_3 sind in einer Geraden, *w. z. b. w.*

---

*) Den Satz 1) hat Pascal (Essai sur les coniques 148 Note) gefunden, und in einer verloren gegangenen Abhandlung soll er die ganze Theorie der Kegelschnitte auf jenen Satz gegründet haben. — Vgl. Grunert Anal. Geom. Theil II. S. 270 ff., wo der Beweis von Gergonne (Annales de Mathem. XVII. p. 143.) mitgetheilt ist. — Poncelet Traité des propriétés projectives des figures. p. 81. — J. Steiner Geom. Gestalten S. 150. und Annales de Math. Vol. XVIII. — Carnot Géometrie de position. Vol. II. p. 215. der Uebersetzung.

45.

Aus den vorhergehenden Sätzen erhellt, wie man folgende Aufgaben bloss mit Hülfe des Lineals lösen kann.

1) Wenn irgend drei Punkte eines Kegelschnitts, und die Tangenten in zweien gegeben sind, die Tangente im dritten Punkte zu finden (39.).

2) Wenn irgend vier Punkte eines Kegelschnitts, und die Tangente in einem derselben gegeben ist, die Tangenten in den drei übrigen Punkten zu finden (42.)

Denn in Taf. II. Fig. 8. sei die Tangente in A gegeben. Man bestimme die Punkte E, F, O, ziehe EO bis sie die gegebene Tangente in N schneidet, und verbinde N mit D, so hat man die Tangente in D, ziehe ferner FO bis sie die Tangenten in D und A in M und K schneidet, und verbinde M mit C, K mit B, so hat man die Tangenten in C, B.

3) Wenn irgend vier Tangenten eines Kegelschnitts und der Berührungspunkt der einen gegeben sind, die Berührungspunkte der drei übrigen zu finden.

4) Von einem Punkte, der im Umfange des Kegelschnitts liegt, an denselben eine Tangente zu ziehen. (Taf. III. Fig. 10.)

Man nehme ausser dem gegebenen Punkte A_1 noch vier andere an A_1, A_2, A_4, A_5, so dass A_1A_2, A_3A_4 sich in G_1, ferner A_2A_3, A_4A_5 sich in G_2 schneiden, ziehe G_1G_2, bis sie A_1A_5 in G_3 schneidet, und verbinde G_3 mit A_1, so ist A_1G_3 die gesuchte Tangente des Kegelschnitts.

46.

Theorem. Die Potenzcentra aller Systeme dreier Kreise, welche man erhält, wenn man die Halbmesser dreier gegebenen Kreise, ohne die Lage der Mittelpunkte zu ändern, um gleiche Grössen zugleich wachsen, oder zugleich abnehmen lässt, befinden sich stets in gerader Linie, welche auf der äussern Aehnlichkeitsaxe der gegebenen Kreise senkrecht steht.

Zum Beweise dieses Theorems sind folgende Vorbereitungen nöthig:

1) Im Punkte S (Taf. III. Fig. 11.) treffen 3 Gerade zusammen, auf deren mittleren die Gerade LM senkrecht ist; ferner seien von einem beliebigen Punkte P der Geraden SK auf SL und SM die Perpendikel PQ und PR gefällt, so behaupte ich, dass die Proportion statt finde

$$SQ:SR = SM:SL.$$

Denn wegen Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ SQP, SKL; SRP, SKM ist $SQ:SK = SP:SL$, $SR:SK = SP:SM$, also $SQ.SL = SK.SP$, $SR.SM = SK.SP$, daher $SQ.SL = SR.SM$, oder $SQ:SR = SM:SL$.

2) Umgekehrt wenn diese Proportion statt findet, und PQ, PR auf SL, SM senkrecht stehen, so muss LM auf SK senkrecht sein. Denn wenn dieses nicht wäre, so müsste das von L auf SK

gefällte Perpendikel die Gerade SM im Punkte M' so schneiden, dass $SQ:SR=SM':SL$ wäre, und dann müsste also $SM=SM'$ sein, welches ungereimt.

3) In Taf. III. Fig. 12. sind von beliebig vielen Punkten P, P', P'' etc. der Geraden $PP'P''$ auf zwei andere Gerade $RR'R''$, $QQ'Q''$ Perpendikel PQ, PR; $P'Q'$, $P'R'$; $P''Q''$, $P''R''$ etc. gefällt, so behaupte ich, dass die Gleichheit der Verhältnisse statt finde

$$QQ':RR'=QQ'':RR''=\text{etc.}$$

Denn zieht man durch P mit den Geraden $QQ'Q''$, $RR'R''$ Parallelen, welche die Perpendikel in q', q'' etc., r', r'' etc. schneiden, so ist $Pq':Pq''=PP':PP''$, $Pr':Pr''=PP':PP''$, also auch $Pq':Pq''=Pr':Pr''$, oder $Pq':Pr'=Pq'':Pr''$, oder $QQ':RR'=QQ'':RR''$.

4) Umgekehrt, wenn auf den Geraden QQ', RR' die Punkte Q, Q', Q'' etc., R, R', R'' etc. so gewählt sind, dass sich verhält $QQ':QQ''=RR':RR''$ etc., so müssen die Durchschnittspunkte der in diesen Punkten errichteten Perpendikel sich in gerader Linie befinden.

Denn schnitte die Gerade PP' das Perpendikel $P''Q''$ nicht in P'', welchen Punkt das letztere mit $P''R''$ gemein hat, so müsste das vom gedachten Durchschnitt auf RR' gefällte Perpendikel die letztere Gerade im Punkte $\mathfrak{R}''$ so treffen, dass $QQ':QQ''=RR':R\mathfrak{R}''$ wäre, und dann müsste nach der Voraussetzung $RR''=R\mathfrak{R}''$ sein, welches ungereimt ist.

5) Nun seien C, C', C'' die Mittelpunkte, r, r', r'' die Halbmesser dreier Kreislinien, und λ Dasjenige, um welches alle drei Halbmesser wachsen oder abnehmen; ferner seien Q, R die Durchschnitte der vom Potenzcentrum P auf die Centralen CC', CC'' gefällten Perpendikel mit diesen Centralen, P' das Potenzcentrum der mit den Halbmessern $r+\lambda$, $r'+\lambda$, $r''+\lambda$ beschriebenen mit den erstern concentrischen Kreise, und Q', R' die Durchschnitte der von eben diesem Potenzcentrum auf die nämlichen Centralen wie vorher gefällten Perpendikel mit dem letztern, so ist nach dem Obigen

$$QC=\frac{CC'^2+r^2-r'^2}{2CC'},\quad Q'C=\frac{CC'^2+(r+\lambda)^2-(r'+\lambda)^2}{2CC'},$$

also durch Subtraction $Q'C-QC=\frac{(r-r')\lambda}{CC'}$, oder $QQ'=\frac{(r-r')\lambda}{CC'}$, Ganz ebenso wird sein $RR'=\frac{(r-r'')\lambda}{CC''}$, also ist

$$\frac{QQ'}{RR'}=\frac{r-r'}{r-r''}\cdot\frac{CC''}{CC'}.$$

Hiernach ist das Verhältniss $QQ':RR'$ constant, weshalb (4) die Potenzcentra sämmtlich in einer geraden Linie liegen.

Die Richtung dieser Geraden zu bestimmen, bezeichnen wir durch L und M die äusseren Aehnlichkeitspunkte der Systeme C, C' und C, C'', so ist nach dem Obigen $LC=\frac{r\,.\,CC'}{r-r'}$, MC

$= \frac{r.CC'}{r-r''}$, also $\frac{MC}{LC} = \frac{r-r'}{r-r''} \cdot \frac{CC'}{CC''}$, und folglich nach dem Obigen

$$QQ' : RR' = MC : LC.$$

Ist aber S der Durchschnitt der Geraden PP' mit CM und wird die Gerade Sl' mit LC parallel gezogen, dass sie die Perpendikel PQ, $P'Q'$ in q, q', die Aehnlichkeitsaxe LM in l' schneidet, so ist $Sq : SR = QQ' : RR'$, also auch $Sq : SR = MC : LC$, und da $MC : LC = MS : Sl'$, so hat man $Sq : SR = MS : Sl'$, weshalb nach 2) die Gerade SPP' oder der Ort der Potenzcentra auf $l'M$ oder LM, d. h. auf der äussern Aehnlichkeitsaxe senkrecht steht.

Wenn man die Halbmesser theils wachsen, theils abnehmen liesse, so würde der Ort der Potenzcentra noch immer eine Gerade sein, welche auf einer der drei inversen Aehnlichkeitsaxen senkrecht stände, z. B. auf $Al'l''$, wenn man die Halbmesser r und r' wachsen, und r'' abnehmen lässt.

Dies weiter auszuführen ist unnöthig, da es mittelst obiger Principien unter einigen Modificationen leicht erhellt*).

47.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen steht der Ort der Potenzcentra auf einer Aehnlichkeitsaxe der Kreislinien, deren Halbmesser r, r', r'' sind, senkrecht, und da er aus demselben Grunde auf einer Aehnlichkeitsaxe der mit den Halbmessern $r+\lambda$, $r'+\lambda$, $r''+\lambda$ beschriebenen Kreise senkrecht ist, so entspringt folgendes Theorem, welches, so viel ich weiss, noch nicht bestimmt ausgesprochen ist:

Die Aehnlichkeitsaxen aller Systeme dreier Kreise, welche man erhält, wenn man die Halbmesser dreier gegebenen Kreise, ohne die Lage der Mittelpunkte zu ändern, um gleiche Grössen wachsen oder abnehmen lässt, sind alle unter sich und mit der Aehnlichkeitsaxe der gegebenen Kreise parallel.

V. Polarität der Kegelschnitte.

48.

Die Spitzen beliebig vieler über einer Geraden im Raum beschriebenen rechtwinkligen Triangel liegen in der um die nämliche Gerade als Diameter beschriebenen Kugelfläche.

Die Grundlinie aller Triangel sei AB und C die Spitze eines beliebigen unter ihnen, so muss die durch AB als Durchmesser gelegte Kugel nothwendig durch C gehen, weil die Kugel von je-

---

*) Man vergl. Grunerts Analyt. Geometrie Theil I. S. 117. Supplemente zum Wörterbuche Art. Anwendung der Analysis S. 22.

der Ebene in einem Kreise geschnitten wird, und der Winkel im Halbkreise ein rechter ist.

49.

Schneiden sich mehrere Ebenen in einem Punkte, und begegnen sie einer Kugelfläche, so liegen die Mittelpunkte der Kreise, in welchen sie die Kugel treffen, in derjenigen Kugel, welche die Entfernung des Durchschnittspunktes der Ebenen vom Mittelpunkte der gegebenen Kugel zum Durchmesser hat.

Bezeichnet man nämlich den Mittelpunkt der gegebenen Kugel durch C, den Durchschnittspunkt der Ebenen durch P, und ist M der Mittelpunkt eines Kreises, in welchem eine beliebige durch P gehende Ebene die Kugel trifft, so steht bekanntlich CM auf dieser Ebene senkrecht, so dass also CMP ein rechter Winkel ist. Da dies von jeder Ebene gilt, so erhellt die Richtigkeit des Theorems aus 48.

50.

Zusatz. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller sich in einem Punkt P schneidender Sehnen eines Kreises, dessen Mittelpunkt C, ist die um CP als Diameter beschriebene Kreislinie.

51.

Theorem. Durch einen und denselben Punkt C sind nach einer Geraden beliebig viele andere Gerade gezogen, welche der erstern in K, K', K'' etc. begegnen, und unter denen CK die Senkrechte auf die gegebene Gerade ist.

Wenn nun auf derselben Seite des Punktes C auf den Geraden CK, CK', CK'' etc. die Punkte M, M', M'' resp. so angenommen werden, dass die Rechtecke

$$CK.CM,\ CK'.CM',\ CK''.CM''\ \text{etc.}$$

sämmtlich gleich sind, so befinden sich M, M', M'' etc. in derjenigen Kreislinie, welche CM zum Durchmesser hat.

Beweis. Es sei $M^{(n)}$ ein beliebiger unter den Punkten M', M'' etc. und die Gerade $MM^{(n)}$ gezogen. Wegen der Gleichheit $CK.CM = CK^{(n)}.CM^{(n)}$ verhält sich $CK:CM^{(n)} = CK^{(n)}:CM$, weshalb die Triangel $CKK^{(n)}$, $CM^{(n)}M$ ähnlich, und also die Winkel $CKK^{(n)}$, $CM^{(n)}M$ gleich sind. Aber der erste ist ein rechter, also muss auch der zweite ein rechter sein, woraus die Richtigkeit des Theorems einleuchtet.

52.

Denkt man sich das ganze so eben charakterisirte System um CMK als Axe herumgedreht, so beschreibt die Gerade $KK'K''$ eine auf CMK senkrechte Ebene, und die Kreislinie $CMM'M''$ eine Kugel, deren Diameter CM ist, weshalb folgendes Theorem entspringt:

Zieht man von einem Punkte C nach einer Ebene beliebig viele Gerade, die ihr in K, K', K'' etc. begegnen, ist ferner CK auf der Ebene senkrecht, und werden die Punkte M, M', M'' etc. auf gedachten Geraden so bestimmt, dass die Rechtecke $CK \cdot CM$, $CK' \cdot CM'$, $CK'' \cdot CM''$ etc. sämmtlich gleich sind, so befinden sich M, M', M'' etc. in der um CM als Diameter beschriebenen Kugelfläche.

53.

Die Theoreme in 51. und 52. sind der Umkehrung fähig, so dass, wenn die Punkte M, M', M'' in der Kugelfläche oder Kreislinie um CM als Durchmesser liegen, und gedachte Rechtecke gleich sind, die Punkte K, K', K'' in der auf CM senkrechten Ebene oder geraden Linie liegen.

54.

Jetzt sei C der Mittelpunkt einer Kugel, welche von mehreren Kreisebenen, die sich in demselben Punkte M schneiden, getroffen wird; um jede dieser Kreislinien denke man sich die die Kugelfläche berührende Kegelfläche beschrieben, und die Spitzen aller der Kegelflächen werden K, K', K'' etc. genannt. Die Geraden CK, CK', CK'' etc. werden durch die Mittelpunkte der resp. Kreise M, M', M'' etc. gehen, und für die beliebigen Punkte A, A', A'', etc. in den Kreislinien, welche durch denselben Punkt M gehen, werden die Winkel CAK, $CA'K'$, $CA''K''$ etc. rechte sein. Deshalb müssen, da AM, $A'M'$, $A''M''$ etc. auf CMK, $CM'K'$, $CM''K''$ etc. in M, M', M'' etc. senkrecht sind, die Rechtecke $CK \cdot CM$, $CK' \cdot CM'$, $CK'' \cdot CM''$ etc. sämmtlich gleich, nämlich jedes gleich dem Quadrat des Radius der gegebenen Kugel sein. Da nun (49.) die Punkte M, M', M'' etc. in der um CM als Diameter beschriebenen Kugel liegen, so müssen (53.) die Punkte K, K', K'' etc. in der auf CM in K senkrechten Ebene sich befinden, und wir haben das folgende Theorem:

Gehen die Ebenen beliebig vieler Kreislinien, in denen eine Kugelfläche geschnitten wird, durch einen und denselben Punkt, so liegen die Spitzen der um jene Kreislinien beschriebenen und die Kugel berührenden Kegelflächen jederzeit in derjenigen Ebene, welche auf der den Durchschnittspunkt der erstern Ebene mit dem Mittelpunkt der Kugel verbindenden Geraden senkrecht steht, und umgekehrt, wenn die Spitzen mehrerer Kegelflächen, welche sämmtlich um eine und dieselbe Kugel beschrieben sind, alle in einer Ebene liegen, so gehen die Ebenen der Kreise, in denen die Kugelfläche von den Kegelflächen berührt wird, durch einen einzigen Punkt, und die den letztern mit dem Mittelpunkt der Kugel verbindende Gerade steht auf erst gedachter Ebene senkrecht.

Der in Rede stehende Durchschnittspunkt ist **Pol** der Ebene, welche die Spitzen der Kegelflächen enthält, in Bezug auf die gegebene Kugel, und die Ebene **Polarebene** genannt worden.

Digitized by Google

Man vergl. den Beweis unseres Satzes von Grunert in der analyt. Geometrie Theil I. S. 283 — 87.

55.

Zusatz. Schneiden sich beliebig viele Sehnen eines Kreises, dessen Mittelpunkt C, in demselben Punkte M, und construirt man in den beiden Endpunkten jeder Sehne die Tangenten des Kreises, so liegen die Durchschnittspunkte aller Tangentenpaare in einer einzigen geraden Linie, welche auf CM senkrecht steht, und umgekehrt.

Die Gerade heisst Polare jenes Punktes, und dieser Pol der Geraden in Bezug auf die zu Grunde gelegte Kreislinie.

56.

Der Satz 55. behält seine Richtigkeit für alle Kegelschnitte.

Denn es sei S die Spitze des Kegels, zu welchem der Schnitt gehört, und AB, $A'B'$, $A''B''$ beliebig viele in demselben Punkte M zusammenkommende Sehnen des Kegelschnitts, so dass SM die Durchschnittslinie der Ebenen SAB, $SA'B'$, $SA''B''$ ist. Wird nun der Kegel von einer Ebene geschnitten, dass der Schnitt ein Kreis wird, und begegnen die Seiten des Kegels SA, SB; SA', SB' etc. der Peripherie des Kreises in a, b; a', b' etc., so werden auch die Kreissehnen ab, $a'b'$ etc. in demselben Punkte m zusammentreffen, welcher der Durchschnitt der Geraden SM mit der Kreisebene ist, indem dieser Punkt z. B. in den Ebenen Sab und der Kreisebene zu gleicher Zeit, also in ihrer Durchschnittslinie ab ist.

Nun seien K, K', K'' .... die Durchschnitte der Tangentenpaare in A, B, in A', B', in A'', B'' etc., und k, k', k'' .... die Durchschnitte der Tangentenpaare in a, b, in a', b', in a'', b'' etc., so werden SKk, $SK'k'$, $SK''k''$ etc. gerade Linien sein, da z. B. SK sowohl als Sk die Durchschnittslinie der durch SAa, SBb gehenden Berührungsebene des Kegels ist. Nach 55. liegen aber die Punkte k, k', k'' etc. in gerader Linie, weshalb Sk, Sk', Sk'' in einer Ebene sind, in welcher die Punkte K, K', K'' .... liegen. Die letztern Punkte sind aber auch in der Ebene des Kegelschnitts, mithin im Durchschnitt beider Ebenen, d. h. in gerader Linie, welche die Polare mit Rücksicht auf den Durchschnitt der Sehnen als Pol für den zu Grunde gelegten Kegelschnitt genannt wird.

57.

Um die Polare eines ausserhalb des Kreises gegebenen Punktes M zu finden, muss man (nach 55.) durch M eine beliebige den Kreis in zwei Punkten A', B' schneidende Gerade ziehen, und den Durchschnittspunkt der durch letztere Punkte gehenden Tangenten des Kreises K' suchen; fällt man dann von K' auf CM das Perpendikel, so ist dieses die verlangte Polare. Dieselbe lässt sich aber einfacher mittelst des folgenden Theorems bestimmen:

Die Polare eines ausserhalb des Kreises befindlichen Punktes ist die Gerade, welche die Berührungs-

punkte der von dem in Rede stehenden Punkte an die Kreislinie gezogenen Tangenten mit einander verbindet.

Beweis. In Taf. III. Fig. 13. sei M der Punkt, dessen Polare gesucht wird, MA eine beliebige Gerade, AK' die Tangente in A, CD senkrecht auf MA, so dass K' der Durchschnitt der Tangenten in A und A' ist, und endlich $K'K$ senkrecht auf CM, so wird $K'K$ die Polare des Punktes M sein (55.). Diese Gerade schneide die Kreislinie in B, so behaupte ich, dass MB den Kreis tangirt.

Denn da die Punkte D, K, M, K' in einer Kreislinie liegen, welche nämlich um MK' als Diameter beschrieben ist, so ist bekanntlich $CD \,.\, CK' = CK \,.\, CM$, und da $CD \,.\, CK' = CA^2$, so wird $CK \,.\, CM = CB^2$ sein, folglich CBM ein rechter Winkel, also BM eine Tangente des Kreises.

58.

Dieses Resultat bleibt für alle Kegelschnitte wahr.

Denn es sei S die Spitze des Kegels, M ein Punkt in der Ebene des Kegelschnitts, und m der Durchschnitt der Geraden SM mit einer Ebene, welche so gelegt ist, dass der Schnitt mit dem Kegel ein Kreis wird. Von m seien an die Kreislinie die Tangenten mb, mb' gezogen, so ist (57.) bb' die Polare von m für den Kreis, und der Durchschnitt der Ebene Sbb' mit dem Kegelschnitt wird die Polare des Punktes M für den Kegelschnitt sein (56.). Dieser Durchschnitt treffe den Kegelschnitt in B und B', so müssen MB, MB' Tangenten des letztern sein, weil sie in den durch Sbm, $Sb'm$ gelegten Berührungsebenen des Kegels liegen.

59.

Construction von Pol und Polare in Bezug auf eine gegebene Kreislinie.

1) Befindet sich der Punkt M, dessen Polare gesucht wird, in der Kreislinie selber, so ist die Tangente des Kreises durch M die Polare dieses Punktes, und dasselbe gilt von jedem Kegelschnitt.

2) Befindet sich der Punkt M ausserhalb der Kreislinie, so ist seine Polare diejenige Gerade, welche die Berührungspunkte der von M an den Kreis gezogenen Tangenten verbindet, und dasselbe gilt von jedem Kegelschnitt.

3) Befindet sich aber der Punkt M innerhalb der Kreislinie, deren Mittelpunkt C, so errichte man auf CM in M eine Senkrechte, welche der Kreislinie in B begegnet, und ziehe in B die Tangente, so wird deren Durchschnitt mit CM einen Punkt bestimmen, durch welchen die gesuchte Polare mit MA parallel geht.

Diese Construction gilt nicht für jeden Kegelschnitt, vielmehr läuft die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt dem conjugirten Durchmesser desjenigen parallel, welcher durch jenen Punkt gezogen werden kann (Magnus Sammlung analytischer Aufgaben S. 163.), was ich bei einer andern Gelegenheit synthetisch erweisen werde.

Wie man sich zu verhalten hat, um einer Geraden Pol zu finden, ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich.

Digitized by Google

60.

Construction von Pol und Polare für jeden Kegelschnitt bloss mit Hülfe des Lineals.

Statt des Kreises in Taf. II. Fig. 8. denke man sich einen ganz beliebigen Kegelschnitt gezeichnet, und betrachte E oder O als den Punkt, dessen Polare gesucht wird.

Was den ersten Punkt betrifft, so ist K der Pol von EA, M der Pol von ED (58.), also (56.) KM die Polare von E. Die Gerade KM geht aber, wie oben gezeigt, durch die Durchschnittspunkte der Geraden AD, BC; AC, BD, weshalb sich ihre Richtung mit alleiniger Hülfe des Lineals finden lässt.

Für den zweiten innerhalb des Kegelschnitts gelegenen Punkt O die Polare zu bestimmen, erinnere man sich, dass H der Pol von AC, G der Pol von BD (58.), also GH die Polare von O ist (56.). Nun liegen aber die Punkte G, H, F, E in einer Geraden (42.), folglich geht die Polare von O durch die Punkte E und F, welche sich bloss mit Hülfe des Lineals construiren lassen.

Daraus fliesst folgende für alle Fälle passende Auflösung unserer Aufgabe:

Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt zu finden, ziehe man durch denselben irgend zwei den Kegeschnitt schneidende Gerade, und verbinde die jedesmaligen vier Durchschnittspunkte durch zwei Paar Geraden, so ist die durch die Durchschnittspunkte dieser Geradenpaare bestimmte Gerade die verlangte Polare.

Wird der Pol einer Geraden gesucht, so bestimme man zu zwei beliebigen Punkten der letztern die Polaren, so wird deren Durchschnitt den Pol geben.

Da übrigens (Taf. II. Fig. 8.), wenn der gegebene Punkt E ausserhalb des Kegelschnitts liegt, und P, P' die Durchschnitte seiner Polaren mit dem Kegelschnitt sind, die Geraden EP, EP' den letztern tangiren, so übersieht man, wie von einem ausserhalb des Kegelschnitts gegebenen Punkte die beiden Tangenten durch blosse Anwendung des Lineals gefunden werden können.

61.

Zufolge des Theorems in 58. kann man das Fundamentaltheorem der Polarität (56.) jetzt auf den einfachen Ausdruck bringen:

Die Polaren beliebig vieler in einer Geraden befindlicher Punkte treffen in einem einzigen Punkte, dem Pol jener Geraden zusammen, und die Pole beliebig vieler in einem Punkt zusammentreffender Geraden befinden sich in einer einzigen Geraden, der Polare jenes Punktes.

Oder bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich seine Polare um den Pol jener Geraden, und dreht sich eine Gerade um einen festen Punkt, so bewegt sich ihr Pol in der Polare jenes Punktes.

62.

Geben wir nun zur Untersuchung des Orts der Pole aller einander paralleler Geraden über, und betrachten zuerst die Kreislinie.

Nach dem Vorhergehenden liegt der Pol jeder beliebigen Geraden in Bezug auf eine Kreislinie jederzeit auf derjenigen Geraden, welche vom Mittelpunkt des Kreises auf die gegebene Gerade senkrecht gezogen ist, und auf eben dieser Geraden werden also die Pole aller einander parallelen Geraden liegen.

Nun sei S die Spitze des Kegels, zu welchem ein Kegelschnitt gehört, und AB, $A'B'$, $A''B''$ etc. seien beliebig viele in der Ebene des letztern befindliche parallele Gerade, ab, $a'b'$, $a''b''$ etc. die Durchschnitte der Ebenen SAB, $SA'B'$, $SA''B''$ etc. mit einer Kreisebene, welche den Kegel trifft, so behaupte ich, dass ab, $a'b'$, $a''b''$ etc. entweder sämmtlich parallel sind, oder in einem einzigen Punkt zusammentreffen.

Denn die Ebene SAB wird von jeder der andern Ebenen $SA'B'$, $SA''B''$ etc. in einer durch S gehenden Geraden geschnitten, welche mit AB (auch mit der Ebene des Kegelschnitts) parallel läuft, und alle diese Ebenen treffen folglich in einer durch S gehenden Geraden zusammen, die mit dem Kegelschnitt parallel.

Trifft es jetzt zu, dass diese Gerade auch mit der Kreisebene parallel ist (was sich dann ereignet, wenn sie mit der Durchschnittslinie der Ebenen des Kreises und des Kegelschnitts parallel), so müssen auch die Geraden ab, $a'b'$, $a''b''$ etc. offenbar parallel sein.

Wenn aber die Durchschnittslinie der Ebenen SAB, $SA'B'$, $SA''B''$ etc. der Kreisebene in K begegnet, so muss dieser Punkt in jeder der Geraden ab, $a'b'$, $a''b''$ etc. liegen, so dass also die letztern in demselben Punkte zusammenstossen. Damit ist obige Behauptung gerechtfertigt.

Sind nun p, p', p'' etc. die Pole von ab, $a'b'$, $a''b''$ etc., in Bezug auf den Kreis, P, P', P'' etc. die Pole von AB, $A'B'$, $A''B''$ etc. in Bezug auf den Kegelschnitt, so liegen p, p', p'' etc. in einer einzigen Geraden, ihre Polaren mögen in einem Punkte zusammentreffen, oder parallel sein (55, 62.), und da P, P', P'' etc. auf den Geraden Sp, Sp', Sp'' etc. liegen, so befinden sie sich sowohl in der durch letztere Gerade bestimmten Ebene als in der Ebene des Kegelschnitts, und müssen alle selbst in einer Geraden liegen.

Also hat man folgendes Theorem:

Die Pole eines Systems paralleler Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen jederzeit in gerader Linie, welche der parallelen Richtung conjugirter Durchmesser genannt wird.

63.

Zieht man durch die Spitze des Kegels S mit der Geraden AB eine parallele Gerade, die der Kreisebene in K begegnet, und bestimmt die Polare des Punktes K in Bezug auf den Kreis, so ist nach 62. die Durchschnittslinie der durch diese Polare und S gelegten Ebene mit dem Kegelschnitt der der Geraden AB conjugirte Durchmesser für den Kegelschnitt.

Sind nun CD, EF etc. beliebig viele andere Gerade in des

Kegelschnitts Ebene, und L, M etc. die Durchschnitte der durch S mit CD, EF parallelen Geraden mit der Kreisebene, bestimmt man ferner die Polaren der Punkte L, M in Bezug auf den Kreis, so werden die Durchschnittslinien aller durch diese Polaren und S gelegten Ebenen mit dem Kegelschnitt die conjugirten Durchmesser der Geraden CD, EF sein.

Die Punkte K, L, M, welche in der durch S mit dem Kegelschnitt parallelen Ebene und der Ebene des Kreises zu gleicher Zeit liegen, müssen sich in beider Ebenen Durchschnittslinie, also in einer Geraden befinden, und ihre Polaren ab, cd, ef folglich in einem Punkte p schneiden oder parallel sein. Daher werden im ersten Falle auch die durch Sab, Scd, Sef gelegten Ebenen den Kegelschnitt in Geraden treffen, welche in einem einzigen Punkte P zusammenkommen, der nämlich der Durchschnitt der Geraden Sp mit dem Kegelschnitt ist. Im zweiten Falle müssen, wie in 62. gezeigt ist, benannte Geraden entweder sich in einem Punkt schneiden, oder parallel sein.

Also hat man folgendes Theorem:

Alle conjugirten Durchmesser, welche beliebig vielen Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt zugehören, schneiden sich in einem und demselben Punkte (Mittelpunkt des Systems) oder sie sind einander parallel.

64.

Theorem. Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist die Potenzlinie zweier Kreise, von denen der eine der gegebene, der andere um die Entfernung des in Rede stehenden Punktes vom Mittelpunkt des Kreises als Diameter beschrieben ist.

Beweis. Der gegebene Punkt P liege zuerst ausserhalb der Kreislinie C. Schneidet die um CP als Diameter beschriebene Kreislinie die gegebene in B und B', so ist die Sehne BB' beider Kreise Potenzlinie, und zugleich die Polare von P für den Kreis C, da PB und PB', als auf CB und CB' senkrecht, Tangenten des gegebenen Kreises sind.

Liegt der Punkt in der Kreislinie C, so berühren beide Kreise einander in P und ihre gemeinschaftliche Tangente ist nicht nur beider Potenzlinie, sondern auch des Punktes P Polare.

Befindet sich der Punkt P endlich innerhalb der Kreislinie C, so sei PB senkrecht auf CP, in B die Tangente BK an den Kreis gezogen, welche CP in K schneidet, und durch K eine Parallele mit BP gezogen, welche also die Polare von P sein wird. Nun ist, wenn C'' der Mittelpunkt des zweiten Kreises, $CK^2 - C'K^2 = CC'(CK + C'K) = CC'(2CK - CC'') = CP \times CK - CC'^2 = CB^2 - CC'^2$. Da also die Quadratdifferenz der Entfernungen des Punktes K von den Mittelpunkten C, C' dem Quadratunterschied der Radien gleich, so muss die durch K auf CP senkrechte Gerade beider Kreise Potenzlinie sein, w. z. B. w.

65.

Die Proposition in 61. ist sehr geeignet, um zu jedem Satze,

Digitized by Google

der keine metrische Bestimmung enthält, einen correlativen aufzufinden, indem, wenn von Geraden bekannt ist, dass sie in einem Punkte zusammentreffen, stets Punkte nachgewiesen werden können, welche in einer geraden Linie liegen. Dieses Princip ist zuerst von Gergonne (Annales de Mathématiques Tom. XVI. p. 210.) erforscht und Dualität oder Dualismus genannt worden. J. Steiner (Geometr. Gestalten) hat es überall auf geistreiche Weise durchgeführt, und gezeigt, dass es mit den Grundgebilden zugleich hervortritt. Wir wollen das Princip auf einige der erwiesenen Sätze anwenden.

66.

In 39. ist erwiesen, dass die Punkte D, E, F (Taf. II. Fig. 7.) in gerader Linie liegen.

Nun ist A der Pol von MD, L der Pol von CB, also der Durchschnitt der Geraden MD, CB oder D der Pol von AL; ebenso ist E der Pol von BM, F der Pol von CK. Die drei Polaren der Punkte D, E, F, nämlich AL, BM, CK, treffen daher in demselben Punkte zusammen. Also stehen die folgenden Sätze im Verhältniss des Dualismus

Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreieck liegen die 3 Punkte in welchen die Seiten von den Tangenten in den Gegenecken getroffen werden, in einer Geraden.	Bei jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Dreieck treffen die 3 Geraden, welche die Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbinden, in einem einzigen Punkte zusammen.

67.

In Taf. II. Fig. 8. liegen die Punkte E, F, G, H in gerader Linie. Nun ist KM die Polare von E, LN die Polare von F, BD die Polare von G, AC die Polare von H, weshalb KM, LN, AC, BD in demselben Punkt zusammentreffen.

Also

Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Viereck liegen die Durchschnittspunkte der Gegenseiten mit den Durchschnittspunkten der Tangenten in den Gegenecken in einer Geraden.	Bei jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Viereck gehen die Geraden, welche die Gegenecken verbinden, und die Geraden, welche die Berührungspunkte der gegenüberstehenden Seiten vereinigen, durch einen und denselben Punkt.

Ferner ist (Taf. II. Fig. 8.) erwiesen, dass die Punkte N, L, E in einer Geraden sind, weshalb die Polaren dieser Punkte, nämlich AD, BC, KM, in einem Punkte F zusammentreffen.

Digitized by Google

Also

Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Viereck liegt der Durchschnittspunkt zweier Gegenseiten mit den Durchschnittspunkten der Tangentenpaare in je zwei anstossenden Ecken, welche nicht auf einer der Gegenseiten zugleich sind, stets in einer Geraden.	Bei jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Viereck trifft die Gerade, welche zwei Gegenecken verbindet, mit den beiden Geradenpaaren, welche je zwei anstossende Berührungspunkte, die nicht auf den in einer der in Betracht kommenden Ecken zusammenstossenden Tangenten zugleich liegen, verbindet, jederzeit in einem einzigen Punkte zusammen.

68.

In Taf. III. Fig. 9. sei $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ ein um den Kegelschnitt beschriebenes Sechseck, dessen Seiten durch die Ecken des eingeschriebenen $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ gehen. Oben ist erwiesen, dass die Punkte G_1, G_2, G_3 in gerader Linie liegen. Nun ist $a_1 a_4$ die Polare von G_1, $a_2 a_5$ die Polare von G_2, $a_3 a_6$ die Polare von G_3, also müssen $a_1 a_4$, $a_2 a_5$, $a_3 a_6$ in einem Punkt zusammentreffen. Daher folgende Dualität:

Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseck liegen die drei Durchschnittspunkte der Seitenpaare, zwischen denen je zwei andere liegen, in einer Geraden (Pascal, Essai sur les coniques).	Bei jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Sechseck treffen die 3 Geraden, welche die Eckenpaare, zwischen denen zwei andere liegen, vereinigen (die Hauptdiagonalen), in einem und demselben Punkt zusammen (Brianchon, Journal de l'Ecole Polytechnique Cah. XIII.).

Ferner liegen auch die Punkte K_1, K_2, K_3 in einer Geraden, und folglich schneiden sich $A_1 A_4$, $A_2 A_5$, $A_3 A_6$ in demselben Punkte, in welchem sich auch $a_1 a_4$, $a_2 a_5$, $a_3 a_6$ schneiden. Daher das umfassendere Theorem:

Sind zwei Sechsecke einem Kegelschnitt eingeschrieben und umschrieben, dass des letztern Seiten durch die Spitzen des erstern gehen, so

liegen die 6 Durchschnittspunkte der Hauptsehnen und Haupttangenten beider Sechsecke stets in gerader Linie.	schneiden sich die 6 Hauptdiagonalen in einem und demselben Punkte.

69.

Auf ganz ähnliche Art entspringt folgender Dualismus bei dem Fünfeck am Kegelschnitt.

Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Fünfeck liegen die Durchschnittspunkte irgend zweier Seitenpaare, und der Durchschnittspunkt, welchen die jedesmalige fünfte Seite mit der Tangente in der Gegenecke bildet, stets in einer Geraden.

Bei jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Fünfeck treffen die Diagonalen, welche irgend zwei Eckenpaare vereinigen, und die Gerade, welche die jedesmalige fünfte Ecke mit dem Berührungspunkte der Gegenseite verbindet, in einem einzigen Punkte zusammen.

VI. Harmonische Punkte und Strahlen.

70.

Auf einer Geraden denke man sich zwei Punkte A, B, und zwischen ihnen einen dritten C angenommen; wir suchen auf der nämlichen Geraden einen Punkt D, der so beschaffen ist, dass das Verhältniss $AC : BC$ dem Verhältnisse $AD : BD$ gleich ist.

Zunächst ist klar, dass, wenn C in der Mitte zwischen A und B liegt, ein solcher Punkt D nicht existirt.

Liegt aber der Punkt C bei B näher als bei A, dass also $AC > BC$, so kann D nicht auf der Verlängerung der Geraden über A hinaus liegen, weil die Proportion $AC : BC = AD : BD$ verlangt, dass zu gleicher Zeit $AC > BC$, $AD > BD$, was nicht sein würde. Auch kann D sich nicht zwischen A und B befinden, denn es würde folgen $AC + BC : AC = AD + BD : AD$, d. i. $AB : AC = AB : AD$, also $AC = AD$.

Dagegen giebt es auf der Verlängerung unserer Geraden über B hinaus in der That einen, aber auch nur einen einzigen Punkt D, welchem die verlangte Eigenschaft zukommt. Denn man suche die vierte Proportionale zu $AC - BC$, AC, AB, und schneide dieselbe, welche grösser als AB sein wird, von A aus auf der Geraden AB ab, so wird man einen Punkt D erhalten, für welchen $AC - (AC - BC) : AC = AD - AB : AD$, d. i. $BC : AC = BD : AD$, oder $AC : BC = AD : BD$ ist. Dass es nur einen solchen Punkt D giebt, ist daraus klar, dass die Proportion $AC : BC = AD : BD$ diese andere $AC - BC : AC = AB : AD$ erfordert, und zu den 3 ersten Gliedern der letztern nur eine einzige vierte Proportionale gefunden werden kann.

Umgekehrt liegt der Punkt D auf der Verlängerung der Geraden AB über B hinaus, so existirt auf dieser Geraden nur ein einziger Punkt C, für welchen $AD : BD = AC : BC$ ist, und zwar befindet sich C stets zwischen A und B, und liegt näher bei B als bei A.

Daraus folgt, dass für keine vier Punkte auf einer Geraden die Verhältnisse der Entfernungen zweier auf einander folgenden Punkte vom dritten und vierten gleich sind, dass dies vielmehr nur für die abwechselnden Punkte gilt.

Wenn vier Punkte auf einer Geraden so auf einander folgen: A, C, B, D, und wenn die Proportion statt findet $AC : BC = AD : BD$ (wo also C näher bei B als bei A liegt), so werden

dieselben **vier harmonische Punkte** genannt, und zwar heissen A und B sowohl, als C und D **zugeordnete** harmonische Punkte.

Dem Mittelpunkte von AB entspricht dann gewissermaassen ein in der Geraden unendlich entfernter Punkt.

Harmonische Strahlen oder Harmonikalen (Steiner) (faisceau harmonique nach Brianchon) nennt man vier durch harmonische Punkte gehende und in einem einzigen Punkte zusammentreffende Gerade.

71.

Aus 70. wird man zu jeden 3 Punkten den vierten harmonischen Punkt finden können, indem man zu 3 Geraden die vierte Proportionale sucht. Es lassen sich aber einfachere Auflösungen dieser Aufgabe geben, wenn man die Harmonikalen in Betracht zieht, und dazu bahnen folgende Betrachtungen den Weg.

In Taf. III. Fig. 14. gehen vom Punkte O aus nach beliebigen 4 Punkten einer Geraden A, C, B, D vier Strahlen, und durch A sei eine Gerade mit dem Strahl OD parallel gezogen, welche von den andern drei Strahlen in A, c, b geschnitten wird.

Dann behaupte ich, dass das Doppelverhältniss

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$$

dem einfachen Verhältniss $Ac:bc$ gleich sei.

Denn wegen der Parallelität der Geraden Ab und OD ist $\frac{AD}{BD}=\frac{Ob}{OB}$; aber wenn man bm parallel mit Oc zieht, $\frac{Ob}{OB}=\frac{Cm}{CB}$, also ist $\frac{AD}{BD}=\frac{Cm}{CB}$, und folglich $\frac{AD}{BD}:\frac{AC}{BC}=\frac{Cm}{CB}:\frac{AC}{BC}=\frac{Cm}{AC}$. Da endlich $\frac{Cm}{AC}=\frac{cb}{Ac}$, so wird sein $\frac{AD}{BD}:\frac{AC}{BC}=\frac{cb}{Ac}$, oder umgekehrt $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{Ac}{bc}$.

Daraus fliesst, dass das Doppelverhältniss $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$ von der Lage der Geraden $ACBD$, wenn sie nur immer durch A geht, ganz unabhängig ist, dass also z. B. $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{AC'}{B'C'}:\frac{AD'}{B'D'}$ ist. Dieses Resultat gilt aber in der That auch noch für jede beliebige nicht durch A gehende Gerade. Denn wenn eine solche die vier Strahlen in A'', B'', C'', D'' schneidet, so überzeugt man sich leicht, dass, wenn AD' parallel mit $A''D''$ gezogen wird, stets die Relation statt hat $\frac{A''C''}{B''C''}:\frac{A''D''}{B''D''}=\frac{AC'}{B'C'}:\frac{AD'}{B'D'}$, weshalb auch $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{A''C''}{B''C''}:\frac{A''D''}{B''D''}$ sein wird.

Also folgendes Theorem:

Wenn vier von einem Punkte O ausgehende Strahlen von zwei Geraden resp. in A, A'; B, B'; C, C' geschnitten werden, so sind die Doppelverhältnisse $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$, $\frac{AC'}{B'C'}:\frac{AD'}{B'D'}$ stets einander gleich.

Digitized by Google

Daraus ist ersichtlich, wie man zu verfahren hat, um, wenn vier in gerader Linie liegende Punkte A, C, B, D, und drei in einer andern Geraden liegende Punkte A', C', B' gegeben sind, auf der letztern Geraden den Punkt D' so zu bestimmen, dass jene Doppelverhältnisse gleich sind.

72.

Zusatz. Vier Strahlen, die eine Gerade in harmonischen Punkten treffen, theilen jede andere Gerade harmonisch (Brianchon), und ist diese Gerade mit einem äussersten Strahl parallel, so wird sie von den 3 andern harmonischen Strahlen in 3 Punkten getroffen, deren äussere von dem mittlern gleiche Entfernung haben.

Nun seien in Taf. III. Fig. 14. die Punkte A, C, B, D harmonisch, und Ab parallel mit OD, so wird $Ac = bc$ sein.

Um also zu 3 Punkten A, C, B den dem C zugeordneten harmonischen Punkt zu finden, ziehe man durch einen beliebigen Punkt O die Strahlen OA, OB, OC, halbire AO in n, ziehe nc parallel mit OB bis sie OC in c schneidet, verbinde A mit c, und ziehe durch O mit Ac eine Parallele, welche die Gerade ABC in D trifft, so ist D der harmonische Punkt.

73.

Bestimmen wir jetzt den geometrischen Ort der Spitzen aller über und unter einer Geraden AB beschriebenen Triangel, deren beide andere Seiten ein constantes Verhältniss zu einander haben.

Wir nehmen das Verhältniss von der Einheit verschieden, weil in diesem Falle der Ort eine im Mittelpunkte von AB auf der letztern senkrechte Gerade ist, wie sogleich erhellet.

Ist C ein Punkt in der Geraden AB, und das Verhältniss $AC : BC$ dem Verhältnisse $OA : OB$ gleich, wo O die Spitze eines der in Betracht kommenden Dreiecke ist, so muss (Euclid Lib. VI prop. 3.) die Gerade OC den Winkel AOB halbiren, und ebenso muss, wenn D in der Verlängerung von AB über B hinaus so liegt, dass $AD : BD = OA : OB = AC : BC$, die Gerade DO den Nebenwinkel von AOB (der durch die Verlängerung von AO entsteht) halbiren. Die Geraden OC und OD werden dann auf einander senkrecht stehen, und dies findet für jeden Punkt O statt, für welchen $OA : OB$ jedem der Verhältnisse $AC : BC$, $AD : BD$ gleich ist.

Bewegt sich daher O so fort, dass das Verhältniss $OA : OB$ constant bleibt, so rückt er in der Spitze des über CD beschriebenen rechtwinkligen Triangels fort, die bekanntlich in der um CD als Diameter beschriebenen Kreislinie liegt, welche somit der gesuchte Ort sein wird. Zugleich hat sich ergeben, dass A, B, C, D harmonische Punkte sind.

Wenn also vom Punkte O nach 3 Punkten A, C, B Strahlen so gehen, dass der mittlere den von den beiden andern gebildeten Winkel halbirt, so geht der auf eben diesem senkrechte Strahl jederzeit durch den vierten

harmonischen Punkt zu den Punkten A, C, B, welcher dem C zugeordnet ist.

Also auch wenn man zu den Endpunkten C, D eines Diameters und zu einem dritten Punkte B in demselben den dem letzteren zugeordneten vierten harmonischen Punkt A sucht, so werden die von einem beliebigen Punkte O der Kreisperipherie nach B, A gezogenen Geraden dasselbe Verhältniss bewahren, wie man den Punkt O annehmen mag, und die Strahlen OC, OD werden den Winkel AOB, und des letztern Nebenwinkel halbiren.

74.

Es seien wieder C, D Endpunkte eines Kreisdiameters, und B ein beliebiger (vom Mittelpunkte verschiedener) Punkt auf demselben, der innerhalb des Kreises liegt. Ist nun BO senkrecht auf CD, und in O eine Tangente des Kreises gezogen, die den Diameter in A trifft, so wird A zu C. D, B der vierte harmonische Punkt sein. Denn der Winkel AOC ist $= ODC$ (Euclid Lib. III. prop. 32.) und $ODC = COB$, also $AOC = COB$, so dass AOB von CO halbirt wird.

Um also zu den Endpunkten eines Kreisdiameters, und zu einem dritten Punkte auf demselben den vierten harmonischen Punkt zu finden, verfahre man so:

Liegt der dritte Punkt B innerhalb des Kreises, so errichte man BO senkrecht auf den Diameter CD, dass sie die Peripherie in O trifft, und ziehe von O die Tangente, welche CD in A trifft, so ist A der gesuchte dem B zugeordnete harmonische Punkt.

Liegt der Punkt A ausserhalb der Kreislinie, so ziehe von A an den Kreis eine Tangente, welche ihn in O berührt, und fälle OB senkrecht auf CD, dass sie der letztern in B begegnet, so ist B der vierte dem A zugeordnete harmonische Punkt.

75.

Lehrsatz. Zwei Kreise seien concentrisch, ihr gemeinsamer Mittelpunkt M. Man ziehe einen beliebigen Diameter, welcher den einen Kreis (etwa den grösseren) in A, B, den andern in D schneidet, und suche zu A, B, D den vierten harmonischen Punkt E. Bewegt sich nun der Durchmesser um den Mittelpunkt M, so behaupte ich, dass der zu seinen Endpunkten in dem grössern Kreise und zu dem einen Endpunkte im kleinern Kreise vierte harmonische Punkt in einer mit den gegebenen concentrischen Kreislinie fortrückt.

Beweis. Man ziehe DO senkrecht auf AM bis es die concentrische Kreislinie in O trifft, und OE senkrecht auf OM bis es AM in E trifft, so ist E der vierte harmonische Punkt zu A. B, D (74.). Aber es ist jetzt $DO^2 = DE \times DM$, und da DO, DM constant bleiben, so ist auch DE, folglich auch ME constant, w. z. b. w.

76.

Lehrsatz. Zieht man durch den Berührungspunkt

zweier sich tangirender Kreise beliebig viele Gerade, welche dieselben jede in einem Punkte schneiden werden, und bestimmt zu jedem Paar der Durchschnittspunkte und dem Berührungspunkte den vierten harmonischen Punkt, so liegen alle diese vierten Punkte in einer Kreislinie, welche beide gegebene in ihrem gemeinsamen Berührungspunkt tangirt.

Beweis. In Taf. III. Fig. 15. sei DBE die Centrale zweier sich in B berührender Kreise, A zu D, E, B der vierte dem B zugeordnete harmonische Punkt; $D'BE'$ eine andere Gerade, A' zu D', E', B der vierte harmonische Punkt. Zieht man DD', EE', AA', so ist $DB:EB = DA:EA$, $D'B:E'B = D'A':E'A'$; aber da DD' und EE' parallel (jede auf $D'E'$ senkrecht), so ist $DB:EB = D'B:E'B$, also auch $DA:EA = D'A':E'A'$, folglich muss AA' parallel mit EE' oder mit DD' sein. Da hiernach der Winkel $BA'A$ ein rechter, so liegen offenbar alle vierten harmonischen Punkte in der um BA als Diameter beschriebenen Kreislinie.

77.

Lehrsatz. Bei irgend vier harmonischen Punkten ist das Rechteck unter den Abständen zweier zugeordneter Punkte von demjenigen Punkte, welcher in der Mitte zwischen den zwei andern liegt, dem Quadrat des halben Abstandes der letztern von einander gleich.

Beweis. In Taf. III. Fig. 16. seien C, D, B, A harmonische Punkte, um CD als Diameter ein Kreis beschrieben, auf dessen Peripherie ein Punkt P so angenommen, dass APB ein rechter Winkel ist (diesen Punkt zu bestimmen hat man nur den Durchschnitt des um AB als Diameter beschriebenen Kreises mit dem gegebenen zu suchen), ferner M der Mittelpunkt von AB. Zieht man nun MP, so muss diese Tangente des Kreises sein. Denn wegen $MA = MB = MP$ ist $\angle MPB = MBP$, und da CP den Winkel APB hälftet, so ist $CPB = 45°$, also auch $BPD = 45°$, somit $CPB = DPB$, daher $\angle MPC = MPB - CPB = MBP - DPB = MDP$, also PM eine Tangente des Kreises. Nun ist bekanntlich $MC \times MD = MP^2$, also $MC \times MD = MA^2$, w. z. b. w.

78.

Es sei $ABCDEF$ auf Taf. III. Fig. 17. ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalen bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt in G, H, I verlängert sind. Hierüber lassen sich folgende Betrachtungen anstellen.

Zu den drei in E zusammenkommenden Strahlen ED, EB, EI denke man sich den vierten dem EI zugeordneten harmonischen Strahl, und ebenso denke man sich zu den drei in C zusammenkommenden Strahlen CD, CB, CI den vierten dem CI zugeordneten harmonischen Strahl, so werden beide vierte harmonische Strahlen in einem Punkte der Geraden IBD zusammentreffen, welcher der zu D, B, I dem I zugeordnete harmonische Punkt ist (72.).

Ganz ebenso werden die beiden in Rede stehenden Strahlen in einem Punkte auf der Geraden AIH zusammentreffen, welcher der zu I, A, H dem H zugeordnete harmonische Punkt ist.

Digitized by Google

Der Durchschnittspunkt der beiden Strahlen wird also auf den Geraden *AH*, *BI* zu gleicher Zeit liegen, fällt also mit *G* zusammen, und folglich ist *G* sowohl der vierte harmonische Punkt zu *D*, *B*, *I* als auch zu *H*, *A*, *F*. Geht man von den Ecken *D* und *B* aus, so ergiebt sich, dass auch *E*, *C*, *I*, *H* harmonische Punkte sind.

Daraus fliesst, dass die Strahlen *FA*, *FI* zu *FB*, *FD*, ferner *IA*, *IF* zu *IB*, *IC* zugeordnete harmonische Strahlen sind. Die Figur *BDECF* wird aber vollständiges Viereck genannt (Steiner Geom. Gest. S. 72.), und wir haben somit den Doppelsatz:

In jedem vollständigen Vierseit sind die Punkte, in welchen die drei Diagonalen einander schneiden, zu den zugehörigen Ecken zugeordnete harmonische Punkte. (Pappus Collect. Math. Lib. VII., De Lahire Sect. Conicae p. 9. prop. 20., Schooten Exercitat. Mathem. 1. 2. prop. 5.)

In jedem vollständigen Viereck sind die Strahlen, welche die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seitenpaare vereinigen, zu den letztern zugeordnete harmonische Strahlen. (Steiner System. Entw. d. Abhäng. geom. Gestalten von einander S. 75.)

Diese Sätze geben ein Mittel an die Hand, einerseits zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt, und andrerseits zu drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen Strahl zu finden, und zwar bloss mit Hülfe des Lineals.

79.

Verlängert man in Taf. III. Fig. 17. die Gerade *IF*, bis sie *AC* in *K* trifft, so werden (72.) *A*, *B*, *K*, *C* harmonische Punkte sein. Daher das Theorem:

Zieht man von drei in einer Geraden liegenden Punkten *A*, *B*, *C* drei ganz beliebige Gerade *ADE*, *BD*, *CE*, von denen die erste von den beiden andern in *D* und *E* geschnitten wird, die letztern sich in *I* schneiden, so wird die durch *I* und den Durchschnittspunkt der Geraden *BE*, *CD* gehende gerade Linie die gegebene Gerade immer in dem nämlichen Punkte *K* treffen, der zu *A*, *B*, *C* der vierte harmonische Punkt ist.

80.

Von einem Punkte *O* gehen nach den Schenkeln des Winkels *A* (Taf. III. Fig. 18.) beliebig viele Gerade, welche die Schenkel resp. in *B*, *C*; *B'*, *C'*; *B''*, *C''* etc. treffen, und mehrere Vierecke erzeugen, deren Diagonalen gezogen sind. Die Durchschnittspunkte der Diagonalen *D*, *D'*, *D''* .... werden nun in einer einzigen durch *A* gehenden Geraden liegen.

Denn nach 78. trifft die Gerade *AD* sowohl als die Gerade *AD'* die Transversale *OC'* in einem Punkte *E'*, der zu *B'*, *C'*, *O* der vierte harmonische Punkt ist, mithin müssen *AD* und *AD'*, und ebenso alle übrigen zusammenfallen.

81.

In jedem Paralleltrapez treffen die nicht parallelen Seiten mit der die Mittelpunkte der parallelen verbindenden Geraden in einem einzigen Punkte zusammen.

Nämlich es seien AB, CD die parallelen, E der Mittelpunkt der erstern, AC, BD die nicht parallelen Seiten, O ihr Durchschnitt. Verbindet man O mit E und zieht OM parallel AB, so sind OA, OB, OE, OM (72.) harmonische Strahlen, und da CD mit dem äussersten Strahl ebenfalls parallel ist, so muss der mittlere der drei andern, nämlich OE, ebenfalls durch den Mittelpunkt von CD gehen.

82.

In Taf. III. Fig. 18. denke man sich B, B', C, C' auf der Peripherie eines Kegelschnitts liegend, so erhellet aus (60.), dass die Gerade AD die Polare des Punktes O in Bezug auf den Kegelschnitt ist, und diese Polare wird von den in O zusammenstossenden Sehnen in E und E' so getroffen, dass E und E' die vierten harmonischen Punkte zu den Endpunkten der Sehnen und zu ihrem Durchschnitt O sind. Dies ist auf eben die Art für alle Sehnen zu erweisen, und wir haben somit das sehr merkwürdige Theorem:

Dreht sich eine Gerade, die einen Kegelschnitt schneidet, um irgend einen in ihr liegenden festen Punkt, so ist der Ort desjenigen Punktes, welcher zu den zwei Durchschnittspunkten und dem festen Punkte der vierte, dem letztern zugeordnete harmonische Punkt ist, eine bestimmte Gerade, nämlich die Polarlinie des festen Punktes, in welcher sich also auch der Durchschnitt derjenigen zwei Tangenten dreht, durch deren Berührungspunkte die bewegliche schneidende Gerade geht.

Bewegt sich ein Punkt in einer festen Geraden in der Ebene eines Kegelschnitts, so dreht sich diejenige Gerade, welche zu den zwei durch den Punkt gehenden Tangenten und der festen Geraden der vierte letzterer zugeordnete harmonische Strahl ist, um einen bestimmten Punkt, nämlich den Pol der festen Geraden, um welchen sich also auch diejenige Gerade dreht, welche durch die Berührungspunkte der jedesmaligen zwei Tangenten geht.

Das, was die französischen Geometer schlechthin Polaire und Pol nennen, wird daher von Deutschen auch Harmonische und Harmonischer Pol genannt.

Digitized by Google

IX.

Neues Theorem über eine gewisse Klasse periodischer Functionen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Wenn eine Function die trigonometrischen Grössen sin, cos etc. allein enthält, so lässt sich dieselbe in vielen Fällen in eine Reihe verwandeln, welche nach den Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortgeht, so dass man erhält:

$$f(\sin x, \cos x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots \quad (1)$$

wobei die Reihe endlich oder unendlich sein kann. Vorausgesetzt, dass diese Reihenentwickelung für alle Werthe der Veränderlichen von $x=0$ bis $x=\infty$ gültig bleibt, so ist

$$\int_0^\infty [f(\alpha x) - f(\beta x)] \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 [f(0) - A_0]; \quad (2)$$

wobei $f(\alpha x)$, $f(\beta x)$ zur Abkürzung für $f(\sin \alpha x, \cos \alpha x)$ und $f(\sin \beta x, \cos \beta x)$ gesetzt worden sind.

Dieses elegante Theorem lässt sich auf folgende Art beweisen.

Da die Gleichung (1) für alle Werthe von $x=0$ bis $x=\infty$ richtig bleibt, so kann man in derselben auch μx für x setzen, sie mit $\overset{-ux}{e}\, dx$ multipliciren und zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$ integriren, wodurch man erhält

$$\int_0^\infty \overset{-ux}{e} f(\mu x) dx$$

$$= A_0 \int_0^\infty \overset{-ux}{e} dx + A_1 \int_0^\infty \overset{-ux}{e} \cos \mu x dx + A_2 \int_0^\infty \overset{-ux}{e} \cos 2\mu x dx + \ldots$$

Auf der rechten Seite kann man die Werthe aller Integrale angeben, wenn man sich erinnert, dass überhaupt für jedes positive k und h

$$\int_0^\infty \overset{-kx}{e} \cos hx\, dx = \frac{k}{h^2 + k^2}$$

ist. Es ergiebt sich so:

$$\int_0^{\infty} e^{-ux} f(\mu x)dx$$

$$= A_0 \frac{1}{u} + A_1 \frac{u}{1^2\mu^2+u^2} + A_2 \frac{u}{2^2\mu^2+u^2} + \ldots.$$

und wenn man $\mu = \alpha$, $\mu = \beta$ setzt und beide Werthe subtrahirt,

$$\int_0^{\infty} e^{-ux}[f(\alpha x) - f(\beta x)]dx$$

$$= A_1\left[\frac{u}{1^2\alpha^2+u^2} - \frac{u}{1^2\beta^2+u^2}\right] + A_2\left[\frac{u}{2^2\alpha^2+u^2} - \frac{u}{2^2\beta^2+u^2}\right] + \ldots$$

Diese Gleichung soll mit du multiplicirt und zwischen den Gränzen $u=0$ und $u=\infty$ integrirt werden. Auf der linken Seite steht dann das Doppelintegral

$$\int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-ux}[f(\alpha x) - f(\beta x)]dx$$

und auf der rechten erscheint eine Reihe von Integralen, welche sämmtlich unter der Form

$$\int_0^{\infty}\left[\frac{u}{n^2\alpha^2+u^2} - \frac{u}{n^2\beta^2+u^2}\right]du,$$

wo n ganz und positiv ist, enthalten sind. Nun giebt die unbestimmte Integration

$$\int\left[\frac{u}{n^2\alpha^2+u^2} - \frac{u}{n^2\beta^2+u^2}\right]du = \tfrac{1}{2}l(n^2\alpha^2+u^2) - \tfrac{1}{2}l(n^2\beta^2+u^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}l\frac{\frac{n^2\alpha^2}{u^2}+1}{\frac{n^2\beta^2}{u^2}+1},$$

und durch Einführung der Gränzwerthe $u=\infty$, $u=0$ findet man

$$\int_0^{\infty}\left[\frac{u}{n^2\alpha^2+u^2} - \frac{u}{n^2\beta^2+u^2}\right]du = -\tfrac{1}{2}l\frac{n^2\alpha^2}{n^2\beta^2} = +\tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2,$$

also den Werth des Integrales unabhängig von n. So wird nun:

$$\int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-ux}[f(\alpha x) - f(\beta x)]dx$$

$$= \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2[A_1 + A_2 + A_3 + \ldots]$$

$$= \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2[f(0) - A_0],$$

wie man sogleich erkennt, wenn man in der Gleichung (1) $x=0$ setzt.

Das obige Doppelintegral nach x und u gestattet aber noch eine Umformung, nämlich dadurch, dass man die Ordnung der In-

tegrationen umkehrt und zuerst nach u integrirt; dasselbe wird dann

$$=\int_0^\infty [f(\alpha x)-f(\beta x)]dx\int_0^\infty e^{-xu}\,du=\int_0^\infty [f(\alpha x)-f(\beta x)]dx\,.\frac{1}{x}.$$

Wir haben daher

$$\int_0^\infty [f(\alpha x)-f(\beta x)]\frac{dx}{x}=\tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2[f(0)-A_0] \quad (3)$$

und diess war das zu beweisende Theorem in (2.).

Einige Anwendungen desselben sind folgende.

Für jedes beliebige x und ein r, dessen absoluter Werth die Einheit nicht übersteigt, gilt die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}l(1+2r\cos x+r^2)=\frac{r}{1}\cos x-\frac{r^2}{2}\cos 2x+\frac{r^3}{3}\cos 3x-\ldots\text{ etc.}$$

Wir haben daher für $f(x)=\frac{1}{2}l(1+2r\cos x+r^2)$, $f(0)=l(1+r)$ und $A_0=0$, mithin

$$\int_0^\infty l\frac{1+2r\cos\alpha x+r^2}{1+2r\cos\beta x+r^2}\cdot\frac{dx}{x}=l(1+r)l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2,\ +1\geqq r\geqq -1. \quad (4)$$

Da $r<1$, so können wir $r=\frac{1}{\varrho}$ setzen, wo $\varrho>1$ ist, und haben so

$$\int_0^\infty l\frac{1+2\varrho\cos\alpha x+\varrho^2}{1+2\varrho\cos\beta x+\varrho^2}\cdot\frac{dx}{x}=l(1+\frac{1}{\varrho})\,l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2,\ \varrho\geqq 1. \quad (5)$$

Ferner sind die Reihen bekannt:

$$2^{2n-1}\cos^{2n}x=(2n)_0\cos 2nx+(2n)_1\cos(2n-2)x+\ldots+\tfrac{1}{2}(2n)_n$$

$$2^{2n}\cos^{2n+1}x=(2n+1)_0\cos(2n+1)x+(2n+1)_1\cos(2n-1)x+\ldots$$
$$+\tfrac{1}{2}(2n+1)_n\cos x.$$

Wir haben daher für die erste $A_0=\frac{1}{2}(2n)_n$, für die zweite $A_0=0$ und nach (3) die beiden Integrale

$$2^{2n-1}\int_0^\infty [\cos^{2n}\alpha x-\cos^{2n}\beta x]\frac{dx}{x}=\tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2[2^{2n-1}-\tfrac{1}{2}(2n)_n],$$

$$2^{2n}\int_0^\infty [\cos^{2n+1}\alpha x-\cos^{2n+1}\beta x]\frac{dx}{x}=\tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 2^{2n}$$

oder:

$$\int_0^\infty [\cos^{2n}\alpha x-\cos^{2n}\beta x]\frac{dx}{x}$$
$$=\tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\left[1-\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{4.8.12\ldots(4n)}\right] \quad (6)$$

$$\int_0^\infty [\cos^{2n+1}\alpha x - \cos^{2n+1}\beta x]\frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \quad (7)^*)$$

so dass also der Werth des zweiten Integrales von n unabhängig ist.

Man könnte ein ähnliches allgemeines Theorem wie das in (3) für solche Functionen aufzustellen versuchen, welche sich nach den Sinus eines vielfachen Bogens entwickeln lassen, so dass z. B.

$$f(\sin x, \cos x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots.$$

die Annahme wäre. Man gelangt aber zu keinem eleganten Resultat, da sich aus der vorstehenden Reihe die Summe der Coefficienten allein

$$B_1 + B_2 + B_3 + \ldots.$$

nicht finden lässt, wie diess bei der Reihe (1) der Fall ist, wenn man $x = 0$ setzt.

X.

Einige Bemerkungen über die Reihen, mit besonderer Hinweisung auf die Exponential- und Binomialreihe.

Von dem

Herrn Doctor Barfuss

zu Weimar.

§. 1.

Die Mängel, welche den Demonstrationen der älteren Mathematiker hier und da noch eigen sind, mussten natürlich bei den Nach-

---

*) Die Integrale (4), (5) und das obige (7) für den Fall $n = 0$ ergeben sich aus den interessanten Betrachtungen des Hrn. Prof. Raabe: „Ueber die Summation harmonisch periodischer Reihen etc." in Crelle's Journal Band 23. Die Bemerkung, dass jene 3 Integrale den gemeinschaftlichen Factor $\tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ haben, veranlasste die Aufsuchung des allgemeinen Theoremes (3).

folgern mannigfaltige Bestrebungen anregen, die Theorie vor jedem denkbaren Einwurfe sicher zu stellen. Bei den Reihenentwickelungen waren es vorzüglich die Bedingungen der Convergenz, die man einer weit gründlicheren Betrachtung unterwarf, als vorher geschehen war, und man scheute in dieser Beziehung keinen Aufwand an Rechnungen, um der Theorie den vermissten Besitz nicht länger vorzuenthalten, besonders da man auf die Meinung verfallen war, dass nur convergirende Reihen auf analytische Geltung Anspruch haben, während divergirende von allem analytischen Gebrauche auszuschliessen seien. Kamen durch den Gebrauch der letzteren fehlerhafte Resultate zum Vorschein, so wurde der Grund lediglich auf die Divergenz, d. h. auf den vernachlässigten Rest geschoben, und in der That fehlte es auch nicht an Beispielen, wo durch Beibehaltung des Restes richtige Resultate erhalten wurden.

Bei allen diesen Bestrebungen aber scheint es mir, als ob man eine bei den Reihen wesentliche Unterscheidung viel zu sehr vernachlässigt habe, woraus allerdings viele Fehler erklärlich werden können, die man auf die Divergenz schieben will. Es ist nämlich wohl zu unterscheiden, ob eine Reihe bloss eine Summe unendlich vieler Glieder, oder ob sie die Entwickelung einer Function sei. Convergirt die Reihe, so kann sie freilich allemal als Entwickelung einer Function ihrer allgemeinen Grösse angesehen werden, aber dieses ist nicht immer der Fall, wenn die Reihe divergirt. Dieses will ich jetzt an einem Beispiele erläutern.

Man läugnet die Richtigkeit des Ausdrucks:

$$\text{I.}\quad -\tfrac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots .$$

weil diese Reihe divergirt und unterstützt die Behauptung unter anderen mit folgendem Grunde. Man findet die Summe der endlichen Reihe:

$$\text{II.}\quad \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

woraus aber, wenn $n = \infty$ genommen wird, der Ausdruck I. gar nicht folgt. Aber dieser Schluss, welcher vollkommen richtig sein würde, wenn die Reihe eine convergente wäre, lässt sich auf divergirende Reihen gar nicht anwenden. Denn die Reihe I. hat kein letztes Glied, welches durch $\cos\infty x$ ausgedrückt werden könnte, sondern sie involvirt über dasselbe hinaus als ihren Rest noch die Reihe

$$\cos(n+1)x + \cos(n+2)x + \ldots .$$

in welcher $n = \infty$ ist. Dieselbe ist abermals eine Entwickelung, und zwar von

$$-\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

wie man sich ganz auf dieselbe Art, nach welcher die Formel I. gefunden wird, leicht überzeugen kann. Daher gestaltet sich für jeden Werth von n die Reihe I. so:

$$\cos x + \cos 2x \ldots . + \cos nx - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} = -\tfrac{1}{2},$$

welches eben der Ausdruck in II. ist.

Man wird hiernach einsehen, was es heissen soll, dass man einen Unterschied zwischen blosser Summe und Entwickelung zu machen habe. Beide fallen bei convergirenden Reihen zusammen. Hat man irgend eine entwickelte Reihe:

$$f(x) = X_{(1)} + X_{(2)} + X_{(3)} + \ldots .$$

und man will hieraus die Summe einer endlichen Anzahl ihrer ersten Glieder finden, nämlich

$$S = X_{(1)} + X_{(2)} + \ldots . + X_{(n)},$$

so kommt es darauf an, diejenige Function $\varphi(x)$ zu bestimmen, aus welcher der Rest

$$X_{(n+1)} + X_{(n+2)} + \ldots .$$

entwickelt werden kann, da dann

$$S = f(x) - \varphi(x)$$

ist. Dieses gilt für convergirende Reihen eben so gut, als für divergirende, allein wenn bei den ersteren $n = \infty$ ist, so verschwindet der Rest $\varphi(x)$ und man erhält $S = f(x)$. Bei den divergirenden Reihen aber verschwindet $\varphi(x)$ gegen S auch dann nicht, wenn $n = \infty$ ist, daher man auch nicht erwarten darf, dass $S = f(x)$ werde.

§. 2.

Indem sich nun die Ansichten so gestalteten, wie sie heut zu Tage vorliegen, wollten die älteren Methoden durchaus den Anforderungen nicht genügen, die man an die mathematische Darstellung machte. Besonders war es die Methode der unbestimmten Coefficienten, welche von allen Seiten her chicanirt wurde, und heut zu Tage kommt man gleich in den Rang eines mathematischen Bettlers, wenn man nur einiges Vertrauen auf diese Methode laut werden lässt. Ohne in das Wesen derselben einzudringen und die ihr ganz fremdartigen Schwächen zu beseitigen, an welchen viele ältere Darstellungen leiden, hat man sie als ein meist trügliches Werkzeug bei Seite gelegt und anderen Entwickelungsmethoden den Vorzug gegeben. Ob nun diese ohne Schwächen sind, davon ist nicht die Rede. Die Grenzmethode erscheint freilich als eine vollkommen strenge, aber was berechtigt uns denn, sie in die Arithmetik da einzuführen, wo es der Entwickelung einer Form aus der anderen gilt? Eine Grösse, welche über jede Grenze wachsen soll, ist eine unendliche, man mag nun hierbei den Ausdruck gestalten, wie man will. Mag man auch in jeder Zeile wiederholen: „je grösser n wird, desto mehr nähert sich $f(x,n)$ dem $\varphi(x)$; die Ableitung der Form $\varphi(x)$ aus der Urform geschieht doch mit Hülfe einer fremden Grösse n, welche eben deshalb aus dem Resultate verschwindet, weil sie unendlich wird.

Digitized by Google

Auf diese Art der Betrachtung sind wir überall hingewiesen, wo in der Geometrie oder in der mathematischen Physik das Ungleichförmige mit dem Gleichförmigen zu vergleichen ist. Wir können z. B. den Bogen mit der Abscisse nur in den unendlich kleinen Theilen unmittelbar vergleichen, gelangen aber dadurch stufenweise zur endlichen Vergleichung mit Hülfe der Summation solcher Reihen, die keine Entwickelungen sind.

Aber in der Arithmetik bilden wir auf synthetischem Wege Form aus Form ohne Zuziehung des Unendlichen. Wir gebrauchen also dieses Mittel nicht, um z. B. für den Ausdruck $\sqrt[m]{a^n}$ die Form $a^{\frac{n}{m}}$ zu rechtfertigen, worin soll nun die Nothwendigkeit begründet sein, dass die Entwickelung von a^x einzig und allein durch die Grenzmethode eine sichere Basis erhalte? Ich wenigstens kann an keinen Umbau der Analysis auf dieser Grundlage glauben.

Doch wir wollen über die Zulässigkeit der Methoden nicht weiter streiten, meine Absicht ist demnächst die Rechte der Methode der unbestimmten Coefficienten zu vertheidigen und ihre wahre Bedeutung zu erklären. Dieses will ich vorzugsweise an der Exponentialreihe thun und dabei zugleich, um allen Vorwürfen zu entgehen, strenge Rücksicht auf die Bedingungen der Convergenz nehmen.

§. 3.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten ist gleichsam eine **indirecte** Entwickelung und kommt allenthalben da in Anwendung, wo die directe Entwickelung zu schwierig werden würde. Die Ableitung der Binomialreihe für ganze positive Exponenten aus combinatorischen Gesetzen ist eine **directe** Entwickelung, die sich unmittelbar auf den arithmetischen Satz von der Multiplication complexer Factoren gründet. Es wird wohl Niemandem im Ernst einfallen, für diese Entwickelungsweise diejenige Demonstration als eine bessere substituiren zu wollen, nach welcher man die Form der Reihe als zuerst gegeben ansieht und nachher ihre Summe sucht.

An diese Entwickelung schliesst sich äusserst leicht eine zweite für ganze negative Exponenten an. Man hat nämlich

$$(1+x)^{-m} = \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^m,$$

also da der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten bewiesen ist:

$$(1+x)^{-m} = 1 - m_{(1)} \cdot \frac{x}{1+x} + m_{(2)} \cdot \frac{x^2}{(1+x)^2} - m_{(3)} \frac{x^3}{(1+x)^3} \cdots$$
$$\mp m_{(1)} \cdot \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m-1}} \pm \frac{x^m}{(1+x)^m},$$

wo die Bedeutung des Ausdrucks $m_{(r)}$ bekannt ist. Da nun überhaupt

$$\frac{x^p}{(1+x)^q} = \frac{x^p}{(1+x)^{q-1}} - \frac{x^{p+1}}{(1+x)^q},$$

so erhält man, wenn man diese Umbildung in jedem Gliede macht:

$$(1+x)^{-m} = 1 - m_{(1)}x + [m_{(2)} + m_{(1)}] \cdot \frac{x^2}{1+x} - [m_{(3)} + m_{(2)}] \frac{x^3}{(1+x)^2} \dots$$
$$\pm [m_{(1)} + 1] \frac{x^m}{(1+x)^{m-1}} \mp \frac{x^{m+1}}{(1+x)^m}.$$

Aber weil sich sehr leicht beweisen lässt, dass

$$m_{(r)} + m_{(r-1)} = (m+1)_{(r)},$$

so hat man

$$(1+x)^{-m} = 1 - m_{(1)}x + (m+1)_{(2)} \cdot \frac{x^2}{1+x} - (m+1)_{(3)} \cdot \frac{x^3}{(1+x)^2}$$
$$\dots \pm (m+1)_{(1)} \cdot \frac{x^m}{(1+x)^{m-1}} \mp \frac{x^{m+1}}{(1+x)^m}.$$

Wiederholt man dieselbe Umbildung bei allen Gliedern, die noch den Divisor $1+x$ haben, so erhält man ferner:

$$(1+x)^{-m} = 1 - m_{(1)}x + (m+1)_{(2)}x^2 - (m+2)_{(3)} \cdot \frac{x^3}{1+x} \dots$$
$$\pm (m+2)_{(1)} \cdot \frac{x^{m+1}}{(1+x)^{m-1}} \mp \frac{x^{m+2}}{1+x)^m}.$$

Fährt man so fort, bis man zu einem Glied mit dem Factor x^r gekommen ist, das aber den Divisor $1+x$ nicht mehr hat, so findet sich:

$$(1+x)^{-m} = 1 - m_{(1)}x + (m+1)_{(2)}x^2 - (m+2)_{(3)}x^3 \dots$$
$$\pm (m+r-1)_{(r)}x^r,$$

wozu aber noch der Rest

$$\mp \frac{x^{r+1}}{1+x} [(m+r)_{(r+1)} - (m+r)_{(r+2)} \cdot \frac{x}{1+x} \dots \pm \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m-1}}]$$
$$= \pm \frac{(m+r)_{(r+1)}x^{r+1}}{1+x} [1 - \frac{m-1}{r+2} \cdot \frac{x}{1+x} + \frac{m-1 \cdot m-2}{r+2 \cdot r+3} \cdot \frac{x^2}{(1+x)^2} \dots$$
$$\pm \frac{m-1 \cdot m-2 \dots 1}{r+2 \cdot r+3 \dots r+m} \cdot \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m-1}}]$$

hinzukommen muss, um $(1+x)^{-m}$ vollständig zu erhalten. Da die in der Parenthese enthaltene Reihe sich der 1 um so mehr nähert, je grösser r ist, so kommt die Bedingung der Convergenz vorzüglich auf den Ausdruck

$$\frac{(m+r)_{(r+1)}x^{r+1}}{1+x}$$

zurück, und es lässt sich leicht zeigen, dass wenn derselbe anfangs auch einen bedeutenden Werth hat, er doch endlich schneller abnimmt, als die Glieder einer geometrischen Reihe, deren Exponent irgend ein echter Bruch ist, wenn auch x ein solcher ist. Daher ist für alle positive oder negative x, die kleiner als 1 sind,

$$(1+x)^{-m} = 1 - m_{(1)}x + (m+1)_{(2)}x^2 - (m+2)_{(3)}x^3 \ldots.$$

was mit der Form

$$1 + (-m)_{(1)}x + (-m)_{(2)}x^2 + (-m)_{(3)}x^3 \ldots.$$

übereinkommt. Ich meine aber, die Entwickelung sei richtig, auch wenn $x > 1$, und statt einer solchen Entwickelung lasse sich überall nur $(1+x)^{-m}$ setzen.

§. 4.

Eine Entwickelung der Art nenne ich nun eine directe. Wird dieselbe sehr verwickelt oder erfordert sie bedeutende Vorbereitungen, so tritt oft die indirecte Entwickelung, d. h. die Methode der unbestimmten Coefficienten, als Vermittlerin ein. Dieselbe muss aber nothwendig die Form der Reihe, deren Coefficienten sie bestimmen will, als hinlänglich durch analytische Wahrheiten begründet vorfinden. So folgt leicht mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes für positive Exponenten und durch die gewöhnliche Division, dass der Ausdruck $(1+x)^{-m}$ eine Reihe von der Form

$$1 + A_{(1)}x + A_{(2)}x^2 + \ldots.$$

geben muss, und durch die analytischen Eigenschaften dieses Ausdruckes, die nothwendig auch der Reihe zukommen müssen, findet sich die Relation der Coefficienten, wornach sie gegenseitig von einander abhängen. Der Werth von $A_{(1)}$ wird sich aber dadurch noch nicht finden lassen, derselbe muss vielmehr unmittelbar aus directer Entwickelung hervorgehen. Diese Bemerkung ist für die Sache von Wichtigkeit; die Methode der unbestimmten Coefficienten findet zunächst immer nur deren Relation und nicht ihre absoluten Werthe; sie findet, wie alle übrigen Coefficienten vom ersten abhängen, aber durchaus nicht den ersten selbst. Oft freilich nehmen wir den ersten Coefficienten gleich von vorn herein richtig an, wie z. B. bei Quotientenentwickelungen.

Ueberlegt man so mit Klarheit den Gang der Schlüsse, so fällt der Zweifel sogleich hinweg, ob wirklich die Entwickelung mit der entwickelten Function identisch sei, ob beide nicht vielmehr nur die syntaktische Eigenschaft gemein haben, vermöge welcher die Relation der Coefficienten bestimmt wurde. Die Form der Reihe ist nachgewiesen durch eine Entwickelung, welche zugleich denjenigen oder auch diejenigen Coefficienten gab, von welchen die Bestimmung aller übrigen abhängt, und aus den syntaktischen Eigenschaften der Function bestimmten sich zuletzt alle jene übrigen Coefficicuten. Was verlaugt man da nun noch?

Ich wüsste nicht, was die neuere Analysis dem entgegensetzen wollte, als die Beschuldigung, dass man mit einer Reihe operire,

von der man noch nicht weiss, ob sie convergirt, und bei der man folglich den Rest beachten müsse, der freilich unbekannt ist. Wenn dieser Einwurf einen Sinn haben soll, so müsste die Meinung sein, dass durch die Vernachlässigung des Restes ein fehlerhaftes Entwickelungsgesetz gefunden werden könnte. Allein hier fragt man, ob dann nicht dieselbe Gefahr auch bei convergirenden Reihen vorhanden sei, denn der Rest hat ja immer dieselbe Form, die Reihe mag convergiren oder divergiren. Wir müssten also die Methode der unbestimmten Coefficienten auch bei convergirenden Reihen fallen lassen, aber dann sind jene neuen so hoch gepriesenen Methoden nicht besser daran. Diess würde z. B. mit der, namentlich von Cauchy geübten Summationsmethode der Fall sein, welche noch überdiess dem synthetischen oder progressiven Vortrage der Mathematik zuwider ist. Wenn so grosse Männer vermöge der Gewalt ihres Geistes einen Stoff nach Belieben formen können und zu formen sich erlauben, so kann damit noch nicht gemeint sein, dass solche Gebilde für ein wissenschaftliches System sich schicken.

Obschon es sich kaum der Mühe lohnt, weitläufiger von dieser Sache zu reden, so will ich dieselbe doch noch ein wenig weiter verfolgen und, um mich auf ein bestimmtes Beispiel zu beziehen, die Reihe

$$1+m_{(1)}x+m_{(2)}x^2+m_{(3)}x^3+\ldots.=f(m)$$

wählen, deren Charaktere bekannt sind, und für welche sich die Convergenz, die in allen Fällen, wo $x<1$ ist, statt findet, beweisen lässt. Multiplicirt man sie mit einer ähnlichen Reihe

$$1+n_{(1)}x+n_{(2)}x^2+n_{(3)}x^3+\ldots.=f(n),$$

so findet man mit Hülfe einer vorher nachgewiesenen Eigenschaft der Binomialcoefficienten, dass $f(m)\times f(n)=f(m+n)$ sein muss. Hieraus und mit Hülfe der speciellen Werthe $f(1)=1+x$ und $f(0)=1$ findet man alsdann, dass überhaupt $f(n)=(1+x)^n$ ist. Wer steht mir denn aber dafür, dass in das Product beider Reihen keine Störung in das Entwickelungsgesetz gekommen sei? Antwortet man aber, dass der weggelassene Rest nur die Entwickelung einer jeden Reihe in gleicher Weise weiter geführt haben würde und dass im Producte alle Glieder mit einerlei Potenzen vollständig zusammengestellt seien, so frage ich, warum das nicht eben so gut für divergirende Reihen gelten soll? Wenn man jede Reihe einmal abbricht und dann das Product macht, so werden die letzten Glieder desselben immer fehlerhaft, d. h. sie sind nicht nach demselben Gesetz gebildet, wie die ersten, aber sie ergänzen sich aus den Producten, welche die Reste zu Factoren haben, wenn dieselben weiter entwickelt werden. Dieses geschieht aber auf gleiche Weise z. B. in den obigen Reihen, x mag grösser oder kleiner als 1 sein, denn die Reste sind in allen Fällen dieselbe Functionsform und geben also auch dieselbe Entwickelung.

So scheint es, als ob die Schwierigkeit nur mit Gewalt herbei gezogen sei, oder dass sie sich auf die Meinung gründe, dass divergirende Reihen nur Ausdrücke mit gewissen syntaktischen Eigenschaften seien. Sind sie denn nicht zugleich auch charakterisch für die Function, woraus sie entspringen, d. h. kann dieselbe voll-

Digitized by Google

ständig bestimmte Reihe aus verschiedenen Functionsformen entwickelt werden?

Jene angedeutete Demonstration Cauchys für den binomischen Lehrsatz scheint mir auch mit dem Namen einer Summirung gar nicht richtig bezeichnet zu sein. Es wird von den Eigenschaften der Reihe auf die Function zurückgeschlossen, aus welcher sie entwickelt werden kann. Die ganze Demonstration ist so gehalten, dass die Bedingung der Convergenz gar nicht zur Sache gehört, dass sie auch ohne diese Rücksicht ganz dieselbe bleiben würde, wenn man nur statt des Ausdruckes der Summe den allgemeineren der Entwickelung zu substituiren beliebte, d. h. wenn man die Frage so stellen wollte: aus welcher Function kann die so gebildete Reihe entwickelt werden? Und wie gross ist nun der Unterschied dieser Methode von der der unbestimmten Coefficienten, welche nicht von den Eigenschaften der Coefficienten einer Reihe auf die entwickelte Function, sondern umgekehrt von den Eigenschaften der Function auf die Coefficienten ihrer Entwickelung schliesst?

§. 5.

Die Convergenz oder Divergenz hat auf das Entwickelungsgesetz gar keinen Einfluss; sie wird aber alsbald erkannt, wenn die Reihe vollständig ist. Zu solcher Erkenntniss lässt sich aber mit weit weniger Aufwand von Rechnungen gelangen, als gewöhnlich geschieht, denn

von der aus der Function $f(x)$ entwickelten Reihe weiss ich allemal, dass sie convergirt, wenn ihre Glieder bis zum Verschwinden klein werden.

Dieses will ich jetzt zu begründen suchen.

Es sei

$$f(x) = X_{(1)} + X_{(2)} + \dots X_{(n)} + R_{(n)},$$

wo $R_{(n)}$ den Rest bezeichnet. Auf gleiche Weise hat man dann

$$fx) = X_{(1)} + X_{(2)} + \dots X_{(n-1)} + R_{(n-1)},$$

woraus sogleich folgt

$$R_{(n-1)} - R_{(n)} = X_{(n)}.$$

Unter der gemachten Voraussetzung verschwindet also die Differenz zweier Nachbarreste immer mehr und mehr, je höher man in die Reihe geht. Desshalb verschwinden entweder die Reste selbst und dann ist die Sache klar.

Will man aber annehmen, die Reste verschwinden nicht, so müssen sie, wenn $f(x)$ und alle Glieder seiner Entwickelung endlich sind, selbst nur einen endlichen Werth haben. Zugleich werden sie aber auch im Fortgange der Reihe, zu Folge der Voraussetzung immer kleiner. Denn sind alle Glieder der Entwickelung positiv, so zeigt die Gleichung

$R_{(n-1)} - R_{(n)} = X_{(n)}$, dass $R_{(n)} < R_{(n-1)}$, $R_{(n+1)} < R_{(n)}$ u. s. w.

Wechseln aber die Vorzeichen, so kann man wegen der Voraus-

setzung positive Gliedergruppen bilden, die bis zum Verschwinden abnehmen, und man erhält dann eine Reihe positiver Glieder, für welche wieder dasselbe gilt, wie vorhin. Auch lässt sich der Schluss leicht auf den Fall ausdehnen, wo alle höheren Glieder der Reihe negativ sind.

Hieraus folgt aber mit Nothwendigkeit, dass wenn die Reste endlich bleiben sollten, sie sich einer constanten Grösse C ohne Ende nähern müssten. Es wäre also die Gleichung

$$f(x) = X_{(1)} + X_{(2)} + X_{(3)} + \ldots . X_{(n)} + C$$

um so richtiger, je grösser n wäre, also auch die Gleichung

$$f(x) - C = X_{(1)} + X_{(2)} + \ldots . X_{(n)}$$

um so richtiger, je grösser n wäre. Ich finde also jetzt dieselbe Reihe convergirend, von welcher ich vorhin annahm, dass sie divergire. Da nun aber die Reihe eine Entwickelung von $f(x)$ ist, so nähert sie sich auch ohne Ende dem Werthe von $f(x)$ und nicht dem von $f(x) - C$, also dass C verschwindet.

Nimmt man an, dass bei übrigens endlichen Gliedern der Reihe die Reste unendlich werden, so muss natürlich auch $f(x)$ unendlich sein. Diesen Fall könnten wir von unserer Betrachtung ganz ausschliessen, allein es ist der Sache angemessener, den Begriff der Convergenz auch darauf auszudehnen. Der Rest verschwindet nämlich hier nicht absolut, sondern im Vergleich zum Werthe von $f(x)$, und weil dieser unendlich ist, so muss man natürlich den Rest bis ins Unendliche hinausrücken. Es ist noch immer ein grosser Unterschied zwischen einer divergirenden Reihe und einer solchen, deren Summe unendlich gross ist. Bei der ersteren kann von einer Summirung, d. h. Zusammenrechnung der Glieder auf keine Weise die Rede sein. — Olivier hat in einem Aufsatze in Crelle's Journal einen ähnlichen Satz aufgestellt, als ich hier, allein er lässt solche Reihen, die eine unendlich grosse Summe haben, an dem Begriffe der Convergenz nicht Theil nehmen, auch redet er nicht von entwickelten Reihen, sondern setzt dieselben als ursprünglich gegeben voraus. Ihn sollte eigentlich der Satz zu der Entscheidung führen, ob die Summe einer gegebenen Reihe endlich oder unendlich sei, und das kann derselbe nicht leisten.

Doch wir wollen uns dabei nicht länger aufhalten; wir sehen, dass wenn $f(x)$ einen endlichen Werth hat, der Rest seiner Entwickelung, deren Glieder wir endlich voraussetzen, auch nur endlich sein kann. Werden dann noch die Glieder der Reihe über alle Gränzen klein, so convergirt sie, und diese Wahrheit überhebt uns vieler nutzlosen Rechnungen und bringt uns auf ein freundlicheres Feld der Wissenschaft, wenn wir nur unablässlich die einzig ihrem Charakter entsprechende Methode, die der Entwickelungen nämlich, sie seien direct oder indirect, verfolgen wollen. Für jene Fehler, die man durch den Gebrauch divergirender Reihen bekommen haben will, werden sich sicherlich bessere Erklärungsgründe auffinden lassen, als die Divergenz, und die Wissenschaft wird aus denselben einen grösseren Gewinn ziehen, als durch alle Untersuchungen über die Convergenz.

Digitized by Google

§. 6.

Ich komme nun noch zur Entwickelung der Exponentialreihe, für welche ich nur die Gültigkeit der Binomialreihe bei ganzen positiven und negativen Exponenten voraussetze. Ist sie für solche Exponenten entwickelt, so lässt sich ihre Allgemeinheit sehr leicht darthun und daraus dann rückwärts auf die allgemeine Gültigkeit der Binomialreihe schliessen. Ich meine gerade nicht, dass auf diesem Wege etwas Wesentliches gewonnen werde, obschon man dabei auch nichts einbüsst; mein Zweck ist nur, die Methode der unbestimmten Coefficienten in ein klares Licht zu setzen.

Die Entwickelung der Exponentialreihe, die ich hier gebe, ist keine andere, als die von Thibaut in der allgemeinen Arithmetik angedeutete, aber nicht bis zu den Anforderungen der neueren Mathematik durchgeführte. Sie besteht lediglich in einer anderen Anordnung der Binomialreihe. In a^x setze ich $a = 1 + b$ und erhalte

$$a^x = (1+b)^x = \left(1 - \frac{b}{1+b}\right)^{-x},$$

also wenn ich $\frac{b}{1+b} = \beta$ setze:

$$a^x = 1 + x\beta + \frac{x \,.\, x+1}{1 \,.\, 2}\beta^2 + \frac{x \,.\, x+1 \,.\, x+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\beta^3 + \ldots.$$

Löse ich hier die Facultäten aller Glieder auf und bezeichne durch $\overset{r}{C}_{(m)}$ die Summe aller Producte zu je r Factoren aus den Zahlen von 1 bis m, so wird:

$$x = x$$
$$x \,.\, x+1 = x^2 + \overset{1}{C}_{(1)} x$$
$$x \,.\, x+1 \,.\, x+2 = x^3 + \overset{1}{C}_{(2)} x^2 + \overset{2}{C}_{(2)} x$$
$$x \,.\, x+1 \,.\, x+2 \,.\, x+3 = x^4 + \overset{1}{C}_{(3)} x^3 + \overset{2}{C}_{(3)} x^2 + \overset{3}{C}_{(3)} x$$

u. s. w.

Stelle ich nun hier alle Glieder zusammen, welche gleiche Potenzen von x enthalten, so bekomme ich die neue Entwickelung:

$$a^x = 1 + \left[\beta + \frac{\overset{1}{C}_{(1)}}{1 \,.\, 2}\beta^2 + \frac{\overset{2}{C}_{(2)}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\beta^3 + \frac{\overset{3}{C}_{(3)}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\beta^4 + \ldots\right]\frac{x}{1}$$
$$+ \left[\beta^2 + \frac{\overset{1}{C}_{(2)}}{3}\beta^3 + \frac{\overset{2}{C}_{(3)}}{3 \,.\, 4}\beta^4 + \frac{\overset{3}{C}_{(4)}}{3 \,.\, 4 \,.\, 5}\beta^5 + \ldots\right]\frac{x^2}{1 \,.\, 2}$$
$$+ \left[\beta^3 + \frac{\overset{1}{C}_{(3)}}{4}\beta^4 + \frac{\overset{2}{C}_{(4)}}{4 \,.\, 5}\beta^5 + \frac{\overset{3}{C}_{(5)}}{4 \,.\, 5 \,.\, 6}\beta^6 + \ldots\right]\frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

u. s. w.

Digitized by Google

was wir kürzer mit

$$\text{II.}\quad a^x = 1 + A.x + \frac{A_{(2)}x^2}{1.2} + \frac{A_{(3)}x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{A_{(n)}x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

bezeichnen wollen. Hier ist nun

$$\text{III.}\quad A_{(n)} = [\beta^n + \frac{\overset{1}{C}_{(n)}}{n+1}\beta^{n+1} + \frac{\overset{2}{C}_{(n+1)}}{n+1.n+2}\beta^{n+2} + \ldots$$

$$+ \frac{\overset{r}{C}_{(n+r-1)}}{n+1.n+2\ldots n+r}\beta^{n+r}\ldots$$

Dabei ist aber noch zu bemerken, dass diese Entwickelung sowohl für positive als auch für negative x gilt. Bei letzteren muss zwar die Reihe endlich abbrechen, indem sich a^{-x} auf $(1-\beta)^x$ reducirt, allein da dann alle Glieder der Reihe, welche man nach gleichem Gesetz über das Glied β^x hinaus bildet, der 0 gleich werden, so ist die Fortführung bis ins Unendliche immerhin zulässig.

Die Entwickelung ist in Bezug auf x eigentlich schon vollständig, es bedarf bloss noch einer Reduction der Coefficienten und der Nachweisung der Convergenz, um jetzigen Anforderungen zu genügen. Weil aber überhaupt $\overset{m}{C}_{(m)} = 1.2.3\ldots m$, so wird

$$\text{IV.}\quad A = \beta + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \tfrac{1}{3}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\beta^4 + \ldots$$

Mit meinem oben aufgestellten Satze darf ich eigentlich die Convergenz dieser Reihe nicht beweisen, weil ich die Function $f(\beta)$ noch nicht kenne, aus welcher A entwickelt werden kann. Da indessen $\beta = \frac{b}{1+b} = \frac{a-1}{a}$ für alle positive b ein echter Bruch ist, so fällt die Reihe A schneller als die geometrische $\beta + \beta^2 + \beta^3 + \ldots = \frac{\beta}{1-\beta} = b$, und es ist folglich $A < b$.

In $A_{(n)}$ ist der Coefficient des allgemeinen Gliedes $\frac{\overset{r}{C}_{(n+r-1)}}{n+1.n+2\ldots n+r}$, und es ist derselbe kleiner als der Coefficient von β^r in der Entwickelung von $(1-\beta)^{-n}$, d. h.

$$\frac{\overset{r}{C}_{(n+r-1)}}{n+1.n+2\ldots n+r} < (n+r-1)_{(r)}.$$

Denn das grösste Product in $\overset{n}{C}_{(n+r-1)}$ ist $n.n+1.n+2\ldots n+r-1$, und da $\frac{n+r-1.n+r-2\ldots n}{1.2.3\ldots r} = (n+r-1)_{(r)}$ die Anzahl aller Producte ist, so hat man

$$\overset{r}{C}_{(n+r-1)} < (n+r-1)_{(r)}\, n.n+1.n+2\ldots n+r-1,$$

und daher

$$\frac{\overset{r}{C}_{(n+r-1)}}{n+1.n+2\ldots.n+r} < \frac{n}{n+r}(n+r-1)_{(r)},$$

woraus obige Behauptung sogleich hervorgeht. Daher sind alle Glieder der Reihe $A_{(n)}$ kleiner als die gleichzähligen in der Entwickelung $\beta^n(1-\beta)^{-n}$, und folglich, weil hier Convergenz statt findet,

$$A_{(n)} < \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^n, \text{ d. h. } A_{(n)} < b^n.$$

Also sind die Glieder der Exponentialreihe sämmtlich kleiner als die gleichzähligen in der Reihe $1+bx+\frac{b^2x^2}{1.2}+\frac{b^3x^3}{1.2.3}\ldots.$, und da diese schon bis ins Unendliche abnehmen, so darf man nach meinem obigen Satze auf die Convergenz der Exponentialreihe schliessen, da die Summe derselben zu Folge der Entwickelung nichts anders als a^x sein kann.

Bisher haben wir directe Entwickelung und dieselbe ist eigentlich in so fern schon vollständig, als der Werth von a^x durch die Reihe I. schon berechenbar ist. Da aber A, $A_{(2)}\ldots.A_{(n)}$ Functionen von β, d. h. von a sind, so könnte es kommen, dass eine gewisse einfache Relation zwischen den Coefficienten statt hätte, welche aus A alle übrigen finden liesse. Um diese Relation auf directem Wege zu entdecken, müssten wir tiefer in die Natur des Ausdrucks $\overset{r}{C}_{(m)}$ eingehen, allein um dieses zu vermeiden, bedienen wir uns der Methode der unbestimmten Coefficienten, d. h. wir suchen die Relation der Coefficienten A, $A_{(2)}\ldots.A_{(n)}$ durch die Eigenschaften der Function a^x.

Wir setzen daher $x+y$ statt x in II. und erhalten durch Auflösung der Potenzen von $x+y$ leicht folgende neue Anordnung:

$$\text{V.}\quad a^{x+y}=1+Ax+\frac{A_{(2)}x^2}{1.2}+\frac{A_{(3)}x^3}{1.2.3}+\ldots.$$
$$+[A+A_{(2)}x+\frac{A_{(3)}x^2}{1.2}+\frac{A_{(4)}x^3}{1.2.3}+\ldots.]y$$

u. s. w.,

womit ich meine, dass die Entwickelung nach den Potenzen von y geordnet sein soll. Aus $a^{x+y}=a^xa^y$ erhält man aber, wenn man für a^y die Entwickelung einsetzt:

$$\text{VI.}\quad a^{x+y}=a^x+Aa^xy+\frac{A_{(2)}a^xy^2}{1.2}+\ldots.$$

Hier meint man nun gewöhnlich noch fernere Umbildungen machen zu müssen, um zu beweisen, dass in V. und VI. die Glieder, welche die erste Potenz von y zum Factor haben, wirklich gleich sind. Ich halte diese Bemühung für sehr überflüssig, denn es handelt sich hier nicht um eine numerische Gleichheit beider Entwickelungen, es ist ja die Frage darnach, welche Relation zwischen den Coefficienten A, $A_{(2)}\ldots.A_{(n)}$ statt haben muss, damit die Entwickelungen

in V. und VI. durchaus identisch werden. Hierdurch wird ja die Identität der gleichgebildeten Glieder in beiden Reihen zur unmittelbaren Bedingung. Man hat daher, wenn man die Glieder ohne y vergleicht,

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A_{(2)}x^2}{1.2} + \ldots.$$

wie nothwendig. Alsdann

$$Aa^x = A + A_{(2)}x + \frac{A_{(3)}x^2}{1.2} + \frac{A_{(4)}x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

d. h. wenn wir wieder statt a^x die Reihe II. einsetzen:

$$A + A_{(2)}x + \frac{A_{(3)}x^2}{1.2} + \frac{A_{(4)}x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$= A + A^2x + \frac{AA_{(2)}x^2}{1.2} + \frac{AA_{(3)}x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

und folglich $A_{(2)} = A^2$, $A_{(3)} = AA_{(2)} = A^3$, $A_{(4)} = AA_{(3)} = A^4 \ldots$ überhaupt $A_{(n)} = A^n$.

Daher haben wir

$$\text{VII.}\quad a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^4x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

wo nun die Entwickelung vollständig ist. Die Gleichung $A_{(n)} = A^n$ führt uns zugleich auch zu dem schönen Resultate, dass

$$\text{VIII.}\quad (\beta + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \tfrac{1}{3}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\beta^4 + \ldots.)^n$$

$$= \beta^n + \frac{\overset{1}{C}_{(n)}}{n+1}\beta^{n+1} + \frac{\overset{2}{C}_{(n+1)}}{n+1.n+2}\beta^{n+2} + \frac{\overset{3}{C}_{(n+2)}}{n+1.n+2.n+3}\beta^{n+3} \ldots$$

$$+ \frac{\overset{r}{C}_{(n+r-1)}}{n+1.n+2\ldots.n+r}\beta^{n+r} \ldots.$$

Es ist nun noch zu beweisen, dass die Reihe VIII. allgemein gilt. Zu dem Ende bemerken wir, dass A eine Function von a ist, die wir mit $\varphi(a)$ bezeichnen wollen. Setzt man a^m statt a, wo m eine ganze Zahl ist, so wird $\varphi(a^m)$ aus $\varphi(a)$. Da aber

$$(a^m)^x = a^{mx} = 1 + Amx + \frac{A^2m^2x^2}{1.2} + \ldots.,$$

so sehen wir sogleich, dass $\varphi(a^m) = m\varphi(a)$ sein muss. Dieses gilt zunächst für ganze positive oder negative m, kann aber leicht auch für gebrochene m bewiesen werden. Man hat nämlich

$$\varphi(a) = \frac{1}{p}\cdot\varphi(a^p) = \frac{1}{p}\cdot\varphi[(a^{\frac{p}{q}})^q] = \frac{q}{p}\varphi(a^{\frac{p}{q}}),$$

daher

$$\varphi(a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}\varphi(a).$$

Demnach ist auch

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = 1 + \varphi(a^{\frac{1}{q}}) . p + \frac{[\varphi(a^{\frac{1}{q}})]^2 p^2}{1.2} + \ldots.$$

$$= 1 + \varphi(a) . \frac{p}{q} + \frac{(\varphi(a))^2}{1.2} . \frac{p^2}{q^2} + \ldots.$$

d. h. die Exponentialreihe gilt für alle positive oder negative ganze oder gebrochene Werthe des Exponenten. Daher gilt auch die Reihe I. für jeden Werth von x, und wenn man sie wieder so reducirt, dass die gleichen Potenzen von β zusammen kommen, dann statt der combinatorischen Ausdrücke wieder die Facultäten setzt, so erhält man die Binomialreihe wieder, die folglich ganz allgemein gilt.

Der Werth von

$$A = \left(\frac{a-1}{a}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \ldots.$$

zeigt uns auf das Unzweideutigste, dass für a eine solche Zahl existiren müsse, wodurch $A = 1$ wird. Bezeichnen wir sie mit e, so haben wir

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

also für $x = 1$

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Wir machen nun e zur Grundzahl eines Logarithmensystems, das wir das natürliche nennen. Weil dann für $x = 1$:

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \ldots. = e^A,$$

so folgt

$$A = \log \text{ nat } a.$$

Da nun $a = \frac{1}{1-\beta}$, so folgt sogleich:

$$\log \text{ nat}(1-\beta) = -(\beta + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \tfrac{1}{3}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\beta^4 + \ldots.).$$

§. 7.

Einen wichtigen Zweifel dürfen wir uns jedoch am Ende nicht verhehlen, den ich absichtlich in die Rechnung des vorigen Paragraphen legte. Die Aufgabe war, in den Reihen V. und VI. die Coefficienten so zu bestimmen, dass beide identisch werden. Diess erfordert, dass die gleich gebildeten Glieder identisch sind. In der That liegen auch die von y freien Glieder a^x und $1 + Ax + \frac{A_{(2)}x^2}{1.2} + \ldots.$ schon als identisch vor. Dann machten wir die Glie-

der mit der ersten Potenz von y identisch, nämlich $A \cdot a^x = A + A_{(2)}x + \frac{A_{(3)}x^2}{1.2} + \ldots.$ und dieses führte uns auf einmal zur Bestimmung der gesuchten Relation zwischen den Coefficienten A, $A_{(2)} \ldots . A_{(n)}$. Demnach werden in V. und VI. die zwei ersten Glieder beider Reihen identisch, aber wie steht es denn mit den Gliedern, welche die höheren Potenzen von y zu Factoren haben?

Man hilft sich hier gewöhnlich damit, dass man beide Reihen einander gleich setzt, die gleichen von y unabhängigen Glieder dann weglässt, mit y dividirt und zuletzt $y = 0$ setzt, wodurch man die Bestimmungsgleichung für alle Coefficienten erhält. Dieses Verfahren ist im Grunde mit dem der Differentialrechnung ganz einerlei, denn man erhält dadurch die derivirten Functionen, und eben dahinaus kommen auch andere Umbildungsmethoden, z. B. die im mathematischen Wörterbuche Bd. V. Th. I. S. 500 in Anwendung gebrachte. Aber es bleibt hierbei immer der oben ausgesprochene Zweifel; es werden zwar zwei Glieder der beiden Entwickelungen für a^{x+y} identisch, aber nicht alle. Vielleicht ist dieses ein Hauptgrund, warum die Methode der unbestimmten Coefficienten nicht befriedigen wollte. Denn die Relation der Coefficienten soll ja so bestimmt werden, dass die Bedingung $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ erfüllt wird, nicht dass bloss ein Paar Glieder von beiderlei Entwickelung identisch werden.

Man hat hier offenbar ein Princip in die elementare Analysis herabgezogen, ohne davon nur die mindeste Rechenschaft zu geben. Wenn daher die Methode nicht befriedigt, so kann man doch deswegen den Grund nicht den unbestimmten Coefficienten zur Last legen. So wie diese Methode vielfach angewandt worden, ist sie eigentlich nur durch eine gut begründete Derivationsrechnung zulässig.

In unserem Falle lässt sich freilich die vollständige Nachweisung leicht geben. Die vollkommene Identität der beiden Reihen V. und VI. erheischt, dass überhaupt

$$A_{(n)}a^x \text{ und } A_{(n)} + A_{(n+1)}x + \frac{A_{(n+2)}}{1.2}x^2 + \frac{A_{(n+3)}}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

vollkommen identisch werden, wie sich sehr leicht ergiebt, wenn man aus den Reihen

$$a^{x+y} = 1 + A(x+y) + \frac{A_{(2)}(x+y)^2}{1.2} + \ldots.$$

und

$$a^x(1 + Ay + \frac{A_{(2)}y^2}{1.2} + \ldots.) = a^x \cdot a^y$$

die Glieder heraussondert, welche den Factor y^n haben. Setzen wir nun statt $A_{(n)}$, $A_{(n+1)}$, $A_{(n+2)}$ die im vorigen Paragraphen gefundenen Werthe A^n, A^{n+1}, A^{n+2}, so ist die Identität der obigen allgemeinen Gleichung sogleich einleuchtend, und die Entwickelung der Exponential-, so wie auch der Binomialreihe ist auf das strengste gerechtfertigt.

Aber so leicht dürfte die Rechtfertigung in anderen Fällen

nicht sein, daher allerdings zu rathen ist, die Methode der unbestimmten Coefficienten nicht bei Seite zu legen, denn wir würden dann die Analysis an ihrem innersten Wesen verletzen; wohl aber ist zu rathen, die Schwächen, welche den elementaren Entwickelungen hier und da noch ankleben, durch kluge Maassregeln zu beseitigen.

XI.

Dissertation sur la théorie des axes principaux et des axes permanents de rotation.

Par

Monsieur Steichen,

Professeur à l'école militaire de Belgique à Bruxelles.

§. I. Théorie des axes principaux.

1.

L'objet de cette dissertation est de simplifier et de compléter la théorie des axes principaux, et pour atteindre à ce but, nous reprendrons en entier le problème qui s'y rapporte et nous baserons notre solution sur quelques définitions et notions fondamentales de mécanique, que l'on admettra probablement sans difficulté; car ces notions ne renferment en elles-mêmes rien de gratuit, et elles offrent l'avantage de conduire par le moyen de l'analyse ordinaire à la solution directe des questions à traiter.

Concevons un système matériel homogène, pourvu d'un axe fixe qui le traverse en son centre d'inertie, à l'instar d'un essieu raide et inébranlable, et imprimons au corps un mouvement de rotation sur cet axe. Sera-t-il possible de trouver à cet axe une position pour laquelle les forces centrifuges, qui naissent de cette rotation, se fassent équilibre et ne tendent pas à le déplacer?

Pour s'assurer de la possibilité de la question et pour en trouver en même temps une solution directe et générale, il faut commencer par exprimer analytiquement les conditions mécaniques qu'elle entraîne. Or comme les forces centrifuges ne doivent point déplacer l'essieu de rotation, lors même qu'il serait libre, il faut que la sommes algébrique de leurs composantes suivant un axe quelcon-

que soit nulle, et que de plus leur énergie totale à tourner l'essieu de rotation autour d'un autre axe quelconque, passant par le centre soit nulle aussi. Mais en traçant par ce centre un plan normal à l'axe fixe primitif, et tirant dans ce plan deux axes rectangulaires entr'eux Iz', Iy', on obtient un système d'axes coordonnés rectangles Iz', Iy', Ix', dont le dernier coïncide avec l'axe de rotation, et dont les deux premiers seront censés fixes dans le corps, mais mobiles avec lui autour de Ix'. Si donc Ω dénote la vitesse angulaire du système tournant, et que x', y', z' soient les coordonnées d'un point matériel quelconque m du solide, on aura les forces centrifuges partielles, représentées par les expressions: $m . \Omega^2 . \sqrt{y'^2 + z'^2}$, $m' . \Omega^2 . \sqrt{y''^2 + z''^2} \ldots$; et toutes ces forces étant normales de direction à l'axe Ix', la somme de leurs projections orthogonales sur cette ligne sera nulle d'elle-même. Il faudra donc les estimer par rapport à une autre droite ayant une position moins particulière, et l'on pourra toujours commencer par prendre Iy' pour axe de comparaison.

La projection sur cette droite de la force centrifuge $m\Omega^2 . \sqrt{y'^2 + z'^2}$ se réduit à $m\Omega^2 y'$, et de même sur l'axe Iz' elle devient $m\Omega^2 . z'$; ainsi d'après la première condition qui doit exprimer la nullité de la translation, ou de la tendance du solide à la translation, le long d'un axe quelconque, il faudra poser les équations analytiques:

$$\Omega^2 . \Sigma . my' = 0, \ \Omega^2 . \Sigma . mz' = 0$$

lesquelles, par suite de la définition du centre d'inertie, sont satisfaites d'elles-mêmes, et l'on aura par conséquent pas besoin de s'en embarrasser.

Quant au moyen d'exprimer la seconde condition, on doit se rappeler que l'energie totale de plusieurs forces à tourner un corps autour d'une droite, telle que Iy', s'obtient par la projection de toutes les forces sur un plan perpendiculaire à la droite, et par l'addition algébrique des moments des forces ainsi projetées. Mais les forces centrifuges, projetées par exemple sur le plan des $x'z'$ donnent lieu à un grouppe de forces parallèles $\Omega^2 . mz'$, $\Omega^2 . mz''$, $\Omega^2 . mz''' \ldots$, parcequ'elles sont toutes dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe Ix'; de plus le moment d'une force, telle que $\Omega^2 . mz'$, par rapport à l'axe Iy', se compose du produit de $\Omega^2 . mz'$ par la perpendiculaire abaissée de l'origine I sur la direction de la force, ou par l'abscisse x'. de sorte que ce moment est $\Omega^2 . m . x'z'$ et le moment total sera parconséquent $\Omega^2 . \Sigma . mx'z'$. — On trouvera de même que l'énergie totale des forces à tourner le corps et l'essieu Ix' autour de l'axe Iz' est représentée par $\Omega^2 \Sigma . mx'y'$; et pour exprimer que cette double tendance à la rotation est nulle, il faudra poser par conséquent les conditions analytiques:

$$\Omega^2 . \Sigma . mx'y' = 0, \ \Omega^2 . \Sigma . mx'z' = 0.$$

On pourrait peut-être croire, que ces conditions soient insuffisantes pour exprimer que les forces centrifuges ne tendent pas à déplacer l'axe Ix'; mais on doit remarquer qu'elles ne sont pas même toutes

deux nécessaires, et qu'une seule d'entr'elles suffit, puisque nous n'avons pas assigné jusqu'ici de position particulière aux axes Iy', Iz' dans le plan normal en I à Ix'. Seulement dèsqu'on se donne la direction de Iy', celle de Iz' en résulte, comme devant être normale à l'autre. D'ailleurs il est manifeste que la rotation de Ix' n'est possible qu'autour d'un axe situé dans le plan $y'z'$. Si l'on donnait toutefois l'axe Iy' dans le plan, il faudrait poser à la fois les deux équations précédentes, parcequ'alors la gyration de Ix' autour de Iy' pourrait être nulle, sans qu'elle le fût en même temps autour de l'axe Iz', normal à Iy'.

Cela posé traçons au centre d'inertie I trois nouveaux axes rectangles Ix, Iy, Iz qui soient fixes et immobiles, et supposons

$$\cos(x', x) = \alpha, \quad \cos(x', y) = \beta, \quad \cos(x', z) = \gamma$$
$$\cos(y', x) = \alpha', \quad \cos(y', y) = \beta', \quad \cos(y', z) = \gamma'$$
$$\cos(z', x) = \alpha'', \quad \cos(z', y) = \beta'', \quad \cos(z', z) = \gamma''$$

de plus x, y, z dénotant les coordonnées d'un point m, rapporté aux axes fixes, à un instant quelconque de la rotation, pour lequel ce même point a par rapport aux axes mobiles les coordonnées x', y', z', on doit avoir d'après la transformation connûe:

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z$$
$$y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$$
$$z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$$

et les six équations de condition:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \quad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1$$
$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \quad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0.$$

Mais pour que l'essieu Ix', jusqu'ici arbitraire de direction dans le système matériel, à cause qu'il a été rendu fixe, coïncide avec l'axe d'équilibration des forces centrifuges, partant pourqu'étant rendu libre il ne se déplace pas d'un mouvement gyratoire, pendant que le système tourne sur lui, il est nécessaire que les angles relatifs aux cosinus α, β, γ soient ceux que forme l'axe d'équilibration avec les trois axes coordonnés fixes Ix, Iy, Iz qui sont indépendants du corps. Il faut donc que les deux équations de condition posées plus haut, subsistent ici; ou bien il sera nécessaire du moins, que la première d'entr'elles soit satisfaite, l'axe Iy' étant dèslors arbitraire de direction dans le plan $y'z'$; il faut et il suffit parconséquent que l'on fasse dans cette hypothèse:

$$\Omega^2 . \Sigma . mx'y' = 0, \text{ ou } \Sigma . mx'y' = 0.$$

Substituant la valeur du rectangle en $x'z'$, en fonction de xy, α, β, γ, et posant pour abréger:

$$\Sigma . mx^2 = a, \quad \Sigma . my^2 = b, \quad \Sigma . mz^2 = c$$
$$\Sigma . mxy = f, \quad \Sigma . mxz = g, \quad \Sigma . myz = h,$$

on obtiendra par un calcul rapide et facile la condition transformée:

$$\left.\begin{array}{l} a\,.\,\alpha\alpha' + b\,.\,\beta\beta' + c\,.\,\gamma\gamma' + f\,.\,(\alpha'\beta + \alpha\beta') \\ + g(\alpha'\gamma + \alpha\gamma') + h(\beta'\gamma + \beta\gamma')\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Et comme cette équation doit être satisfaite, quelle que soit la position de l'axe Iy' dans le plan normal ($y'Ix'$), elle doit encore être remplie pour le cas où après avoir fait tourner les axes Iy', Ix' dans ce plan on a amené Iy' dans une position pour laquelle $y'Ix = 90°$, c. à d. pour le cas de $\alpha' = 0$, et pourvu qu'on tienne compte de la condition simplifiée $\beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$. On aura donc ainsi, en supprimant le facteur commun β':

$$(b - c)\,.\,\beta\gamma + f\,.\,\alpha\gamma - g\,.\,\alpha\beta + (\gamma^2 - \beta^2)h = 0\ldots\quad \text{(I)}.$$

Mais l'équation de condition générale est encore satisfaite pour la position particulière de l'axe Iy' dans laquelle $\beta' = 0$, pourvu qu'on tienne compte de la condition simplifiée $\alpha\alpha' + \gamma\gamma' = 0$, qui en résulte; on est ainsi conduit à une deuxième relation entre quantités connûes et inconnûes:

$$(a - c)\alpha\gamma + f\,.\,\beta\gamma + (\gamma^2 - \alpha^2)g - \alpha\,.\,\beta\,.\,h = 0\ldots\quad \text{(II)}.$$

Or ces deux équations particulières, étant jointes à la relation perpétuelle $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, sont évidemment suffisantes pour déterminer les trois inconnûes α, β, γ, et partant la position de l'axe d'équilibration des forces centrifuges que l'on cherche; mais rien ne nous prouve encore que cet axe existe, puisque nous ne savons pas, si l'élimination nous donnera des valeurs réelles ou imaginaires pour α, β, γ. Il y a d'ailleurs une autre difficulté, c'est que rien n'empèche de faire à son tour $\gamma' = 0$ dans l'équation générale; et cette supposition donnera la 3ème équation:

$$(a - b)\alpha\,.\,\beta + f(\beta^2 - \alpha^2) + g\,.\,\beta\gamma - h\,.\,\alpha\gamma = 0\ldots\quad \text{(III)}$$

et l'on aurait ainsi quatre équations pour déterminer trois inconnûes. Il importe donc d'examiner avant tout si la 4ème équation, marquée par (III.), n'est pas une conséquence des trois autres: car si ce cas n'arrive pas, toute recherche ultérieure sera inutile, et l'axe cherché sera impossible. Or on voit aisément qu'en multipliant l'équation (I) par α, et l'équation (II) par β, et retranchant les résultats membre-à-membre, on obtient en effet l'équation (III). Ainsi ces conditions analytiques s'accordent d'une manière remarquable avec l'observation qu'on a présentée plus haut sur le nombre d'équations de condition de la forme: $\Sigma\,.\,mx'y' = 0$. De plus en opérant sur l'équation $\Sigma\,.\,mx'z' = 0$, comme on l'a fait à l'égard de celle $\Sigma.mx'y' = 0$, on obtiendra manifestement une équation générale que l'on trouve sans nouveau calcul, en changeant α', β', γ' dans celle déjà trouvée, en α'', β'', γ'' respectivement. Et si l'on pose ensuite $\alpha'' = 0$, $\beta'' = 0$, $\gamma'' = 0$, on retrouvera encore une fois les relations (I), (II), (III); ce qui offre la confirmation de ce qu'on avait prévu sans calcul, et par le simple examen de la nature mécanique de la question.

2.

Toutes les difficultés de la question sont donc ramenées à déterminer les trois inconnûes α, β, γ par le moyen de deux quelconques des équations (I), (II), (III) et de la relation perpétuelle α^2

Digitized by Google

$+\beta^2+\gamma^2=1$. Si dans la vûe de ramener celle-ci à une identité dont il ne soit plus besoin de tenir compte, on désigne par ϑ l'inclinaison de l'axe réel ou imaginaire sur le plan des (x, y), et par η l'angle compris entre sa projection sur ce plan, et entre l'axe Ix, on devra faire d'après une transformation connùe:

$$\alpha=\cos\eta\,.\cos\vartheta,\ \beta=\cos\vartheta\,.\sin\eta,\ \gamma=\sin\vartheta.$$

Si l'on pose ensuite, pour mieux abréger l'écriture des formules:

$$\operatorname{tang}\vartheta=z,\ \operatorname{tang}\eta=\zeta,$$

on reduira les conditions trouvées plus haut aux formules suivantes:

$$(a-c+f.\zeta)z.\sqrt{1+\zeta^2}+g.z^2.(1+\zeta^2)-g-h.\zeta=0\ \ldots.\ (\mathrm{I})$$
$$[(b-c)\zeta+f].z.\sqrt{1+\zeta^2}+h.z^2(1+\zeta^2)-g\zeta-h\zeta^2=0\ \ldots.\ (\mathrm{II})$$
$$(g\zeta-h).z.\sqrt{1+\zeta^2}+f.(\zeta^2-1)+(a-\beta)\zeta=0\ \ldots.\ (\mathrm{III}).$$

Si l'on multiplie l'équation (I) par h, l'équation (II) par g, que l'on retranche ensuite l'une de l'autre, et qu'on considère la quantité $z\sqrt{1+\zeta^2}$ comme une seule inconnùe auxiliaire u, on aura une équation du premier degré en u, pour déterminer celle-ci en fonction des autres quantités; de même l'equation (III) donnera encore u par le premier degré en fonction des données et de l'inconnùe ζ. Egalant donc cette double valeur de u, on en tirera par un calcul peu compliqué une équation du troisième degré en ζ qui aura la forme suivante:

$$A_1\zeta^3+B_1\zeta^2+C_1\zeta+D_1=0,$$

dans laquelle on a pour abréger:

$$A_1=(f^2-g^2)h-(b-c).g.f$$
$$B_1=g(2h^2-g^2-f^2)-(a-b)(b-c)g+(2a-b-c)fh$$
$$C_1=h(2g^2-h^2-f^2)+h(a-b)(a-c)+(2b-a-c)fg$$
$$D_1=g(f^2-h^2)-f.h.(a-c).$$

Rémarquons que quand on fait l'élimination entre (I) et (II) seulement, on parvient à une équation du 4ème degré dans laquelle le terme constant se réduit à $f^2.h-f^2.h=0$; de sorte que cette équation aura une racine nulle, ce qui est facile à interpreter, et l'autre facteur, après la suppression de cette racine nulle, reproduira l'équation du 3ème degré, trouvée par la première méthode d'élimination, cette équation, ayant au moins une racine réelle, montre, qu'au centre d'inertie d'un système matériel quelconque donné il existe toujours au moins un axe d'équilibration des forces centrifuges: un tel axe est ce qu'on pourrait nommer pour plus de brièveté encore, axe de libre rotation, axe d'inertie du corps, et que l'on nomme communément axe principal.

Au contraire quand un solide est mis en mouvement de rotation autour d'un axe excentrique, et qu'il continue à tourner sur

cet axe pourvu d'un seul point fixe, sans que cet axe tourne ou tende à tourner sur le point fixe, sous l'action des seules forces centrifuges, l'axe se nommera axe d'équilibration relatif, axe principal relatif à ce point, ou enfin axe permanent de rotation: alors les forces centrifuges ne sauraient plus s'équilibrer d'une manière absolue, et sans l'intervention d'un point fixe au moins, attendu que pour un point différent du centre on ne saurait plus avoir les deux conditions $\Sigma . my' = 0$, $\Sigma . mz' = 0$; de sorte que sans un point fixe l'axe de rotation du solide serait au moins emporté d'un mouvement de translation rectiligne parallèle, en même temps que le solide tournerait sur lui.

3.

L'existence d'un axe d'inertie dans les solides étant déjà reconnue, si l'on dirige l'axe fixe des abscisses Ix suivant cette ligne Ix', on devra avoir d'après la condition mécanique de la question:

$$\Sigma . mx'y = 0, \ \Sigma . mx'z = 0$$

ou bien

$$\Sigma . mxy = 0, \ \Sigma . mxz = 0; \text{ à cause de } x' = x:$$

car Ix coïncidant avec Ix', les deux autres axes fixes Iy, Iz des coordonnées doivent être dans un plan normal à Ix', puisque par hypothèse nos trois axes directeurs Ix, Iy, Iz sont rectangulaires, et que d'un autre côté tout axe d'équilibration absolu exige que les sommes de la forme $\Sigma . mxy$, $\Sigma . mxz$ soient nulles, quelle que soit d'ailleurs la direction des deux axes restants Iy, Iz, tracés dans le plan normal. Donc pour le système de coordonnées ainsi disposé il faudra avoir $f = \Sigma . mxy = 0$, $g = \Sigma . mxz = 0$, et ces conditions nous donneront, étant introduites dans les valeurs de A_1, B_1 ....:

$$A_1 = 0, \ B_1 = 0, \ D_1 = 0, \ C_1 = h . [(a-b)(a-c) - h^2].$$

L'équation du 3ème degré, réduite au seule terme $C_1 \zeta = 0$ devient:

$$[(a-b)(a-c) - h^2] . h . \zeta = 0.$$

Celle-ci peut-être satisfaite 1) par l'hypotèse $\zeta = 0$, et chacune des équations (I), (II), (III) donnera pour z la valeur correspondante $z = 0$: ainsi l'on est ramené à conclure ce qu'on savait déjà, que l'axe d'équilibration absolu existe et qu'il coïncide avec Ix. — 2) L'équation peut encore être remplie par la supposition $h = 0$, ce qui donnera encore une fois $z = 0$, $\zeta = 0$, et cette circonstance prouve qu'outre l'axe Ix, celui des Iy, ou des Iz peut être un axe d'inertie à cause qu'on a déjà $f = 0$, $g = 0$: mais nous ne savons encore rien de positif à cet égard, puisqu'aucun symptôme ne nous annonce qu'il soit nécessaire de poser $h = 0$, pour satisfaire à l'égalité $C_1 \zeta = 0$. Enfin il est possible que le facteur entre crochets, savoir: $(a-b)(a-c) - h^2$ soit nul: éprouvons donc aussi cette supposition: et soit en conséquence:

$$(a-b)(a-c)=h^2 \ldots . \quad (A)$$

En vertu de $f=0$, $g=0$, les trois équation (I), (II), (III) donneront:

$$\left.\begin{array}{l}(b-c)\beta\gamma+(\gamma^2-\beta^2)h=0\\(a-c).a\gamma-\alpha.\beta.h=0\\(a-b)\alpha\beta-\alpha.\gamma.h=0\end{array}\right\}\ldots . \quad (B)$$

Si l'on supprime aux deux dernières le facteur α, ou si sans le supprimer, on transporte chaque terme en h dans le second membre, et qu'on multiplie les résultats membre-à-membre on reproduit la condition $h^2=(a-b)(a-c)$, admise ci-dessus comme 3ème cas possible. De plus la seconde ou la 3ème équation donne γ en valeur de β: et substituant cette valeur dans la première, on n'en déduit aucune valeur déterminée de β: parceque tous les termes du résultat renfermeront le facteur β^2: ainsi les quantités α, β, γ relatives à chaque axe d'équilibration différent de celui Ix ou Ix', resteraient indéterminées, et le problème général serait par conséquent aussi indéterminé; or les quantités $a, b, c, f=0, g=0, h$, dépendent non seulement de la position de l'axe Ix' ou Ix, mais encore de la forme du corps, et de la position des axes Iy, Iz, qui sont arbitraires de direction dans un plan défini: il est donc impossible d'avoir généralement $h^2=(a-b)(a-c)$; car quand même cette équation subsisterait pour une position spéciale des axes Iy, Iz; elle ne saurait pas rester vraie pour toutes les positions différentes. Ainsi l'opération dans la quelle on supprimait d'abord le facteur α, commun à tous les termes des deux dernières équations, ou à supprimer le facteur commun $\alpha^2\beta\gamma$ aux termes de la combinaison:

$$(a-c)(a-b)\alpha^2\beta\gamma-\alpha^2\beta\gamma.h^2=0$$

n'est point permise généralement. Donc il faut qu'on ait:

$$\text{ou } \alpha=0, \text{ ou à la fois } \beta=0,\ \gamma=0.$$

Or l'hypothèse de $\beta=0$, $\gamma=0$, donne $\alpha=1$, et ramène à l'axe Ix déjà trouvé. Il faut donc encore voir si celle de $\alpha=0$ ne pourra pas amener quelque nouveau résultat. Dans ce cas les trois équations posées plus haut se réduisent à la 1ère:

$$(b-c)\beta.\gamma+(\gamma^2-\beta^2)h=0$$

à la quelle il faut associer ce que devient la relation perpetuelle, savoir:

$$\beta^2+\gamma^2=1$$

Si l'on pose $\beta=\cos\varphi$, partant $\gamma=\sin\varphi$, la dernière deviendra identique, et la 1ère donnera pour l'angle φ:

$$\text{tang } 2\varphi=\frac{2h}{b-c}\ldots . \quad (c)$$

L'égalité de $\alpha=0$ montre d'abord, que s'il existe un 2ième, 3ième, axe d'équilibration absolu, il doit se trouver dans un plan nor-

mal à celui Ix' qu'on a déjà reconnu. La valeur de tang 2φ démontre ensuite, en calculant tang φ ou tang 2φ, que dans ce plan il existe deux axes rectangulaires entr'eux, propres à remplir chacun la condition prescrite. Notre examen des différentes manières de satisfaire à l'équation $C_1\zeta = 0$ prouve d'ailleurs avec évidence que tout autre axe en (I) ne saurait remplir cette même condition d'équilibre des forces centrifuges dans le cas général de la question. Si l'on applique le raisonnement précédent au cas d'un point fixe d'un corps quelconque, on trouvera évidemment la même conclusion: ainsi l'existence des trois axes d'équilibration absolus ou des trois axes principaux du centre, et des trois axes permanents de rotation, relatifs à un point fixe quelconque d'un solide, se trouve démontrée.

Remarque I. Les axes coordonnés fixes étant disposés de la manière indiquée, si la forme du solide est telle qu'on ait $h = \Sigma.myz = 0$ et $b = c$ ou $\int y^2dm = \int z^2dm$ par rapport aux Iy, Iz, l'équation (C) donnera tang $2\varphi = \frac{0}{0}$, c. à d. que dans le plan normal à un axe d'inertie d'un solide il peut y avoir une infinité d'autres axes d'inertie, pour certaines formes particulières de corps solides; et alors l'équation du 3ième dégré devient identique.

Remarque II. Nous concevons encore la possibilité d'existence d'une espèce de solides pour lesquels l'équation (A) soit remplie; mais comme alors les équations (B) laissent indéterminées à la fois les trois quantités α, β, γ, relatives à l'axe d'équilibration nouveau qu'on cherche, il s'ensuit que quand l'égalité (A) est remplie seulement par rapport à deux axes particuliers rectangles, situés dans un plan normal en I à un axe d'inertie donné, il y aura ou que du moins il pourra y avoir une infinité d'axes principaux pour de certaines formes spéciales de corps solides.

Remarque III. Pour abréger le plus que possible notre dissertation nous passerons sous silence quelques propriétés bien connûes que les personnes qui voudraient suivre notre méthode dans l'enseignement, pourront intercaler ici avec facilité, et nous insisterons sur quelques observations qui nous paraissent utiles.

1) Si un système matériel plan est disposé par rapport à une droite centrale de façon à avoir des quantités de matière égales et à égales distances de part et d'autre de cette droite, sur une même normale, nous nommerons cette droite une ligne de symétrie mécanique du système, ainsi p. ex. pour une surface plane elliptique chacun des deux axes conjugués rectangles est une ligne de symétrie directe, tandis qu'un simple diamètre serait seulement une ligne de symétrie inverse.

Le plan de la base commune d'un système polyédrique et de son symétrique est ce qu'on nommera plan de symétrie directe du système entier; on conçoit de même ce qu'il faut entendre par plan de symétrie inverse. La ligne d'intersection de deux plans de symétrie directe d'un système, si toutefois ces plans existent, est ce qu'on peut nommer ligne de symétrie directe du système; on conçoit de même ce qu'il faut entendre par ligne de symétrie inverse dans les solides. Ces notions posées, il est évident par la théorie des moments, que tout axe de symétrie directe d'un système matériel homogène est un axe absolu d'équilibration des forces centrifuges, partant qoe pour de certaines classes de solides, qui existent en grand nombre par le fait de la nature ou de

l'art, le calcul laborieux de la recherche d'un axe principal au moins devient inutile, et les deux autres se trouveront ensuite déjà moins laborieusement par le calcul des quantités h, b, c de l'équation (C). Si le solide a deux axes de symétrie directe, il n'y aura plus aucun calcul à faire, puisque le 3ième axe d'inertie sera normal au plan des deux autres.

2) Dans tout solide cylindrique ou prismatique homogène, engendré par le mouvement de transport parallèle d'une figure plane suivant une droite normale au plan les trois axes principaux coïncident l'un avec l'axe central normal au plan, et les deux autres avec les axes d'inertie de la section plane, faite dans le solide par un plan du centre, normal à la directrice du mouvement. Cette propriété a été établie par Mr. Binet (Journ. de l'Ec. polyt.). Nous en omettons pour le moment la démonstration.

3) L'équation générale des surfaces du second ordre rapportées à trois axes coordonnés rectangles démontre que ces surfaces admettent généralement trois plans de symétrie directe: elles admettent donc aussi trois axes de cette espèce: or si l'on considère une telle surface comme un système matériel continu et homogène, les trois axes de symétrie deviennent à leur tour trois axes d'équilibration des forces centrifuges: mais ces trois derniers sont rectangles entr'eux; les trois premiers le sont donc aussi: ce qui établit l'existence des diamètres conjugués rectangles dans les surfaces du second ordre; et l'on en rattache ainsi la théorie à la théorie plus générale des axes d'inertie des systèmes matériels, qui comprennent en effet le cas des courbes et des surfaces courbes, censées matérialisées, et cette matérialisation est permise, quisqu'elle n'enlève à ces courbes aucune de leurs propriétés géométriques.

4) Pour un système matériel plan, c. à d. ayant toutes ses parties matérielles situées dans un même plan, (xIy) par exemple, on a identiquement $\Sigma.mxz = 0$, $\Sigma.mxy = 0$, ou $g = 0$, $f = 0$, l'axe Ix coïncidant avec la normale en I au plan; et des équations (I, II, III) on conclut que deux des trois axes d'inertie sont à angle droit dans ce plan, et que le 3ième tombe sur la normale Ix; la position des deux 1ers axes se calculera donc par l'équation (C), en évaluant $h = \Sigma.myz$ à l'instar d'un moment d'inertie, et les quantité $b = \Sigma.my^2$, $c = \Sigma.mz^2$: cette disposition des axes d'inertie du cas actuel est aussi évidente par la théorie des moments, puisque chaque force centrifuge élémentaire ($\Omega^2 mx$, $\Omega^2 my$) passe par le centre d'inertie, et que par conséquent son moment à tourner l'essieu de rotation Ix autour d'un axe quelconque en I, situé dans le plan est évidemment nulle d'elle-même.

§. II. Théorie des axes permanents de rotation.

Extension de la méthode précédemment exposée, et détermination des axes permanents, relatifs à un point fixe quelconque du solide, par rapport aux axes principaux, déjà censés connus.

4.

D'après ce qu'on a déjà remarqué, il est manifeste qu'un corps

solide étant mis en mouvement de rotation autour d'un axe OK, passant par un point désigné (O) du solide, les forces centrifuges ne sauraient plus se faire équilibre d'une manière absolûe; que si le point (O) n'est pas fixe, ce point et l'axe OK seront emportés dans l'espace d'un mouvement plus ou moins compliqué, en même temps que le corps tourne sur OK: la question precédemment résolue doit donc être modifiée, et posée de la manière suivante.

Un corps solide est invariablement lié à un certain point fixe (O), intérieur ou extérieur, et l'on demande autour de quel axe OK en ce point il faut le faire tourner, pour que les forces centrifuges qui naissent de cette rotation, se fassent équilibre par le moyen du seul point fixe.

Solution. La condition d'équilibre est évidemment remplie, si l'on exprime par le calcul que la somme algébrique des énergies des forces centrifuges à tourner l'axe de rotation OK autour d'une droite quelconque en (O), située dans le plan perpendiculaire est nulle. A cet effet considérons la rotation à un instant quelconque autour de OK censé d'abord fixe, comme dans le 1er cas, et concevons par le point donné trois axes reetangles OX, OY, OZ, dont le 1er se superpose sur la droite OK, inconnûe de direction, et dont les deux autres se trouvent dans un plan normal en (O) à OK. A ce même instant le centre d'inertie (I) du solide occupera dans l'espace une certaine position.

Concevons en (I) trois autres axes rectangles Ix, Iy, Iz respectivement parallèles aux premiers OX, OY, OZ: enfin imaginons en ce même point (I) les trois axes d'inertie du solide Ix', Iy', Iz', qui seront en général autrement dirigés que ceux du second système, et resteront cependant perpétuellement rectangulaires entr'eux.

Soient (X, Y, Z), (x, y, z), (x', y', z') les coordonnées d'un point quelconque m du solide, rapporté respectivement aux systèmes (OX, OY, OZ), (Ix, Iy, Iz), (Ix', Iy', Iz') pour l'instant où l'on considère le mouvement; et nommons $x_1 y_1 z_1$ les coordonnées au même instant du centre (I), rapporté au premier système, tandis que S, T, U dénoteront les coordonnées du point fixe (O) par rapport aux directrices d'inertie (Ix', Iy', Iz'), les quelles sont mobiles avec le corps,

Si pour abréger, et soulager la mémoire, on dresse le tableau de notations:

$$\cos(X, x') = \cos(x, x') = \alpha, \quad \cos(Y, x') = \cos(y, x') = \beta, \quad \cos(Z, x') = \cos(z, x') = \gamma$$

$$\cos(X, y') = \cos(x, y') = \alpha', \quad \cos(Y, y') = \cos(y, y') = \beta', \quad \cos(Z, y') = \cos(z, y') = \gamma'$$

$$\cos(X, z') = \cos(x, z') = \alpha'', \quad \cos(Y, z') = \cos(y, z') = \beta'', \quad \cos(Z, z') = \cos(z, z') = \gamma''$$

on obtiendra par la transformation connûe:

$$x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \quad \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$$
$$y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' \quad \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$$
$$z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' \quad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$$
$$\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0$$
$$\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0.$$

Pour fixer les idées, supposons que le centre (I) se trouve dans le tri-rectangle des X, Y, Z positifs, et comptons les x, y, z dans le même sens, que les X, Y, Z; le point (O) se trouvera donc ainsi dans le tri-rectangle des x, y, z négatifs, et les quantités $-x_1$, $-y_1$, $-z_1$ exprimeront parconséquent les coordonées du point (O), rapporté aux axes Ix, Iy, Iz. Mais déjà S, T, U expriment les coordonnées de (O) rapporté aux axes d'inertie Ix', Iy', Iz': on aura donc x_1, y_1, z_1 par les formules:

$$-x_1 = \alpha S + \alpha' T + \alpha'' U$$
$$-y_1 = \beta S + \beta' T + \beta'' U$$
$$-z_1 = \gamma S + \gamma' T + \gamma'' U.$$

Pour passer ensuite des coordonnées X, Y, Z aux coordonnées parallèles x, y, z, on a les équations:

$$X = x + x_1,\quad Y = y + y_1,\quad Z = z + z_1$$
$$XY = xy + yx_1 + xy_1 + x_1 y_1$$
$$XZ = xz + zx_1 + xz_1 + x_1 z_1$$
$$YZ = yz + zy_1 + yz_1 + y_1 z_1;$$

et comme par hypothèse les plans coordonnés (xz, xy, yz) passent par le centre d'inertie, on a $\Sigma . mx = 0$, $\Sigma . my = 0$, $\Sigma . mz = 0$, et partant, M exprimant la masse entière du corps:

$$\Sigma . mXY = Mx_1 y_1 + \Sigma . mxy$$
$$\Sigma . mXZ = Mx_1 z_1 + \Sigma . mxz$$
$$\Sigma . mYZ = My_1 z_1 + \Sigma . myz.$$

Mais l'axe OK ou OX devant être un axe d'équilibration des fòrces centrifuges, il faut que la somme de leurs moments à tourner OX autour d'un axe quelconque tel que OY ou OZ soit nulle; c'est ce qu'on pourra exprimer en posant à la fois $\Sigma . mXY = 0$, $\Sigma . mXZ = 0$; ou bien en écrivant simplement $\Sigma . mXY = 0$, l'axe $0Y$ étant alors dirigé d'une manière quelconque par le point fixe, dans un plan normal à OX. Ainsi en se donnant cette latitude, on doit se borner à faire:

$$\Sigma . mXY = 0$$

ou bien:

$$Mx_1 y_1 + \Sigma . mxy = 0.$$

Si l'on substitue dans cette dernière équation les valeurs de (x, y), (x_1, y_1) en fonction de $x', y', z', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \ldots . S, T, U$, on obtiendra l'équation de condition générale:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta(MS^2 + \Sigma . mx'^2) + \alpha'\beta'(MT^2 + \Sigma . my'^2) \\ \qquad\qquad + \alpha''\beta''(MU^2 + \Sigma . mz'^2) \\ + MST . (\alpha\beta' + \alpha'\beta) + MSU(\alpha\beta'' + \alpha''\beta) \\ \qquad\qquad + MTU(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta'). \end{array} \right.$$

Cette équation devant subsister, quelle que soit la valeur de β, β', β'', aura encore lieu, quand on fait tour-à-tour chacune de ces quantités nulle. Si donc on pose pour abréger:

$$MST = f,\ MSU = g,\ MTU = h$$
$$\Sigma . my'^2 - \Sigma . mz'^2 + MT^2 - MU^2 = B'$$
$$\Sigma . mx'^2 - \Sigma . mz'^2 + MS^2 - MU^2 = A',$$

on obtient les équations suivantes, toutes issûes de la condition générale:

$$\alpha'\alpha''B' + f\alpha\alpha'' - g\alpha\alpha' + h(\alpha''^2 - \alpha'^2) = 0 \ldots . \text{ (I')}$$
$$\alpha\alpha''A' + f\alpha'\alpha'' + g(\alpha''^2 - \alpha^2) - h\alpha\alpha' = 0 \ldots . \text{ (II')}$$
$$\alpha\alpha'(A' - B') + f(\alpha'^2 - \alpha^2) + g\alpha'\alpha'' - h\alpha\alpha'' = 0 \ldots . \text{ (III')}.$$

Multipliant la 1re par α, la seconde par α', et retranchant membre-à-membre, puis supprimant le facteur α'' commun aux termes restants, on obtient la 3ième équation. Ainsi cette dernière n'est qu'une conséquence des deux autres, ce qui prouve que jusqu'ici il n'y a aucune impossibilité à la question proposée; car on n'a de cette manière que deux équations distinctes, lesquelles étant jointes à la relation perpétuelle $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, serviront à faire connaître les angles relatifs aux cosinus α, α', α'', et compris entre l'axe OK, et entre les axes d'inertie Ix', Iy', Iz'. De plus comme l'élimination de α', α'' se réduit à une opération toute analogue à celle qu'on a déjà effectuée pour le cas du centre d'inertie, et que d'un autre côté les trois équations précédentes sont aux coëfficients multiplicateurs près les mêmes que celles du premier cas, il s'ensuit que si l'on pose encore une fois:

$$\alpha = \cos\vartheta . \cos\eta,\ \alpha' = \cos\vartheta . \sin\eta,\ \alpha'' = \sin\vartheta$$

puis:

$$\text{tang}\,\vartheta = x,\ \text{tang}\,\eta = \zeta,$$

on obtiendra l'équation du 3ième dégré:

$$A_1\zeta^3 + B_1\zeta^2 + C_1\zeta + D_1 = 0,$$

dans la quelle on a sans nouveaux calculs et par comparaison avec le cas traité:

Digitized by Google

$$A_1 = h(f^2 - g^2) - gfB'$$
$$B_1 = g(2h^2 - f^2 - g^2) + hfA' + (hf - gB')(A' - B')$$
$$C_1 = h(2g^2 - h^2 - f^2) + fgB' + (hA' - gf)(A' - B')$$
$$D_1 = g(f^2 - h^2) - fhA'.$$

Soient A, B, C les trois moments d'inertie principaux du corps, relatifs au centre (I): on aura donc:

$$A - B = \Sigma.\, m(y'^2 - x'^2),\ A - C = \Sigma.\, m(z'^2 - x'^2),$$
$$B - C = \Sigma.\, m(z'^2 - y'^2);$$

et pour plus de clarté dans les notations, il sera utile de dresser le tableau suivant:

$$A' = C - A + M(S^2 - U^2)$$
$$B' = C - B + M(T^2 - U^2)$$
$$A' - B' = B - A + M(S^2 - T^2)$$
$$f = MST,\ g = MSU,\ h = MTU.$$

Si l'on développe maintenant les valeurs de A_1, B_1, C_1, D_1 en fonction des constantes A, B, C, qui expriment en calcul par leurs valeurs respectives le mode de distribution de la matière inerte, ou ce qu'on pourrait nommer la forme mécanique du corps, et en fonction des quantités S, T, U, coordonnées du point fixe (O) par rapport aux trois axes d'inertie du solide, on trouvera par des réductions longues mais faciles:

$$A_1 = M^2(B - C)S^2TU,$$
$$B_1 = M^2(C - A)ST^2U + M^2(B - A)SU^2 + M^2(C - B)(T^2 - U^2)SU$$
$$- M(C - B)(B - A)SU,$$
$$C_1 = M^2(C - B)S^2TU - M^2(B - A)TU^2 + M^2(C - A)(S^2 - T^2)TU$$
$$+ M(B - A)\ C - A)TU,$$
$$D_1 = M^2(A - C)ST^2U.$$

Ainsi donc le problème général tel que nous voulions l'envisager, se trouve complétement rèsolu: car un solide homogène continu ou discontinu étant donné de grandeur et de position dans l'espace, et connaissant, comme cela arrive souvent (remarq. III. No. 3.) la position de ses trois axes d'inertie, on obtiendra celle de ses trois axes permanents, relatifs à un point fixe quelconque par l'évaluation simple des quantités A, B, C, M, et des coordonnées S, T, U, qui donnent la position du point fixe par rapport aux trois axes d'inertie. Car ces quantités étant connûes en nombres, on obtiendra la valeur de ζ par la résolution d'une équation numérique du 3ième dégré. Pour tirer ensuite de là la valeur de $z = \text{tang}\, \vartheta$, il faut se rappeler que dans le cas du centre (I) nous avons trouvé pour $z\sqrt{1 + \zeta^2}$ la valeur $\frac{(a - b)\zeta + f(\zeta^2 - 1)}{h - g\zeta}$; de sorte qu'alors la valeur de z était connûe en fonction de ζ, déjà censé calculé. De

Digitized by Google

plus, pour passer de ce premier cas au cas actuel, il faut changer $b-c$ en B', $a-c$ en A', partant $a-b$ en $A'-B'$, puis les quantités f, g, h, qui d'abord désignaient les sommes $\Sigma.mxy$, $\Sigma.mxz$, $\Sigma.myz$, désignent présentement les quantités MST, MSU, MTU: donc on aura dans le cas actuel:

$$z=\frac{(A'-B')\zeta+f(\zeta^2-1)}{(h-g\zeta)\sqrt{1+\zeta^2}}$$

ou bien:

$$z=\frac{MS^2-MT^2+B-A+MST(\zeta^2-1)}{MU(T-S\zeta)\sqrt{1+\zeta^2}}.$$

Connaissant ζ et z, on connaîtra les quantités α, α', α'' relatives à un même axe inconnu OK, lequel sera par suite connu de position et de direction dans le solide proposé.

L'axe OK ou OX étant ainsi trouvé, comme les équations (I', II', III') sont absolument analogues aux équations (I, II, III) du 1er cas, il s'ensuit que les deux autres sont dans un plan normal en (O) à cet axe, et qu'on en calculera les directions par l'équation suivante qui est l'analogue de l'équation ((C). No. 3.):

$$(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi).\Sigma.mYZ-\sin\varphi.\cos\varphi.\Sigma.m(Y^2-Z^2)=0\ \ldots.\ (C')$$

5.

Il importe de rémarquer, que les valeurs des coefficients A_1, B_1, C_1, D_1 dépendant pour tous les termes en A, B, C, S, T, U de la différence des moments d'inertie, pris deux-à-deux, ne peuvent pas se simplifier d'avantage dans le cas particulier d'une forme de corps donnée, à moins que cette forme ne soit donnée en même temps par ses dimensions. On voit aussi par les formules générales que deux solides semblables et semblablement placés ont les mêmes axes principaux, ou du moins des axes parallèles en deux points homologues quelconques.

6.

Quand le solide est de révolution autour d'un axe d'inertie Ix', on a $B-C=0$, partant $A_1=0$, et l'équation trouvée précédemment s'abaisse au second degré, car elle devient:

$$B_1\zeta^2+C_1\zeta+D_1=0\ \ldots.\ (D)$$

Dans ce même cas on conclut déjà par la théorie du §. I. que tout plan conduit suivant l'axe de révolution est un plan principal ou d'inertie, c. à d. renfermant deux axes principaux du centre: donc de quelque manière que le point fixe (O) est placé, il peut être censé situé dans un plan d'inertie central $(x'Iy')$, et il est parfaite permis de faire $U=0$, ce qui donne $B_1=0$, $C_1=0$, $D_1=0$, et $z=\infty$. Ainsi dès-lors un des axes permanents de rotation en (O) est normal au plan, que déterminent l'axe de révolution et le point donné (O); et les deux autres sont parconséquent dans ce plan. Pour y trouver leur position, on peut procéder par le moyen de l'équation (C'). D'ailleurs, si avant que de faire $U=0$ commun à

tous les termes de l'équation (D), on supprime ce facteur, et que l'on pose ensuite $U=0$, on obtient par substitution de B_1, C_1, D_1 et en égard à $B-C=0$, la relation suivante:

$$\zeta^2+\frac{M(S^2-T^2)+B-A}{M^2ST}\zeta-1=0,$$

laquelle donne la valeur des angles que forment avec l'axe de figure Ix' les deux axes principaux en (O) situés dans le plan (OIx'), et l'on voit encore, ce qu'on savait déjà généralement, que ceux-ci sont à angles droits, puisque les racines ζ', ζ'' donnent la condition $\zeta'\zeta''+1=0$.

Quand en un point d'un solide donné il existe une infinité d'axes permanents, tous situés dans un même plan, ce point peut être considéré comme un centre d'axes, et on le nommera par cette raison centre de rayonnement ou centre de radiation plane, tandisque nous nommerons centre de radiation absolûe tout point d'un solide pour lequel il existe une infinité d'axes suivant toutes les directions possibles de l'espace.

D'après ce qui précède, il est facile d'obtenir les centres de radiation plane des solides de révolution. En effet pour trouver les coordonnées d'un tel point, il faut exprimer que les racines ζ, ζ' sont indéterminées, ce qui exige qu'on fasse à la fois:

$$ST=0, \text{ et } B-A=M(T^2-S^2).$$

La 1re de ces égalités est satisfaite par $S=0$, et par $T=0$. Si l'axe de figure est un axe de moment d'inertie maximum, on fera $T=0$, et il vient:

$$S=\pm\sqrt{\frac{A-B}{M}}.$$

Ainsi dans ce cas le solide renferme deux foyers de radiation plane, situés sur l'axe de figure à égale distance du centre: ce sont donc deux foyers de radiation conjugués.

Si l'axe de figure est un axe de moment d'inertie minimum, il faudra faire au contraire $S=0$, ce qui donne:

$$T=\pm\sqrt{\frac{B-A}{M}}.$$

Ainsi dans tout solide de révolution autour d'un axe de moment minimum, il existe une infinité de centres de radiation plane, tous distribués sur le lieu d'une circonférence de cercle, tracée dans le plan normal à l'axe de figure, et le quel plan passe par le centre d'inertie: le rayon de cette circonférence est

$$\sqrt{\frac{B-A}{M}}.$$

A la vérité la solution précédente ne semble d'abord donner que deux points conjugués de cette espèce: mais il convient de se rappeler que toute droite, tirée par le centre d'inertie normalement à l'axe de révolution est un axe d'inertie, et en réalité la solution nous

indique qu'une telle droite renferme deux points de radiation conjugués: elle montre donc qu'en effet chaque point de la circonférence en question est un centre de radiation plane.

7.

Observons que les propriétés précédentes subsistent encore pour de certaines classes de solides qui ne sont pas de révolution. Concevons p. ex. le solide matériel homogène, engendré par le mouvement d'une figure plane dont le centre d'inertie se ment sur une droite normale à son plan, et d'un mouvement de transport commun à tous les points de la figure. Si pour les deux axes d'inertie de la figure plane les moments d'inertie correspondants sont égaux entr'eux, le solide engendré aura aussi ses moments égaux relativement à ses deux axes principaux lesquels sont dans un plan normal à l'axe directeur, et de plus parallèles aux axes principaux de la figure mobile, tel est p. ex. le cas d'un parallélipipède droit à base quarrée ou à base lozange, d'un cylindre à base circulaire, quoique appartenant déjà aux solides de révolution. Il existe d'ailleurs d'autres cas de solides qui sans être compris dans l'une ni dans l'autre des deux espèces précédentes ont néanmoins deux moments d'inertie principaux du centre égaux entr'eux: tel est p. ex. l'octaèdre formé par deux pyramides égales régulières, appuyées sur une même base quarrée, et même lozange. Les diagonales de cette base sont évidemment deux axes principaux à moments égaux, tandis que le 3ième axe d'inertie central répondra en général à un moment plus fort ou plus faible.

Si l'on demandait les axes permanents de rotation d'un tel solide, relatifs à un point fixe quelconque (O), la solution de la question se trouverait toute faite par nos formules générales. En nommant Ix' l'axe du moment d'inertie inégal, on aurait ici $B = C$, partant

$$A_1 = 0,\ B_1 = M^2(B - A)S\,.\,U(T^2 + U^2),$$
$$C_1 = M^2(B - A)TU(S^2 - T^2 - U^2 + \frac{B - A}{M}),$$
$$D_1 = - M^2(B - A)ST^2 U,$$
$$B_1\zeta^2 + C_1\zeta + D_1 = 0.$$

Si l'on porte maintenant dans cette dernière les valeurs de B_1, C_1, D_1, on pourra y supprimer ensuite le facteur commun $M^2(B - A)U$ toutes les fois que le point fixe (O) ne se trouve point placé dans le plan $y'x'$: car alors U ne sera pas nul. Ayant une fois ζ par l'équation ainsi préparée, on aura également z conformément aux indications de la fin du No. 4. Ainsi la question actuelle est resolûe.

Si l'on resout l'équation en ζ, on reconnaîtra que pour les points de radiation des solides de cette classe il faut avoir encore $C_1 = 0$, $B_1 = 0$, partant:

$$M^2(B - A)SU = 0,\ M^2(B - A)TU(S^2 - T^2 - U^2 + \frac{B - A}{M}) = 0.$$

De là on conclut 1) que quand l'axe directeur du mouvement de la figure génératrice (ou l'axe du moment inégal dans d'autres cas) est un axe de moment d'inertie maximum, il existe sur cet axe deux foyers conjugués de radiation plane, et distants du centre d'inertie d'une quantité $\sqrt{\frac{A-B}{M}}$: que si au contraire cet axe central est un axe de moment d'inertie minimum, les foyers de radiation plane, conjugués deux-à-deux, se trouveront sur une circonférence de cercle située dans le plan normal en (I) à l'axe dont il s'agit, et décrite avec un rayon $\sqrt{\frac{B-A}{M}}$. Examinons de plus près la dernière hypothèse laquelle admet $B > A$, et donne parconséquent:

$$S = 0, \text{ et } T(S^2 - T^2 - U^2 + \frac{B-A}{M}) = 0.$$

L'équation $S = 0$ montre d'abord, que si les centres de radiation plane existent, il faut les chercher tous dans le plan $(y'Ix')$. La 2ième équation est ensuite satisfaite par l'égalité à zéro de chacun de ses facteurs, ce qui donne tour-à-tour:

$$T = 0, \text{ et } T^2 + U^2 = \frac{B-A}{M}.$$

Mais l'équation $T = 0$ prouve, que le point $U = \frac{B-A}{M}$ du solide est lui-même un foyer de radiation plane, c. à d. que tous les axes en ce point situés dans un certain plan peuvent être des axes permanents de rotation: mais évidemment ce n'est là qu'une solution particulière de la circonférence $T^2 + U^2 = \frac{B-A}{M}$. Si l'on a encore $B = A$, ce qui est la limite de l'inéquation $B > A$, il viendra à la fois $S = 0$, $T^2 + U^2 = 0$, ou $S = 0$, $T = 0$, $U = 0$: c. à d. qu'alors le centre d'inertie est un foyer de radiation plane d'axes principaux, ce qui n'est encore qu'une suite nécessaire de la circonférence reconnûe.

Il est du reste facile de se convaincre, que les points ainsi obtenus sont de radiation plane; car par exemple la supposition de $U = 0$, $T = 0$ donne $z = \infty$, de sorte qu'il y a toujours un axe permanent qui coïncide au point donné avec la normale au plan $x'y'$.

L'hypothèse $S = 0$, $M(T^2 + U^2) = B - A$ réduit la valeur de z à $z = \frac{U}{T}$, et fait voir que l'un des trois axes permanents en un point quelconque pris sur le cercle $M(T^2 + U^2) = B - A$, a une inclinaison déterminée sur le plan $(x'y')$, dépendante de la position particulière de ce point, et que les autres axes permanents en nombre illimité, sont cependant tous situés dans un même plan normal au 1er axe.

La condition de $C_1{}^2 - 4B_1D_1 = 0$, qui exprime que les deux racines de ζ sont égales entr'elles, ne conduit à aucune conclusion qui ne soit déjà connûe; on trouverait facilement qu'elle ne saurait être satisfaite que par la supposition de $C_1 = 0$, $B_1 = 0$ qu'on a déjà examinée.

Digitized by Google

Les racines de l'équation $B_1\zeta^2 + C_1\zeta + D_1 = 0$ ne sauraient jamais devenir imaginaires, parceque la quantité $C_1^2 - 4B_1D_1$ se réduit à une quantité essentiellement positive:

$$M^4(B-A)^2T^2U^2(S^2 - T^2 - U^2 + \frac{B-A}{M})^2$$
$$+ 4M^4(B-A)^2S^2T^2U^2(T^2+U^2).$$

Ainsi conformément aux conclusions de la méthode générale il n'existe ici aucun point extérieur du solide, qui n'admette au moins trois axes permanents.

Les deux racines de l'équation trouvée sont égales et de signes contraires dans tous les cas particuliers où l'on a $C_1 = 0$, et elles deviennent:

$$\zeta = \pm\sqrt{-\frac{D_1}{B_1}} = \pm\frac{T}{\sqrt{T^2+U^2}}.$$

Dans ce cas il faut que le point (O) soit placé sur une surface du second ordre $C_1 = 0$ ou:

$$S^2 - T^2 - U^2 = \frac{A-B}{M},$$

la quelle coupe les plans principaux $(x'y', x'z')$ suivant deux hyperboles, et le plan $(y'z')$ suivant une circonférence imaginaire ou réelle, selon que l'axe Ix' du moment inégal est de maximum ou de minimum: ainsi la surface sera un hyperboloïde de révolution à deux nappes dans le premier cas, et à une seule nappe dans le second cas. On obtiendra d'ailleurs sans difficulté la valeur de z correspondante à celle de $\zeta = \pm\frac{T}{\sqrt{U^2+T^2}}$ dans la formule générale qui donne z en ζ, S, T, U, etc.....

Pour l'espèce de solides dont on vient de s'occuper, on ne saurait faire séparément $B_1 = 0$, ni $D_1 = 0$, sans admettre que le point (O) soit placé dans l'un des trois plans principaux du solide. Or cette position particulière du point (O) mérite sans doute quelque attention: mais on peut l'envisager d'une manière plus générale et même pour les corps qui ont à la fois leurs trois moments d'inertie principaux du centre inégaux entr'eux. Cet examen fera l'objet du No. suivant.

8.

On demande de déterminer les axes permanents d'un solide, relatifs à un point situé dans l'un quelconque des trois plans principaux du centre de ce solide.

Solution. Supposons d'abord que le point (O) soit situé dans le plan principal (x', y'); on aura donc $U = 0$, partant $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $C_1 = 0$, $D_1 = 0$, car U est un facteur commun à tous ces coefficients. Il semble donc que pour le point ainsi placé il y ait une infinité d'axes permanents, ou que du moins, s'il n'y en a que trois, leur détermination échappe à la méthode générale. Mais

Digitized by Google

on s'apperçoit en même temps qu'en supprimant le facteur U commun à tous les termes de l'équation du 3ième degré, et cherchant ensuite ce que deviennent les quantités $A_1 : U$, $B_1 : U$, $C_1 : U$, $D_1 : U$ par la supposition de $U = 0$, on parvient à l'équation véritable qui convient à ce nouveau cas. Nommant $\left(\frac{A_1}{U}\right)$ la valeur de $\frac{A_1}{U}$ qui résulte de cette hypothèse, $\left(\frac{B_1}{U}\right)$ celle de $\frac{B_1}{U}$, et ainsi de suite pour C_1, D_1, on aura

$$\left(\frac{A_1}{U}\right)\zeta^3 + \left(\frac{B_1}{U}\right)\zeta^2 + \left(\frac{C_1}{U}\right)\zeta + \left(\frac{D_1}{U}\right) = 0,$$

et cette équation pourra servir à déterminer les trois axes permanents. Mais elle ne fait pas connaître d'une manière générale la position mutuelle de ces lignes, et c'est cependant là l'objet auquel il faut attacher ici le plus d'importance. En se reportant ici aux équations générales (I′, II′, III′) et remarquant que $U = 0$ donne $g = 0$, $h = 0$, on obtient les relations simplifiées:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \alpha'\alpha''B' + f\alpha\alpha'' = 0 \\ (2) & \alpha\alpha''A' + f\alpha'\alpha'' = 0 \\ (3) & \alpha\alpha'(A' - B') + f(\alpha'^2 - \alpha^2) = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} A' = MS^2 + C - A \\ B' = MT^2 + C - B \\ A' - B' = M(S^2 - T^2) + B - A \end{array}\right\}$$

Si l'on supprime d'abord le facteur α'' dans chaque membre des deux premières conditions, on a:

$$\alpha'B' + f\alpha = 0, \ \alpha A' + f\alpha' = 0.$$

Tirant de là les valeurs de α', et les égalant entr'elles, on obtient la condition:

$$(f^2 - A'B')\alpha = 0,$$

et comme on ne peut avoir généralement le facteur $f^2 - A'B'$ égal à zéro, à moins que le point (O) déjà situé dans le plan $(x'y')$ n'y occupe une position particulière, il est manifeste qu'on doit faire $\alpha = 0$; ce qui donne parsuite $\alpha' = 0$; ces valeurs étant introduites dans la relation perpétuelle $\alpha^2 + \ldots = 1$ donneront $\alpha'' = \pm 1$. Ainsi dans ce cas l'un des trois axes cherchés est paralèlle à Iz' ou se trouve normal au plan principal dans lequel on a placé le point (O). Quant aux deux autres, ils seront parconséquent situés dans ce plan même où ils occupent une position qu'on peut déterminer par la méthode de l'équat. (C'). No. 4.; mais on peut aussi les déduire des équations de conditions posées ci-dessus. En effet les deux premières doivent être satisfaites aussi par la supposition de $\alpha'' = 0$, ce qui laisse les cosinus α, α' encore inconnus. Mais comme on a outre la 3ième équation celle-ci: $\alpha^2 + \alpha'^2 = 1$, on aura deux relations pour déterminer deux inconnues. L'élimination donnera:

$$\alpha' = -\frac{f}{\alpha(A' - B')} \cdot (1 - 2\alpha^2), \ \alpha'^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(A' - B')^2}{(A' - B')^2 + 4f^2}}.$$

Si donc on pose $\alpha = \cos\varphi$, et que l'on dénote par φ', φ'' les angles qui répondent aux deux racines, on obtient:

$$(D) \ldots\ldots \cos^2\varphi' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{A'-B'}{\sqrt{(A'-B')^2+4f^2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}K,$$

$$\cos^2\varphi'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{A'-B'}{\sqrt{(A'-B')^2+4f^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}K,$$

pour abréger. La valeur $\alpha'' = 0$ montre qu'un ou deux des axes cherchés sont situés dans le plan d'inertie $(x'y')$, et les valeurs φ', φ'' qui donnent $\tang\varphi' \,.\, \tang\varphi'' + 1 = 0$ nous apprennent qu'effectivement ces axes sont au nombre de deux et qu'ils sont à angles droits. De plus leurs directions par rapport à Ix' se trouvent déterminées par les équations en φ', φ''. Ainsi la question actuelle est resolûe.

Pour comprendre la direction de ces deux axes dans une seule formule, on observera que $\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}K$ donne:

$$\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}K,\ \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = K,\ 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 1 - K^2,$$

partant:

$$\tang 2\varphi = \frac{2f}{A'-B'} = \frac{2MST}{B-A+M(S^2-T^2)},$$

résultat auquel on parvient aussi par la méthode qui emploie directement l'angle auxiliaire φ. Le résultat précédent et notamment la valeur de $\cos\varphi$ ou celle de $\tang 2\varphi$ nous fournit le moyen de de déterminer les centres de radiation plane situés dans le plan principal $(x'y')$. On voit en effet qu'on n'a qu'à exprimer analytiquement la condition que l'angle φ reste indéterminé, ce qui revient à faire à la fois:

$$ST = 0,\ B - A + M(S^2 - T^2) = 0.$$

Si l'on a $B > A$, on fera $S = 0$, et il vient:

$$T = \pm\sqrt{\frac{B-A}{M}}.$$

Si l'on a $B < A$, on fera $T = 0$, et il vient:

$$S = \pm\sqrt{\frac{B-A}{M}}.$$

On conclut de là que l'axe du moment d'inertie maximum dans un solide quelconque renferme toujours deux foyers conjugués de radiation plane, qui a lieu dans le plan principal même formé par les deux autres axes d'inertie du centre.

On démontrerait de même que l'axe principal du moment d'inertie moyen du solide renferme deux foyers conjugués de radiation plane qui se fait dans le plan formé par les deux autres axes principaux. La distance des foyers au centre est dans ce dernier cas

Digitized by Google

égale à $\sqrt{\frac{B-C}{M}}$. On suppose alors $A > B$ et $B > C$: l'axe du moment d'inertie minimum ne renferme que des foyers de radiation imaginaires. Dans le cas des solides de révolution où l'on a $B = C$, la distance focale devient nulle, et l'on en conclut ce qu'on savait déjà: que dans les solides de révolution et dans ceux ayant seulement deux moments égaux, tous les axes du centre, tracés dans le plan normal à l'axe de figure ou à l'axe du moment inégal, sont des axes principaux.

9.

Nous avons conclu de l'équation:

$$(f^2 - A'B')\alpha = 0,$$

que l'un des trois axes permanents est normal au plan principal où le point fixe (O) se trouve placé: mais si le point avait dans ce plan, dans celui des ($x'y'$) p. ex. une position particulière propre à satisfaire à l'égalité à zéro du 1er facteur c. à d. à l'égalité:

$$f^2 - A'B' = 0,$$

on ne serait plus en droit d'admettre cette conclusion, relative à la direction de l'axe cherché; car les quantités α, α', α'' étant toujours assujetties aux conditions (1, 2, 3) resteraient indéterminées entre de certaines limites. Or la condition $f^2 - A'B' = 0$ peut être remplie de deux manières: 1) par l'hypothèse de $f = 0$, $A'B' = 0$ à la fois; 2) par l'hypothèse de $f^2 = A'B'$, équation qui peut subsister sans qu'aucune des quantités f, A', B' soit séparément nulle. Examinons d'abord le cas de la première supposition. Elle exige qu'on ait à la fois $f = 0$, $A' = 0$, ou bien $f = 0$, $B' = 0$. Or chaque système de ces équations ramène aux propriétés particulières que l'on a déja reconnues. Reste donc à interpréter l'hypothèse plus générale:

$$f^2 = A'B',$$

laquelle étant développée deviendra:

$$MS^2(C-B) + MT^2(C-A) = -(C-A)(C-B).$$

Si C est le plus grand des trois moments d'inertie principaux, la courbe précédente est imaginaire.

Si C est le minimum de ces trois moments d'inertie, la courbe de cette équation sera une ellipse, tracée dans le plan formé par les axes du moment maximum et du moment moyen.

Si C est le moment d'inertie moyen, il y aura un terme positif dans le premier membre, tandis que l'autre est négatif, et le second membre devient positif. Ainsi dèslors la courbe de l'équation sera une hyperbole concentrique au système et tracée dans le plan principal formé par les axes des moments minimum et maximum. De plus la supposition $f^2 = A'B'$ réduit les équations (1) et (2) à une même condition:

$$(\alpha A' + f\alpha')\alpha'' = 0,$$

à laquelle il faut joindre la relation perpétuelle:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$$

et l'équation (3):

$$\alpha\alpha'(A - B') + f(\alpha'^2 - \alpha^2) = 0.$$

Si l'on suppose d'abord $\alpha'' = 0$, il restera pour la détermination des quantités α, α' les deux équations de condition:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 = 1,$$
$$\alpha\alpha'(A' - B') + f(\alpha'^2 - \alpha^2) = 0;$$

car alors cette dernière n'est plus une conséquence des deux autres à cause de $\alpha'' = 0$. Or ce cas d'élimination a été déjà traité, et il nous a donné un système d'axes permanents, l'un normal au plan d'inertie $(x'y')$, et les deux autres situés dans ce plan au point donné (S, T). Pour l'un de ces derniers on a trouvé qu'il fait avec l'axe des abscisses un angle φ' donné par l'équation (D) du No. 8. laquelle devient ici en vertu de la valeur de f^2:

$$\cos^2\varphi' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{A' - B'}{A' + B'}\right) \quad \text{et} \quad \tang^2\varphi' = \frac{A'}{B'}.$$

Ainsi l'un de ces axes forme avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente est $\pm\sqrt{\frac{B'}{A'}}$, et l'autre un angle de tangente $\mp\sqrt{\frac{A'}{B'}}$. Mais nos équations de condition doivent être satisfaites aussi indépendamment de la valeur particulière $\alpha'' = 0$ attribuée à α''. L'équation (3) n'est d'ailleurs qu'une conséquence des deux autres (1, 2), si l'on ne suppose pas d'avance $\alpha'' = 0$; et il suffira parconséquent de poser généralement

$$\alpha A' + f\alpha' = 0, \; \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1.$$

Or si l'on dénote par η l'angle compris entre l'axe Ix' et entre la projection sur le plan $(x'y')$ de l'axe d'équilibration cherché, et par ϑ son inclinaison à ce plan, on pourra faire:

$$\alpha = \cos\vartheta \,.\, \cos\eta, \; \alpha' = \cos\vartheta \,.\, \sin\eta, \; \alpha'' = \sin\vartheta.$$

De là on conclut:

$$A' \cos\vartheta \,.\, \cos\eta + f \cos\vartheta \,.\, \sin\eta = 0,$$

car la relation perpétuelle devient identique. La dernière équation se partage en deux facteurs, l'un $\cos\vartheta = 0$, qui réproduit la solution de l'axe normal au plan, et l'autre:

$$A' \cos\eta + f \sin\eta = 0$$

donne:

$$\tang \eta = -\frac{A'}{f} = \mp \sqrt{\frac{A'}{B'}},$$

et l'angle ϑ restera indéterminé partant arbitraire. Il en est parconséquent de même des trois cosinus α, α', α''. Ainsi toutes les lignes, situées au point donné, d'une manière quelconque, dans un plan normal au plan d'inertie et passant au point donné, sont des axes d'équilibration. Mais en substituant pour A', B' leurs valeurs dans l'expression de tang η, on peut s'appercevoir que tous les axes se projettent suivant la normale à la section conique au point donné, et que la solution particulière qui provient de $\alpha'' = 0$ est comprise dans la solution générale. Nous sommes donc en droit d'énoncer les propositions suivantes, dont la première n'est qu'une négation:

1) Dans le plan principal du centre, formé par les axes de moments moyen et minimum il n'existe aucun point, aucun lieu géométrique de foyers de radiation plane.

2) Dans le plan principal du centre, formé par les axes de moments maximum et minimum, il existe toujours une hyperbole concentrique au solide dont chaque point est un foyer de radiation plane normale d'axes permanents: c. à. d. que ces axes sont tous distribués dans le plan normal au plan principal, et mené suivant la normale à la section conique au point donné.

3) Dans le plan principal formé par les axes des moments maximum et moyen il existe toujours une ellipse concentrique au solide, dont chaque point est un foyer de radiation plane normale: c. à. d. que tous les axes permanents en ce point sont situés dans un plan, normal au plan principal et mené suivant la normale à la section conique; de plus la tangente en ce même point à la courbe est l'axe permanent isolé.

Si l'on se reporte sur la valeur de tang η, on voit qu'elle est indéterminée pour le cas de $A' = 0$, $f = 0$; c. a. d. pour $ST = 0$, et $MS^2 + C - A = 0$, équations aux quelles on peut satisfaire en prenant $T = 0$ et $S = \pm \sqrt{\frac{A-C}{M}}$. Cette circonstance semble annoncer que les sommets du grand axe de l'ellipse soient des foyers de radistion absolûe et universelle: mais il n'en est pas ainsi, parceq'en écrivant: $-\frac{A'}{f} = -\frac{A'}{\sqrt{A'B'}}$, on obtient tang $\eta = \mp \sqrt{\frac{A'}{B'}}$, et l'hypothèse de $A' = 0$, $T = 0$ donnant $B' = C - B$, il en résulte tang $\eta = \mp \sqrt{\frac{0}{C-B}} = 0$, ce qui est conforme à l'énoncé général, établi plus haut. Mais pour la classe de solides, qui auraient deux moments d'inertie égaux C, B, et dont le troisième A serait le plus grand, la quantité tang η devient en effet indéterminée: ainsi pour cette espèce de solides les deux points de l'axe du maximum situés à la distance $\mp \sqrt{\frac{A-C}{M}}$ du centre sont des foyers de radiation absolus et universels d'axes permanents. Cette dernière propriété, et celles relatives aux deux sections coniques de radiation ont été découvertes pour la premiere fois par M. Binet (Journ. de l'École polytechn.). Plus tard Ampère y est parvenu de son côté (Nouveaux Mémoires de l'Institut). Nous les avons également trouvées,

avant que d'avoir pris une connaîssance approfondie du mémoire de M. Binet. Quant à la propriété des deux foyers de radiation absolus démontrée, son analogue se trouve aussi démontrée dans la note p. 496. 1ère édition de la mécanique de Poisson: mais nous prions le lecteur de revoir ce passage et le memoire de M. Binet; il pourra se convaincre que la question s'y trouve envisagée sous un point de vûe différent de ce que nous venons de présenter; c'est ce qu'on concevra d'autant mieux, si l'on a égard à ce que nous dirons sur les moments d'inertie égaux entr'eux.

10.

On voit par les valeurs des coëfficients A_1, B_1, C_1, D_1, que pour tous les solides ayant leurs moments d'inertie principaux du centre égaux entr'eux, les racines de l'équation en ζ restent indétermioées ou inconnûes: mais il y a ici ou du moins il peut y avoir un dégré d'indétermination plus ou moins considérable et avant que de rien prononcer, il faudra soumettre encore ce cas particulier à un examen spécial. On sait déjà que quand les moments principaux du centre sont égaux, tous les moments relatifs à des lignes centrales quelconques du solide sont égaux entr'eux. De là il est aisé de conclure que de tous les axes en un point quelconque (O) d'un tel solide la ligne droite OI, menée du point donné par le centre d'inertie, est pour le point (O) l'axe du moment d'inertie minimum; cette droite est aussi manifestement une l'igne d'inertie centrale, et de plus tous les axes en (O) situés dans un plan normal à OI correspondent à des moments d'inertie égaux. Enfin tous les axes en (O) situés en debors de ce plan, mais distribués sur une même surface conique, concentrique à OI, ont encore des moments d'inertie égaux dont la valeur commune est:

$$A + M \, . \, OI^2 \, . \sin^2 a,$$

A désignant le moment central, et a l'inclinaison de la génératrice à la ligne OI, considérée comme axe conique. De là on est conduit à penser que si pour le point (O) il existe une multiplicité d'axes d'équilibration, ils doivent au moins se trouver tous dans un plan normal en (O) à OI. Or cette propriété peut être en effet démontrée d'une manière rigoureuse à l'aide des équations de condition générales (I', II', III', No. 4.); car de quelque manière que le point fixe (O) se trouve placé, on peut dire qu'il est placé sur un axe principal du centre Ix', et faire en conséquence $T=0$, $U=0$: ce qui donne $f=0$, $g=0$, $h=0$, partant:

$$B'=0, \; \alpha'\alpha''B'=0, \; \alpha\alpha''A'=0, \; \alpha\alpha'(A'-B')=0 \; \ldots. \; (g)$$

et à cause de $B'=0$, il restera simplement:

$$\alpha\alpha''A'=0, \; \alpha\alpha'A'=0.$$

Ces conditions sont satisfaites 1) par $\alpha''=0$, $\alpha'=0$ à la fois: ce qui donne $\alpha=1$, et fait voir que l'un des axes cherchés coïncide avec OI ou $x'I$; ce qui est évident. Mais elles sont encore satisfaites par $\alpha=0$; et comme on a dèslors $\alpha'^2+\alpha''^2=1$, il s'ensuit

que les autres axes cherchés sont dans un plan normal en O à OI, et qu'ils s'y trouvent en nombre infini, puisque les quantités α', α'', quoique liées par la relation $\alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, restent arbitraires ou indéterminées. — Ainsi en nommant avec Euler solides de 1ère classe ceux des solides qui ont leurs trois moments principaux du centre égaux, nous pouvons établir dans notre langage, que tout point fixe d'un solide de 1ère classe est un centre de radiation plane normale d'axes permanents, tandisque le centre d'inertie est un foyer de radiation absolüe et universelle.

Remarque. On nous objectera peut-être que notre raisonnement est insuffisant, en ce que nous admettons à la fois les trois équations .... (g), tandis qu'ailleurs nous avons remarqué que l'une d'entr'elles n'est qu'une conséquence des deux autres. Mais il convient d'observer que dans le cas particulier actuel la 1ère condition $\alpha'\alpha''B' = 0$ est satisfaite d'elle-même à cause de $B' = 0$; si donc on la supprime ou qu'on la néglige, il faudra tenir compte des deux autres à la fois, car on doit dans tous les cas exprimer complètement la nature mécanique de la question qui veut que l'énergie totale des forces centrifuges à tourner l'essieu de rotation du solide autour de deux axes au moins, situés dans un plan normal, soit nulle. Notre raisonnement ne nous paraît donc pour le moment susceptible d'aucune objection fondée.

11.

En examinant avec quelqu'attention la loi de composition des coëfficients A^1, B^1, C^1, D_1 de l'équation du 3ème dégré en ζ, on reconnaît qu'ils ne changent pas de valeurs quand on change à la fois les signes des coordonnées S, T, U, sans altérer leurs valeurs. Donc en joignant un point quelconque (O) de l'espace au centre d'inertie d'un système rigide, et prolongeant la droite OI d'une quantité $IO' = IO$, on obtient un point (O'), pour lequel les axes permanents de rotation du solide sont respectivement parallèles à ceux du point (O). Cette propriété a été aussi reconnûe par Mr. Binet, mais par sa marche plus savante et plus laborieuse.

12.

Les racines de l'équation du 3ème dégré en ζ ne sauraient devenir indéterminées que quand on suppose à la fois $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $C_1 = 0$, $D_1 = 0$. Si donc on se reporte de nouveau à la décomposition de ces coëfficients, on s'apperçoit que dans des solides quelconques il ne saurait exister aucun foyer de radiation, qui ne soit situé dans l'un des trois plans principaux du centre du solide, et comme ces plans ne renferment que des centres de radiation plane normale, il s'ensuit que les solides en général n'admettent aucun centre de rayonnement absolu et universel. Le cas exceptionel à cet égard a été signalé plus haut.

13.

Pour déterminer les axes permanents de rotation d'un système matériel plan, relatifs à un point fixe (O) du plan, on fera passer par ce point deux axes rectangles (Ox, Oy) parallèles aux axes prin-

Digitized by Google

cipaux (Ix', Iy'), et en désignant par φ l'angle inconnu de l'axe cherché avec Ox, et par S, T les coordonnées de (O) relatives à Ix', Iy', ou ce qui revient au même ici, celles de I relatives à Ox, Oy, on aura:

$$\text{tang } 2\varphi = \frac{2MST}{(A-B)+M(T^2-S^2)}.$$

Pour avoir tang $2\varphi = \frac{0}{0}$, il faudra donc poser à la fois:

$$MST = 0,\ A - B + M(T^2 - S^2) = 0.$$

Soit $A > B$, et posons en conséquence $T = 0$; d'où l'on tire:

$$S = \pm \sqrt{\frac{A-B}{M}}.$$

Il s'ensuit de là que pour tout système matériel plan il existe sur l'axe du moment d'inertie maximum central du plan deux foyers de radiation plane conjugués. Il est bien entendu que le 3ème axe permanent est unique ou isolé et normal au plan. L'exemple de la surface elliptique homogène est bien remarquable ici. En effet nommant ϱ sa densité, a, b les demi-axes principaux du centre, on obtient:

$$A = \tfrac{1}{4}\pi\varrho a^3 b,\ B = \tfrac{1}{4}\pi\varrho a b^3;\ M = \pi\varrho ab$$

ce qui donne:

$$S = \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ainsi les foyers mécaniques, ou les centres de radiation plane de la surface elliptique, se trouvent placés sur le petit axe de la figure, de la même manière dont les foyers géometriques ou optiques de la courbe sont rangés sur le grand axe.

On peut encore démontrer facilement que pour un point fixe (O) pris sur l'un des deux axes d'inertie d'une surface plane matérielle les trois axes permanents sont constamment parallèles à eux mêmes et à ceux du centre; qu'enfin le lieu des centres de parallélisme d'axes permanents dans le plan est une hyperbole.

14.

Sur le plan d'inertie central, comprenant les axes des moments maximum et moyen, décrivons l'ellipse, lieu des foyers de radiation:

$$(B - C)S^2 + (A - C)T^2 = \frac{(A-C)(B-C)}{M},$$

et concevons en un point quelconque du périmètre curviligne un système d'axes rectangulaires, l'un Ox tangent à la courbe, l'autre Oy normal, et le 3ème Oz parallèle à Ix'. Si l'on dénote par a, b, c les trois angles d'une droite quelconque OK avec ces axes coordonnés et par $\int p^2 dm$ ou par $\Sigma . mp^2$ le moment d'inertie du solide par rapport à OK, on aura en nommant A'_1, B'_1, C'_1 les trois

moments d'inertie du solide, relatifs aux axes permanents Ox, Oy, Oz:

$$\Sigma . mp^2 = A'_1 \cos^2 a + B'_1 \cos^2 b + C'_1 \cos^2 c.$$

Si l'on appelle η' l'angle de l'axe Ox avec l'axe Ix', on aura:

$$\tang^2 \eta' = \frac{B'}{A'}, \quad \cos^2 \eta' = \frac{A'}{A'+B'};$$

et si η exprime l'angle de la normale Oy avec Ix', il vient:

$$\tang^2 \eta = \frac{A'}{B'}, \quad \cos^2 \eta = \frac{B'}{A'+B'}.$$

Or en concevant par le centre I deux axes Iu, Iv parallèles à Ox, Oy, respectivement, on aura le moment d'inertie relatif à Iu égal à:

$$A \cos^2 \eta' + B \cos^2 \eta, \text{ car } \cos(uIz) = 0;$$

et celui relatif à Iv égal à:

$$A \cos^2 \eta + B \sin^2 \eta;$$

et par substitution ces quantités deviendront:

$$\frac{AA' + BB'}{A' + B'} \text{ pour } Iu,$$

$$\frac{AB' + A'B}{A' + B'} \text{ pour } Iv.$$

Pour obtenir maintenant les valeurs de A'_1, B'_1, on n'a qu'à ajouter aux précédentes le produit de la masse par le quarré de la distance p entre Iu, Ox, et par celui de la distance q entre Iv et Oy. Mais on a:

$$p^2 = \frac{(A-C)(B-C)}{M[(A-C)^2 T^2 + (B-C)^2 S^2]}, \quad q^2 = S^2 + T^2 - p^2,$$

d'où l'on tire:

$$A'_1 = \frac{AA' + BB'}{A' + B'} + Mp^2 \ldots . (Ox),$$

$$B'_1 = \frac{AB' + A'B}{A' + B'} + M(S^2 + T^2 - p^2) \ldots . (Oy);$$

et l'on aura ensuite pour C'_1:

$$C'_1 = C + M(S^2 + T^2).$$

Il n'y aura plus qu'à substituer ces valeurs de A'_1, B'_1, C'_1 dans l'équation première pour avoir le moment $\Sigma . mp^2$.

Si l'on tient compte de la relation entre S et T, on trouvera aisément:

$$Mp^2 = -\frac{(A-C)(B-C)}{A'+B'},$$

d'où:

$$A'_1 = \frac{AA' + BB' - (A-C)(B-C)}{A'+B'},$$

$$B'_1 = \frac{AB' + A'B + (A-C)(B-C)}{A'+B'} + M(S^2 + T^2);$$

de là on conclut aussi:

$$A'_1 + B'_1 + C'_1 = C + 2M(S^2 + T^2),$$

ce qui exprime une propriété facile à énoncer en langage ordinaire.

Pour avoir le moment d'inertie, relatif à une droite OK, située dans le plan de rayonnement normal à la conique, on fera:

$$\cos a = \cos\vartheta \,.\, \cos\eta,\ \cos b = \cos\vartheta \,.\, \sin\eta,\ \cos c = \sin\vartheta,$$

ce qui donne:

$$\cos a = \cos\vartheta \,.\, \sqrt{\frac{B'}{A'+B'}},\ \cos b = \cos\vartheta \,.\, \sqrt{\frac{A'}{A'+B'}}$$

et

$$\Sigma \,.\, mp^2 = (A'_1 B' + B'_1 A')\frac{\cos^2\vartheta}{A'+B'} + C'_1 \,.\, \sin^2\vartheta.$$

Donc le moment d'inertie relatif à cette position particulière de OK change avec son inclinaison sur le plan principal $(x'y')$, et cependant toutes les lignes en (O) situées dans le plan normal sont des axes permanents de rotation. Il n'est donc pas exact de supposer, comme on le fait dans la théorie ordinaire, que les lignes droites, pour être axes permanents de rotation en un point quelconque, doivent correspondre à des moments d'inertie égaux entr'eux. L'hypothèse réciproque serait également erronnée, puisque l'on a déjà reconnu plus haut des axes à moments égaux qui ne sont point des axes permanents.

Si l'on considère l'un des sommets du grand axe de la courbe, on aura: $MS^2 = A - C$, $T = 0$, $A' = 0$, $B' = C - B$; partant $A' + B' = C - B$, et $A'_1 = B + A - C$, $B'_1 = A$, $C'_1 = A$; ce qui est évident aussi par la transformation directe, parcequ'alors Oy coïncide avec Ix'. Par rapport à la droite en ce sommet, situé dans le plan (x', z'), le moment d'inertie devient:

$$\Sigma \,.\, mp^2 = A + (B - C)\cos^2\vartheta.$$

Au contraire pour une droite en ce sommet, dirigée d'une manière quelconque, on doit avoir:

$$\Sigma \,.\, mp^2 = (B + A - C)\cos^2 a + A\cos^2 b + A\cos^2 c = A + (B - C)\cos^2 a.$$

Ainsi toutes les génératrices d'une surface conique concentrique à

Digitized by Google

la tangente à la courbe parallèle à Iy', et ayant son sommet à l'un des sommets du grand axe répondent à des moments d'inertie égaux; et cependant aucune de ces génératrices n'est donée de la propriété d'un axe permanent. Pour chaque sommet du petit axe de la courbe on a:

$$\Sigma . mp'^2 = B + (A - C) \cos^2 \alpha,$$

ce qui répond à une propriété analogue. Pour les tangentes aux quatre sommets la valeur commune du moment d'inertie sera $A + B - C$. On pourra répéter les calculs précédents pour l'hyperbole de radiation, et pour tout axe de l'espace, passant par un sommet de la courbe, on trouvera:

$$\Sigma . mp^2 = B \cos^2 \alpha + A \sin^2 \alpha,$$

ce qui suppose le plan des axes maximum et minimum dans celui des $(x'y')$. De là on déduit encore l'analogue d'une conclusion déja établie.

15.

Supposons que le point fixe (O) soit situé d'une manière quelconque sur l'un des trois axes principaux du centre, sur Ix' par exemple. On aura donc:

$$\alpha'\alpha''(\Sigma . my'^2 - \Sigma . mz'^2) = 0,$$
$$\alpha\alpha''(\Sigma . mx'^2 - \Sigma . mz'^2) = 0,$$
$$\alpha\alpha'(\Sigma . mx'^2 - \Sigma . my'^2) = 0;$$

et comme pour des formes quelconques de solides on n'a pas égalité entre les quantités $\Sigma . mx'^2$, $\Sigma . my'^2$, $\Sigma . mz'^2$, on devra poser simplement:

$$\alpha\alpha' = 0, \ \alpha\alpha'' = 0, \ \alpha'\alpha'' = 0.$$

Ces équations de condition ne sauraient être remplies que par l'hypothèse de l'égalité à zéro de deux quelconques des trois quantités α, α', α''. On conclut de la, conformément a ce que Poisson a reconnu par une autre voie, que pour tout point situé sur l'un des trois axes d'inertie d'un solide, l'un des trois axes permanents coïncide toujours avec cet axe même. Mais contrairement à son assertion, les deux autres axes permanents en ce point sont parallèles respectivement aux deux autres axes d'inertie, car en dirigeant l'axe Ox suivant Ix' qui renferme (O), et faisant Oy, Oz parallèles à Iy, Iz, on aura pour un point matériel quelconque $y = y'$, et $z = z'$: partant $\Sigma . myz = \Sigma . my'z' = 0$; et comme on a déjà Ox permanent, il s'ensuit à la fois $\Sigma . myz = 0$, $\Sigma . mxz = 0$, $\Sigma . mxy = 0$; c'est ce qu'on pourrait aussi démontrer encore par d'autres moyens.

16.

Continuons à placer le point fixe (O) sur l'un des trois axes d'inertie, sur Ix' par exemple, et admettons que le solide soit de révolution, partant qu'il ait ses deux moments d'inertie, relatifs aux

axes Iy', Ix', égaux entr'eux: dèslors tous les axes dans le plan ($y'Ix'$) seront des axes d'inertie. Donc puisque les deux lignes Oy, Ox parallèles à ces axes sont permanents, et que dans le plan ($y'Ix'$) chaque axe d'inertie Iy' reste arbitraire de direction, il en est de même de la direction de Oy, Ox dans le plan (y, x). On conclut de là, que quand un solide a deux moments d'inertie principaux du centre égaux, un point quelconque de l'axe d'inertie à moment inégal est un foyer de radiation plane d'axes permanents, tous situés dans un plan normal en ce point à l'axe, ou pour le dire plus abréviativement, c'est un foyer de radiation plane normale d'axes permanents. Cette propriété reproduit celle du No. 10. relative aux solides de première classe.

Remarque. Nous terminerons cette dissertation, en supprimant quelques développements et détails qui ne nous paraissent pas d'un intérêt capital; mais il nous reste à faire une dernière observation, et à réparer une omission. Les deux sommets de l'ellipse de radiation, relative aux extrémités de son grand axe, son situés sur l'axe du moment d'inertie maximum, aux distances du centre $\pm\sqrt{\frac{A-B}{M}}$; mais ce même axe renferme les deux sommets de l'hyperbole, distants du centre des quantités $\pm\sqrt{\frac{A-C}{M}}$: les deux extrémités du petit axe de l'ellipse se trouvent au contraire sur l'axe du moment moyen. Concluons de là que dans tout solide l'axe central du moment d'inertie maximum renferme deux couples de foyers conjugués de radiation plane normale, exprimés par les distances $\delta=\pm\sqrt{\frac{A-B}{M}}$, $\delta'=\pm\sqrt{\frac{A-C}{M}}$, tandisque l'axe moyen ne renferme qu'un système unique de foyers conjugués, donné par la distance:

$$\Delta=\pm\sqrt{\frac{B-C}{M}}.$$

17.

Notice historique. Segner a le premier reconnu l'existence des axes principaux et des axes permanents de rotation, qui fut ensuite démontrée par l'immortel Euler. Sa demonstration analytique se trouve reproduite avec plus ou moins de modifications par les géomètres mécaniciens plus récents, Laplace, Prony, Poisson, etc. La méthode de Laplace nous paraît plus rigoureuse que celle de Poisson, en ce qu'il fait voir d'abord l'existence des trois axes principaux, pour en conclure ensuite la réalité des trois racines de l'équation du 3ème dégré; tandisque Poisson admet par une espèce de réduction à l'absurde la réalité des trois racines pour en conclure l'existence des axes principaux, ce qui nous semble laisser quelque chose à désirer. D'ailleurs cette dernière manière de procéder n'est pas entièrement conforme à l'esprit de l'analyse, en ce que l'on admet d'abord l'existence de ces axes, pour la vérifier ensuite par le calcul; ensuite elle offre l'inconvénient de rendre solidaires entr'eux ces trois axes et de ne pouvoir les définir que par les expressions analytiques $\Sigma.mxy=0$, $\Sigma.mxz=0$, $\Sigma.myz=0$. D'un autre côté nous faisons contre cette méthode une objection que

Digitized by Google

nous reproduisons ici, sans prétendre toutefois qu'elle soit fondée. Il nous paraît que la réalité des trois racines de l'équation du 3ème dégré à la quelle on parvient dans toutes les méthodes est impossible à prouver; et il se peut même dans de certains cas qu'il n'y ait qu'une racine réelle. En effet les coëfficients des termes de l'équation dépendent des constantes a, b, c, f, g, h les quelles dépendent elles-mêmes des dimensions, de la forme et de la masse du système et de la disposition des axes coordonnés fixes aux quels il est rapporté: il se peut donc que ces axes se trouvent disposés de façon que l'équation de condition entre constantes qui doit être remplie pour rendre deux racines imaginaires soit en effet satisfaite, mais dèslors on aurait un axe principal seulement, ce qui dans la définition purement analytique est absolument dépourvu de signification. Dans sa mécanique analytique Lagrange traite aussi la question des axes principaux; mais loin de les rendre solidaires entr'eux il démontre d'abord par ses formules générales du mouvement de rotation des solides l'existence d'un axe de libre rotation, et déduit ensuite facilement les deux autres de la même analyse.

Dans un mémoire inséré dans le journal de l'école polytechnique M. Binet traite la question par une méthode fort générale dont nous ne saurions ici donner l'idée; et le premier il a découvert cette belle propriété de l'ellipse et de l'hyperbole de radiation que l'on a établie ci-dessus. Plus tard Ampère s'est occupé de la même question dans les nouveaux mémoires de l'institut de France; et ses résultats sont pour la plupart identiques à ceux de M. Binet; sa méthode est plus géométrique, mais l'énoncé des propriétés qu'il établit devient embarrassant et quelque fois même fort difficile à bien saisir. De plus aucun de ces illustres maîtres ne s'était occupé de la détermination des axes permanents par rapport aux axes principaux déjà censés connus. Ainsi donc dans notre manière de voir il y avait encore des difficultés à vaincre et des conclusions nouvelles à établir, conclusions qui devaient résulter de cette détermination. En commençant notre tâche nous avions pour but de faire une théorie générale complète des axes principaux et permanents, une théorie susceptible de comprendre toutes les propriétés connues et nouvelles de ces axes, et de figurer en même temps dans l'enseignement ordinaire de la mécanique. Nous allions oublier de parler de M. Cauchy qui a traité la question des axes principaux par une méthode géométrique remarquable de simplicité et que dans l'enseignement on pourrait préférer à toute autre marche, quand on aurait peu de temps à consacrer à cette matière: en outre plus récemment dans le journal mathém. de M. Liouville, M. Gascheau a montré le moyen de déduire de là les deux sections coniques de radiation; de sorte qu'il serait maintenant facile de faire de cela un tout bien homogène qui suppose toutefois l'existence des diamètres conjugués rectangles des surfaces du second ordre. Mais nous ne croyons pas que notre travail devienne par là inutile, et c'est ce qui nous a décidé à le livrer à la publicité.

Digitized by Google

XII.

Ueber Euler's Princip der Differenzialrechnung, ein Zusatz zu des Herrn Dr. Gerhardt Aufsatz im II. Band, 2. Heft des Archivs für Mathematik und Physik.

Von

Herrn Doctor Ludwig Felix Ofterdinger

zu Tübingen.

Die Derivations-Methode fand bei den Deutschen solchen Anklang, dass sie in fast allen Lehrbüchern der Differenzialrechnung zu Grunde gelegt wurde, und gilt jetzt noch bei manchem Mathematiker als die wahre Grundlage des höheren Calculs. Es ist dies um so auffallender, als Euler *) schon vor Jahren gezeigt hat, wie jenes Princip nicht die Grundlage eines wissenschaftlichen Gebäudes sein kann, als ferner Lagrange selbst in seiner Mécanique analytique jenes Princip nicht weiter anwenden wollte, als endlich Cauchy das wahre Princip mit einer Wissenschaftlichkeit und Eleganz aufstellte, welche ihm den Beifall aller wissenschaftlichen Mathematiker verschaffte. Es war daher von Herrn Dr. Gerhardt sehr verdienstlich, dass er die Sache in dem Archiv für Mathematik und Physik (II. 2. 200.) zur Sprache gebracht hat und das wahre, einzig wissenschaftliche Princip der Differenzialrechnung klar aus einander setzte**); aber eben wegen der Wichtigkeit der Sache möchte es erlaubt sein, einen Vorwurf zu beseitigen, welcher einem der

---

*) Euler institutiones calculi differentialis.

**) An der Tübinger Universität wurde noch im Jahre 1842 folgende Preisaufgabe gegeben: „die Erfahrung lehrt, dass die Methode des Unendlichkleinen, selbstständig vorgetragen, für den Anfänger etwas sehr Mysteriöses hat, und dass ihm, wenn auch dieses durch Gründung derselben auf die Ableitungsmethode vermieden wird, die Sicherheit der Anwendung in allen Fällen zweifelhaft erscheint, in welchen er nicht im Stande ist, die Ableitungsmethode der Methode des Unendlichkleinen zu substituiren. Da nun die letztere, ihrer Kürze wegen, in den Schriften über angewandte Mathematik die herrschende ist, ihre Uebertragung in die Ableitungsmethode aber noch in manchen Fällen Schwierigkeiten darbietet, so würde die Beseitigung dieser Schwierigkeiten ein verdienstliches Werk sein. Die Fakultät macht daher dasselbe zur Aufgabe mit dem Wunsche, dass bei Lösung derselben das Lehrbuch der Mechanik von Poisson besonders berücksichtigt werde."
Diese Aufgabe, in einer Stadt gegeben, in der L'Huilier seine principiorum calculi differentialis et integralis expositio ele-

grössten Mathematiker gemacht wird. Herr Dr. Gerhardt sagt nämlich pag. 202:

„Ohngeachtet dieser Vorgänge entbehrte doch noch das um diese „Zeit im Jahre 1755 abgefasste Lehrgebände der Differenzialrechnung unseres unsterblichen Euler die feste Begründung durch „die Grenzmethode, aber er setzte, in der Ueberzeugung, dass vor „allen Dingen die so vagen unendlich kleinen Grössen aus der Differenzialrechnung entfernt werden müssten, mittelst eines kühnen „Gewaltstreiches dieselben $=0$ und legte diesen Nullen einen „intensiven Werth bei. Nach seiner Meinung müsse man auf ihre „Entstehung Rücksicht nehmen, dann dürften sie auch, je nachdem „sie aus einer grössern oder kleinern Grösse entstanden wären, „einen verschiedenen Werth unter einander haben, obgleich „sie durch dasselbe Zeichen dargestellt würden. Diese Annahme „veranlasste aber bei der Bestimmung der Differenziale vielfache „Schwierigkeiten, zumal da Euler durch die Differenzenrechnung und mittelst der Entwickelung der Functionen in Reihen „dahin gelangen wollte, und in der That ist die Dunkelheit und „Unverständlichkeit, die in den ersten Capiteln der Euler'schen „Differenzialrechnung herrscht, eine merkwürdige Erscheinung für jeden, der mit der äusserst lichtvollen Darstellung „Eulers vertraut ist."

Es ist diese Ansicht über Eulers Differenzialrechnung nicht neu, denn schon im Jahre 1786 hat sich W. J. G. Karsten in seinen mathematischen Abhandlungen. Halle 1786. pag. 92 seq. veranlasst gesehen, gegen dieselbe zu schreiben. Wäre das Werk von Karsten der jetzigen Generation so bekannt als das Archiv, so könnte man einfach darauf verweisen, so aber wird es nicht unnöthig sein, an der Hand des Euler'schen Werkes das Irrige obiger Behauptung zu zeigen.

Euler eröffnet die Vorrede mit der Frage: quid sit calculus differentialis, atque in genere analysis infinitorum? Er beantwortet diese Frage dahin: dass eine Antwort nicht möglich sei, so lange nicht bestimmte Begriffe vorher festgestellt seien, daher er zuerst die Begriffe von Function aus einander setzt. Ferner sei $y=x^2$, und x wachse um ω, so muss y um z wachsen, und es ist also $z=2x\omega+\omega^2$, also $z:\omega=2x+\omega:1$. Ebenso kann man in allen andern Fällen beide Incremente vergleichen, ja sogar, wenn w, also auch z wieder verschwinden, wo $z:w=2x:1$ sich verhalte. Jetzt erst gab Euler eine Antwort auf obige Frage; er sagt, die Differenzialrechnung, qui est methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium, quae functiones quaecunque accipiunt, dum quantitati variabili, cujus sunt functiones, incrementum evanescens tribuitur. — Calculus igitur differentialis non tam in his ipsis incrementis evanescentibus, quippe quae sunt nulla, exquirendis, quam in eorum ratione ac proportione mutua scrutanda occupatur; et cum hae rationes finitis quantitatibus exprimantur, etiam

---

mentaris vor 49 Jahren und Bohnenberger seine Anfangsgründe der höheren Analysis vor 33 Jahren geschrieben hat, und welche den jetzigen Stand der Wissenschaft völlig ignorirt, daher vor 30 Jahren, aber nicht jetzt, an der Zeit gewesen wäre, konnte natürlich keine befriedigende Lösung erhalten, und der Verf., der sich mit der Lösung dieser Aufgabe abmühte, konnte nicht einmal eines Lobes theilhaftig werden.

Digitized by Google

hic calculus circa quantitates finitas versari est censendus. Quamvis enim praecepta, uti vulgo tradi soleat, ad ista incrementa evanescentia definienda videantur accomodata; nunquam tamen ex iis absolute spectatis, sed potius semper ex eorum ratione conclusiones deducuntur*). Die verschwindenden Incremente, fährt Euler fort, heissen Differenziale, auch unendlich kleine Grössen, die der Natur der Sache nach gleich 0 gesetzt werden müssen, was in einem Beispiel gezeigt wird, wobei aber Euler bemerkt, dass man ja nicht glauben müsse, die Differenzialrechnung gebe Regeln, die Differenziale zu finden, sondern nur ihre Verhältnisse, welche endliche Grössen seien. Cum autem hoc modo, qui solus est rationi consentaneus, principia calculi differentialis stabiliuntur, omnes obtrectationes, quae contra hunc calculum proferri sunt solitae, sponte corruunt; quae tamen summam vim retinerent, si differentialia seu infinite parva non plane annihilarentur. Pluribus autem, qui calculi differentialis praecepta tradidere, visum est differentialia a nihilo absoluto secernere, peculiaremque ordinem quantitatum infinite parvarum, quae non penitus evanescant, sed quantitatem quandam, quae quidem esset omni assignabili minor, retineant, constituere: his igitur jure est objectum, rigorem geometricum negligi et conclusiones inde deductas, propterea quod hujusmodi infinite parva negligerentur, merito esse suspectas: quantumvis enim exigua haec infinite parva concipiantur, tamen non solum singulis, sed etiam pluribus atque adeo innumerabilibus simul rejiciendis, errorem tandem inde enormem resultare posse**). Es zeigt nun Euler, dass der Sache durchaus nicht geholfen sei, wenn man die Uebereinstimmung der Resultate mit denen anführe, welche durch scharfe geometrische Schlüsse gefunden worden seien, denn ein Irrthum könne den andern nicht aufheben, vielmehr werde die Sache nur noch verdächtiger. Wenn die Differenzial- oder unendlich kleinen Grössen wirkliche Nullen seien, so entstehe allerdings die Frage, wie sie mit einander verglichen werden können, worüber Euler sagt: incrementum quantitatis x, quod in genere indicavimus per ω, ad incrementum quadrati x^2, quod est $2x\omega + \omega^2$, rationem habet ut 1 ad $2x + \omega$, quae semper differt a ratione 1 ad $2x$, nisi sit $\omega = 0$; at si statuamus esse $\omega = 0$, tum demum vere affirmare possumus hanc rationem fieri exacte ut 1 ad $2x$. Interim tamen perspicitur, quo minus illud incrementum ω accipiatur, eo propius ad hanc rationem accedi; unde non solum licet, sed etiam naturae rei convenit, haec incrementa primum ut finita considerare, atque etiam in figuris, si quibus opus est ad rem illustrandam, finite repraesentare; deinde vero haec incrementa cogitatione continuo minora fieri concipiantur, sicque eorum ratio continuo magis ad certum quendam limitem appropinquare reperietur, quem autem tum demum attingant, cum plane in nihilum abierint. Hic autem limes, qui quasi rationem ultimam incrementorum illorum constituit, verum est objectum calculi differentialis; cujus igitur prima fundamenta is jecisse existimandus est cui primum in mentem venit, has rationes ultimas, ad quas quantitatum variabilium incrementa, dum continuo magis diminuuntur, appropinquant, et cum evanescunt, tum demum attingunt, contemplari***).

*) Pag. VIII. und IX.
**) Pag. XI.
***) Pag. XIV.

Digitized by Google

Diese Sätze, welche Euler noch weiter ausführt, sind ebenso lichtvoll geschrieben als alles andere, was uns der Euler'schen Feder geflossen ist; sie geben dem III. Cap. der inst. calcul diff. ein ganz anderes Aussehen, als es ohne dieselben hat; denn wenn jetzt Euler die Differentiale $= 0$ setzt, wenn er denselben verschiedene Werthe beilegt, so hat er deutlich gesagt, auf welche Art diess zu verstehen sei, nirgends ist ein „Gewaltstreich"; die Dunkelheiten und Unverständlichkeiten in dem ersten Capitel des Eulerschen Werkes verschwinden, so wie die Vorrede genau studirt ist. Der einzige Vorwurf möchte Euler gemacht werden können, dass er das, was er in der Vorrede gesagt hat, nicht als den Anfang des III. Cap. gesetzt hat; denn die Vorrede wird häufig entweder gar nicht oder nur oberflächlich gelesen, und deswegen wurde Euler von so vielen missverstanden und manches für dunkel und unverständlich gehalten, was klar ist, so wie man die in der Vorrede erklärten Begriffe mitbringt.

XIII.

Ueber einige merkwürdige bestimmte Integrale.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Von dem berühmten Fourier'schen Theoreme:

$$\int_0^\infty \cos audu \int_0^\infty f(t) \cos utdt = \frac{\pi}{2} f(a), \quad a \geqq 0 \quad (1)$$

$$\int_0^\infty \sin audu \int_0^\infty f(t) \sin utdt = \frac{\pi}{2} f(a), \quad a > 0 \quad (2)$$

lässt sich bekanntlich eine wichtige Anwendung zur Entdeckung bestimmter Integrale machen. Wählt man nämlich die Function f so, dass sich die jedesmalige erste Integration nach t, nämlich

$$\int_0^\infty f(t) \cos utdt \quad \text{oder} \int_0^\infty f(t) \sin utdt,$$

in welcher u als Constante figurirt, ausführen lässt, so bleibt noch eine zweite Integration übrig, für welche a als constant, u als veränderlich angesehen wird. Diese lässt sich sehr oft nicht bewerk-

Digitized by Google

stelligen, aber man kennt schon ihren Werth, nämlich $\frac{\pi}{2}f(\alpha)$, und auf diese Weise gelangt man zur Kenntniss eines bestimmten Integrales, das man nicht leicht auf anderem Wege finden würde. Eine der einfachsten und bekanntesten Annahmen dieser Art ist die: $f(\alpha)=e^{-\alpha}$. Man hat dann

$$\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt=\int_0^\infty e^{-t}\cos ut\,dt=\frac{1}{1+u^2},$$

$$\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt=\int_0^\infty e^{-t}\sin ut\,dt=\frac{u}{1+u^2};$$

und durch Substitution in die Gleichungen (1) und (2):

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha u}{1+u^2}du=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\quad \alpha\geqq 0\quad (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{u\sin \alpha u}{1+u^2}du=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\quad \alpha> 0\quad (4)$$

und wenn man $\alpha\beta$ für α setzt und $u=\frac{x}{\beta}$ nimmt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{\beta^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\alpha\beta},\quad \alpha\geqq 0\quad (5)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin \alpha x}{\beta^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta},\quad \alpha> 0.\quad (6)$$

So leicht man hier zu diesen wichtigen Integralen gelangt ist, so schwer schien es, die Werthe der ähnlich gebildeten Integrale

$$\int_0^\infty \frac{u\cos \alpha u}{1+u^2}du \text{ und } \int_0^\infty \frac{\sin \alpha u}{1+u^2}du$$

aufzufinden, wenigstens ist dieses Problem bisher ungelöst geblieben. Es kommt offenbar bloss darauf an, eine Function f zu finden, welche die Eigenschaft hat, dass

$$\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt=\frac{ku}{1+u^2}\quad (7)$$

oder auch

$$\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt=\frac{k}{1+u^2}\quad (8)$$

ist, wobei k einen constanten Factor bedeutet. Dergleichen Functionen nun sind folgende:

$$f(t)=e^{+t}\,\mathrm{li}(e^{-t})+e^{-t}\,\mathrm{li}(e^{+t}),\text{ für Gleichung (7)}$$

und

$$f(t)=e^{+t}\,\mathrm{li}(e^{-t})-e^{-t}\,\mathrm{li}(e^{+t}),\text{ für Gleichung (8)}$$

wobei das Zeichen *li* den Integrallogarithmus bezeichnen soll. Da die Definition dieser Transscendenten selbst durch ein bestimmtes

Digitized by Google

Integral gegeben ist, so werden obige Substitutionen für $f(t)$ in den Gleichungen (7) und (8) eine doppelte Integration nöthig machen. Diese würde unter Anwendung der gewöhnlichen Formel für den Integrallogarithmus besondere Schwierigkeiten darbieten, die sich aber gänzlich vermeiden lassen, wenn man den Integrallogarithmus in eine andere Form bringt.

I.

Die Definition des Integrallogarithmus liegt bekanntlich in der Gleichung:

$$li\,.\,x=\int_0^x \frac{dx}{lx} \text{ oder } li\,.\,p=\int_0^p \frac{dx}{lx}.$$

Nimmt man hier $x=py$, so wird $y=1$, $y=0$, wenn $x=p$ und $x=0$ geworden ist. Ferner ist dann $dx=pdy$, $lx=lp+ly$, folglich

$$li\,.\,p=p\int_0^1 \frac{dy}{lp+ly}.$$

Für $y=\overset{-z}{e}$ wird ferner $z=0$ und $z=\infty$, sobald y die Werthe 1 und 0 angenommen hat, mithin

$$li\,.\,p=-p\int_\infty^0 \frac{dz}{lp-z}\overset{-z}{e}=+p\int_0^\infty \frac{dz}{lp-z}\overset{-z}{e}.$$

Für $p=e^{-t}$, $p=e^{+t}$ wird hieraus

$$li(e^{-t})=-e^{-t}\int_0^\infty \frac{dz}{t+z}e^{-z},$$

$$li(e^{+t})=+e^{+t}\int_0^\infty \frac{dz}{t-z}e^{-z}.$$

Setzt man endlich $z=tx$, so ist

$$e^{+t}\,li(e^{-t})=-\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}e^{-tx} \quad (9)$$

$$e^{-t}\,li(e^{+t})=+\int_0^\infty \frac{dx}{1-x}e^{-tx} \quad (10).$$

Mit Hülfe dieser Formeln wollen wir uns nun an die Untersuchung der Integrale

$$\int_0^\infty [e^{+t}\,li(e^{-t})+e^{-t}\,li(e^{+t})]\cos ut\,dt$$

und

$$\int_0^\infty [e^{+t}\,li(e^{-t})-e^{-t}\,li(e^{+t})]\sin ut\,dt$$

machen.

Digitized by Google

II.

Aus Formel (9) folgt durch Multiplication mit $\cos ut\,dt$ und Integration zwischen den Gränzen $t=0$, $t=\infty$:

$$\int_0^\infty e^{+t}\, li(e^{-t}) \cos ut\,dt = -\int_0^\infty \cos ut\,dt \int_0^\infty \frac{dx}{1+x} e^{-tx}.$$

Da es aber in einem bestimmten Doppelintegrale mit zwei Veränderlichen gleichgültig ist, nach welcher Veränderlichen zuerst integrirt wird, so können wir im vorliegenden Falle die Integrationen in umgekehrter Ordnung verrichten und zuerst nach t integriren. Es wird dann

$$\int_0^\infty e^{+t}\, li(e^{-t}) \cos ut\,dt = -\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} \int_0^\infty e^{-xt} \cos ut\,dt$$
$$= -\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2}. \quad (11)$$

Die noch übrige Integration nach x hat nicht die mindeste Schwierigkeit. Es ist nämlich

$$\frac{1}{1+x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+u^2} \left[-\frac{1}{1+x} + \frac{x}{u^2+x^2} + \frac{u^2}{u^2+x^2}\right],$$

folglich

$$\int \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+u^2} \left[-l(1+x) + \tfrac{1}{2} l(u^2+x^2) + u \operatorname{Arctan} \frac{x}{u}\right] + \text{Const.}$$

Bemerkt man, dass

$$-l(1+x) + \tfrac{1}{2} l(u^2+x^2) = l\frac{\sqrt{u^2+x^2}}{1+x} = l\frac{\sqrt{\frac{u^2}{x^2}+1}}{\frac{1}{x}+1}$$

ist, folglich für $x=\infty$:

$$-l(1+x) + \tfrac{1}{2} l(u^2+x^2) = l(1) = 0$$

und

$$\operatorname{Arctan} \frac{x}{u} = \frac{\pi}{2}$$

wird, so ergiebt sich für $x=\infty$, $x=0$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2} = \frac{1}{1+u^2} \left[u\frac{\pi}{2} - lu\right]$$

und die Substitution in die Gleichung (11)

$$\int_0^\infty e^{+t}\, li(e^{-t}) \cos ut\, dt = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{u}{1+u^2} + \frac{lu}{1+u^2}. \quad (12)$$

Etwas Aehnliches erhält man aus Formel (10) durch Multiplication mit $\cos ut\,dt$ und Integration zwischen den Gränzen $t=0$, $t=\infty$, nämlich

$$\int_0^\infty e^{-t}\, li(e^{+t}) \cos ut\, dt = \int_0^\infty \cos ut\, dt \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} e^{-tx}$$
$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} \int_0^\infty e^{-xt} \cos ut\, dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2}. \quad (13)$$

Es ist aber

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+u^2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{x}{u^2+x^2} - \frac{u^2}{u^2+x^2}\right],$$

folglich

$$\int \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+u^2}\left[\int \frac{dx}{1-x} + \tfrac{1}{2} l(u^2+x^2) - u \operatorname{Arctan} \frac{x}{u}\right] + \text{Const.}$$

Die erste Integration ist noch nicht ausgeführt, weil sie zwei verschiedene Werthe giebt. Es wird nämlich für $x > 1$

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\int \frac{dx}{x-1} = -l(x-1),$$

folglich

$$\int \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+u^2}\left[l\frac{\sqrt{u^2+x^2}}{x-1} - u \operatorname{Arctan} \frac{x}{u}\right] + \text{Const.}$$

und für $x < 1$

$$\int \frac{dx}{1-x} = -l(1-x),$$

folglich

$$\int \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+u^2}\left[l\frac{\sqrt{u^2+x^2}}{1-x} - u \operatorname{Arctan} \frac{x}{u}\right] + \text{Const.}$$

Der ersten Form bedienen wir uns für $x=\infty$, der zweiten für $x=0$. Wir bekommen dann

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2} = \frac{1}{1+u^2}\left(-u\frac{\pi}{2} - lu\right),$$

folglich durch Substitution in die Gleichung (13):

$$\int_0^\infty e^{-t}\, li(e^{+t}) \cos ut\, dt = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{u}{1+u^2} - \frac{lu}{1+u^2}. \quad (14)$$

Durch Addition und Subtraction der Gleichungen (12) und (14) ergiebt sich jetzt:

$$\int_0^\infty [e^{+t}\, li(e^{-t}) + e^{-t}\, li(e^{+t})] \cos ut\, dt = -\frac{\pi u}{1+u^2} \quad (15)$$

$$\int_0^\infty [e^{+t}\, li(e^{-t}) - e^{-t}\, li(e^{+t})] \cos ut\, dt = +\frac{2lu}{1+u^2}. \quad (16)$$

Nimmt man jetzt in der Gleichung (1)

$$f(t) = e^{+t}\, li(e^{-t}) + e^{-t}\, li(e^{+t})$$

und auch

$$f(t) = e^{+t}\, li(e^{-t}) - e^{-t}\, li(e^{+t})$$

und substituirt die Integrale (15) und (16), so erhält man auf der Stelle:

$$\int_0^\infty \frac{u \cos \alpha u}{1+u^2} du = -\tfrac{1}{2}[e^{\alpha}\, li(e^{-\alpha}) + e^{-\alpha}\, li(e^{+\alpha})] \quad (17)$$

$$\int_0^\infty \frac{lu \,.\cos \alpha u}{1+u^2} du = \frac{\pi}{4}\, [e^{\alpha}\, li(e^{-\alpha}) - e^{-\alpha}\, li(e^{-\alpha})]. \quad (18)$$

III.

Durch Multiplication der Gleichung (9) mit $\sin ut dt$ und Integration zwischen den Gränzen $t=0$ und $t=\infty$ ergiebt sich

$$\int_0^\infty e^{+t}\, li(e^{-t}) \sin ut\, dt = -\int_0^\infty \sin ut\, dt \int_0^\infty \frac{dx}{1+x} e^{-tx}$$

$$= -\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} \int_0^\infty e^{-xt} \sin ut\, dt$$

$$= -u\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2}. \quad (19)$$

Es ist aber

$$\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+u^2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{x}{u^2+x^2} + \frac{1}{u^2+x^2}\right],$$

mithin

$$\int \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} \left[l(1+x) - \tfrac{1}{2} l(u^2+x^2) + \frac{1}{u} \text{ Arctan } \frac{x}{u}\right] + \text{Const.},$$

woraus sich für $x=\infty$, $x=0$ leicht findet:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2} = \frac{1}{1+u^2} \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{u} + lu\right],$$

folglich aus Gleichung (19)

$$\int_0^\infty e^{+t} \operatorname{li}(e^{-t}) \sin ut\,dt = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+u^2} - \frac{ulu}{1+u^2}. \quad (20)$$

Aus der Gleichung (10) folgt ferner durch Multiplication mit $\sin ut\,dt$ und Integration zwischen den Gränzen $t=0$, $t=\infty$:

$$\int_0^\infty e^{-t}\, li(e^{+t}) \sin ut\,dt = \int_0^\infty \sin ut\,dt \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} e^{-tx}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} \int_0^\infty e^{-xt} \sin ut\,dt$$

$$= u \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2}. \quad (21)$$

Es ist aber

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{x}{u^2+x^2} + \frac{1}{u^2+x^2}\right],$$

mithin durch Integration:

$$\int \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} \left[-l(x-1) + \tfrac{1}{2} l(u^2+x^2) + \frac{1}{u} \text{ Arctan } \frac{x}{u}\right], \text{ für } x > 1$$

$$= \frac{1}{1+u^2} \left[-l(1-x) + \tfrac{1}{2} l(u^2+x^2) + \frac{1}{u} \text{ Arctan } \frac{x}{u}\right], \text{ für } x < 1.$$

Bedient man sich der ersten Formel für $x=\infty$, der zweiten für $x=0$, so erhält man leicht

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2} = \frac{1}{1+u^2} \left[\frac{1}{u} \cdot \frac{\pi}{2} - lu\right],$$

mithin nach Gleichung (21)

$$\int_0^\infty e^{-t}\, li(e^{+t}) \sin ut\,dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+u^2} - \frac{ulu}{1+u^2}. \quad (22)$$

Durch Subtraction und Addition der Gleichungen (20) und (22) ergeben sich jetzt folgende Integrale:

Digitized by Google

$$\int_0^\infty [e^{+t}\, li(e^{-t}) - e^{-t}\, li(e^{+t})] \sin ut\, dt = -\frac{\pi}{1+u^2} \quad (23)$$

$$\int_0^\infty [e^{+t}\, li(e^{-t}) + e^{-t}\, li(e^{+t})] \sin ut\, dt = -\frac{2ulu}{1+u^2}. \quad (24)$$

Nehmen wir nun in der Gleichung (2) einmal

$$f(t) = e^{+t}\, li(e^{-t}) - e^{-t}\, li(e^{+t})$$

und dann

$$f(t) = e^{+t}\, li(e^{-t}) + e^{-t}\, li(e^{+t}),$$

so erhält man auf der Stelle:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\, \alpha u}{1+u^2} du = -\tfrac{1}{2}[e^{+\alpha}\, li(e^{-\alpha}) - e^{-\alpha}\, li(e^{+\alpha})] \quad (25)$$

$$\int_0^\infty \frac{u\, lu\, \sin\, \alpha u}{1+u^4} du = -\frac{\pi}{4}[e^{+\alpha}\, li(e^{-\alpha}) + e^{-\alpha}\, li(e^{+\alpha})]. \quad (26)$$

Diese Formeln entsprechen ganz den unter (17) und (18) dargestellten. Man kann auch (17) aus (25) dadurch ableiten, dass man die letztere Gleichung partiell nach α differenziirt und auf gleiche Weise die Formel (26) aus der in (18).

Setzt man nun in den Integralen (17) und (26) $u = \frac{x}{\beta}$ und schreibt $\alpha\beta$ für α, so ergeben sich die folgenden:

$$\int_0^\infty \frac{x \cos \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx = -\tfrac{1}{2}[e^{+\alpha\beta}\, li(e^{-\alpha\beta}) + e^{-\alpha\beta}\, li(e^{+\alpha\beta})] \quad (27)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\, \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx = -\frac{1}{2\beta}[e^{+\alpha\beta}\, li(e^{-\alpha\beta}) + e^{-\alpha\beta}\, li(e^{+\alpha\beta})]. \quad (28)$$

Da man für den Integrallorithmus Tafeln besitzt, wie für die Logarithmen und trigonometrischen Functionen, so sind jetzt die obigen Integrale als völlig entwickelt und bekannt anzusehen.

Nimmt man auch in den Gleichungen (18) und (26) $u = \frac{x}{\beta}$, setzt $\alpha\beta$ für α und bemerkt, dass $l\frac{x}{\beta} = lx - l\beta$ ist, so erhält man unter Anwendung der Formeln (5) und (6) die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{lx \,.\, \cos\, \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{2\beta} l\beta \,.\, e^{-\alpha\beta} + \frac{\pi}{4\beta}[e^{+\alpha\beta}\, li(e^{-\alpha\beta}) - e^{-\alpha\beta}\, li(e^{+\alpha\beta})] \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty \frac{xlx \,.\, \sin \alpha x}{\beta^2+x^2}dx \\ =\frac{\pi}{2}l\beta \,.\, e^{-\alpha\beta}-\frac{\pi}{4}[e^{+\alpha\beta}\,li(e^{-\alpha\beta})+e^{-\alpha\beta}\,li(e^{+\alpha\beta})]\end{array}\right\} \quad (30)$$

welche ebenso wenig bekannt zu sein scheinen, als die Formeln (27) und (28).

XIV.

Geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Wenn man in drei ihrer Lage nach gegebenen Punkten A, A_1, A_2 die 180° nicht übersteigenden Winkel gemessen hat, welche die von den Punkten A, A_1, A_2 nach dem seiner Lage nach unbekannten Punkte M gezogenen Gesichtslinien AM, A_1M, A_2M mit drei von den Punkten A, A_1, A_2 aus nach derselben Seite hin gezogenen einander parallelen Linien*) einschliessen: so soll man die Lage dieser Parallelen und die Lage des Punktes M bestimmen.

Man bezeichne die bekannten rechtwinkligen Coordinaten der Punkte A, A_1, A_2 respective durch a, b; a_1, b_1; a_2, b_2; die gesuchten rechtwinkligen Coordinaten des Punktes M durch x, y; und setze der Kürze wegen $AM=\varrho$, $A_1M=\varrho_1$, $A_2M=\varrho_2$. Ferner bezeichne man die von den Linien AM, A_1M, A_2M und von den aus den Punkten A, A_1, A_2 gezogenen Parallelen mit der Richtung der positiven ersten Coordinaten eingeschlossenen Winkel, indem man diese Winkel von der Richtung der positiven ersten Coordinaten an durch den Coordinatenwinkel hindurch von 0 bis 360° zählt, respective durch φ, φ_1, φ_2 und ω; so hat man offenbar die folgenden Gleichungen:

$$x=a+\varrho\cos\varphi,\quad y=b+\varrho\sin\varphi;$$
$$x=a_1+\varrho_1\cos\varphi_1,\quad y=b_1+\varrho_1\sin\varphi_1;$$
$$x=a_2+\varrho_2\cos\varphi_2,\quad y=b_2+\varrho_2\sin\varphi_2;$$

*) Etwa mit der einen Hälfte des magnetischen Meridians.

und kann, wie sogleich erhellen wird, die Werthe der Differenzen $\varphi-\omega$, $\varphi_1-\omega$, $\varphi_2-\omega$ immer leicht aus den gemessenen Winkeln finden, weshalb man diese Differenzen als bekannt zu betrachten berechtigt ist. Bezeichnen wir nun die aus den gemessenen Winkeln sich ergebenden Werthe der Differenzen $\varphi-\omega$, $\varphi_1-\omega$, $\varphi_2-\omega$ durch α, α_1, α_2, und nehmen an, dass diese Werthe, wie dies u. A. bei Messungen mit der Boussole der Fall sein könnte, sämmtlich mit einem und demselben constanten Fehler Θ behaftet sind, so dass nämlich $\alpha+\Theta$, $\alpha_1+\Theta$, $\alpha_2+\Theta$ die richtigen Werthe der in Rede stehenden Differenzen sind; so ist

$$\varphi-\omega=\alpha+\Theta,\quad \varphi=\alpha+\omega+\Theta;$$
$$\varphi_1-\omega=\alpha_1+\Theta,\quad \varphi_1=\alpha_1+\omega+\Theta;$$
$$\varphi_2-\omega=\alpha_2+\Theta,\quad \varphi_2=\alpha_2+\omega+\Theta;$$

folglich nach dem Obigen

$$x=a+\varrho\cos(\alpha+\omega+\Theta),\quad y=b+\varrho\sin(\alpha+\omega+\Theta);$$
$$x=a_1+\varrho_1\cos(\alpha_1+\omega+\Theta),\quad y=b_1+\varrho_1\sin(\alpha_1+\omega+\Theta);$$
$$x=a_2+\varrho_2\cos(\alpha_2+\omega+\Theta),\quad y=b_2+\varrho_2\sin(\alpha_2+\omega+\Theta);$$

woraus sich

$$\operatorname{tang}(\alpha+\omega+\Theta)=\frac{y-b}{x-a},$$
$$\operatorname{tang}(\alpha_1+\omega+\Theta)=\frac{y-b_1}{x-a_1},$$
$$\operatorname{tang}(\alpha_2+\omega+\Theta)=\frac{y-b_2}{x-a_2}$$

ergiebt. Diese Gleichungen bringt man aber leicht auf die Form

$$\begin{aligned}
&x\sin(\alpha+\omega+\Theta)-y\cos(\alpha+\omega+\Theta)\\
&=a\sin(\alpha+\omega+\Theta)-b\cos(\alpha+\omega+\Theta),\\
&x\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)-y\cos(\alpha_1+\omega+\Theta)\\
&=a_1\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)-b_1\cos(\alpha_1+\omega+\Theta),\\
&x\sin(\alpha_2+\omega+\Theta)-y\cos(\alpha_2+\omega+\Theta)\\
&=a_2\sin(\alpha_2+\omega+\Theta)-b_2\cos(\alpha_2+\omega+\Theta);
\end{aligned}$$

und erhält aus denselben durch Elimination von x und y die Gleichung:

$$\begin{aligned}
0=&\{\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)\cos(\alpha_2+\omega+\Theta)-\cos(\alpha_1+\omega+\Theta)\sin(\alpha_2+\omega+\Theta)\}\\
&\times\{a\sin(\alpha+\omega+\Theta)-b\cos(\alpha+\omega+\Theta)\}\\
&+\{\sin(\alpha_2+\omega+\Theta)\cos(\alpha+\omega+\Theta)-\cos(\alpha_2+\omega+\Theta)\sin(\alpha+\omega+\Theta)\}\\
&\times\{a_1\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)-b_1\cos(\alpha_1+\omega+\Theta)\}\\
&+\{\sin(\alpha+\omega+\Theta)\cos(\alpha_1+\omega+\Theta)-\cos(\alpha+\omega+\Theta)\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)\}\\
&\times\{a_2\sin(\alpha_2+\omega+\Theta)-b_2\cos(\alpha_2+\omega+\Theta)\};
\end{aligned}$$

Digitized by Google

d. i.

$$\begin{aligned}0= &\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{a\sin(\alpha+\omega+\Theta)-b\cos(\alpha+\omega+\Theta)\}\\ &+\sin(\alpha_2-\alpha)\{a_1\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)-b_1\cos(\alpha_1+\omega+\Theta)\}\\ &+\sin(\alpha-\alpha_1)\{a_2\sin(\alpha_2+\omega+\Theta)-b_2\cos(\alpha_2+\omega+\Theta)\}.\end{aligned}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{aligned}K= &\sin(\alpha_1-\alpha_2)(a\sin\alpha-b\cos\alpha)\\ &+\sin(\alpha_2-\alpha)(a_1\sin\alpha_1-b_1\cos\alpha_1)\\ &+\sin(\alpha-\alpha_1)(a_2\sin\alpha_2-b_2\cos\alpha_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L= &\sin(\alpha_1-\alpha_2)(a\cos\alpha+b\sin\alpha)\\ &+\sin(\alpha_2-\alpha)(a_1\cos\alpha_1+b_1\sin\alpha_1)\\ &+\sin(\alpha-\alpha_1)(a_2\cos\alpha_2+b_2\sin\alpha_2);\end{aligned}$$

so ist, wie sogleich erhellen wird:

$$K\cos(\omega+\Theta)+L\sin(\omega+\Theta)=0,$$

also

$$\operatorname{tang}(\omega+\Theta)=-\frac{K}{L}.$$

Berechnet man die Hülfsgrössen μ, λ; μ_1, λ_1; μ_2, λ_2 auf bekannte Weise mittelst der Formeln

$$\begin{aligned}a&=\mu\cos\lambda, & b&=\mu\sin\lambda;\\ a_1&=\mu_1\cos\lambda_1, & b_1&=\mu_1\sin\lambda_1;\\ a_2&=\mu_2\cos\lambda_2, & b_2&=\mu_2\sin\lambda_2;\end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}K= &\mu\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha-\lambda)\\ &+\mu_1\sin(\alpha_2-\alpha)\sin(\alpha_1-\lambda_1)\\ &+\mu_2\sin(\alpha-\alpha_1)\sin(\alpha_2-\lambda_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L= &\mu\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos(\alpha-\lambda)\\ &+\mu_1\sin(\alpha_2-\alpha)\cos(\alpha_1-\lambda_1)\\ &+\mu_2\sin(\alpha-\alpha_1)\cos(\alpha_2-\lambda_2);\end{aligned}$$

mittelst welcher Formeln die Grössen K und L ohne Schwierigkeit berechnet werden können.

Zwischen ϱ und ϱ_1 hat man nach dem Obigen die Gleichungen

$$\begin{aligned}\varrho\cos(\alpha+\omega+\Theta)-\varrho_1\cos(\alpha_1+\omega+\Theta)&=a_1-a,\\ \varrho\sin(\alpha+\omega+\Theta)-\varrho_1\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)&=b_1-b;\end{aligned}$$

aus denen sich

$$\varrho=\frac{(a_1-a)\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)-(b_1-b)\cos(\alpha_1+\omega+\Theta)}{\sin(\alpha_1-\alpha)},$$

oder, wenn man die Hülfsgrössen k und i mittelst der Formeln

$$a_1 - a = k\cos i,\ b_1 - b = k\sin i$$

berechnet:

$$\varrho = k\frac{\sin(\alpha_1 - i + \omega + \Theta)}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}$$

ergiebt. Hat man aber auf diese Weise ϱ gefunden, so erhält man die Coordinaten x und y leicht mittelst der Formeln

$$x = a + \varrho\cos(\alpha + \omega + \Theta),\ y = b + \varrho\sin(\alpha + \omega + \Theta);$$

und dann ϱ_1 und ϱ_2 mittelst der Formeln

$$\varrho_1 = \frac{x - a_1}{\cos(\alpha_1 + \omega + \Theta)} = \frac{y - b_1}{\sin(\alpha_1 + \omega + \Theta)},$$

$$\varrho_2 = \frac{x - a_2}{\cos(\alpha_2 + \omega + \Theta)} = \frac{y - b_2}{\sin(\alpha_2 + \omega + \Theta)}.$$

Auch hat man nach dem Obigen zur Bestimmung von x und y die Gleichungen

$$x\sin(\alpha + \omega + \Theta) - y\cos(\alpha + \omega + \Theta) = \mu\sin(\alpha - \lambda + \omega + \Theta),$$

$$x\sin(\alpha_1 + \omega + \Theta) - y\cos(\alpha_1 + \omega + \Theta) = \mu_1\sin(\alpha_1 - \lambda_1 + \omega + \Theta),$$

$$x\sin(\alpha_2 + \omega + \Theta) - y\cos(\alpha_2 + \omega + \Theta) = \mu_2\sin(\alpha_2 - \lambda_2 + \omega + \Theta);$$

aus denen sich u. A.

$$x = \frac{\mu\sin(\alpha - \lambda + \omega + \Theta)\cos(\alpha_1 + \omega + \Theta) - \mu_1\sin(\alpha_1 - \lambda_1 + \omega + \Theta)\cos(\alpha + \omega + \Theta)}{\sin(\alpha - \alpha_1)},$$

$$y = \frac{\mu\sin(\alpha - \lambda + \omega + \Theta)\sin(\alpha_1 + \omega + \Theta) - \mu_1\sin(\alpha_1 - \lambda_1 + \omega + \Theta)\sin(\alpha + \omega + \Theta)}{\sin(\alpha - \alpha_1)}$$

ergiebt.

Da ϱ immer eine positive Grösse sein muss, so kann, wie leicht erhellen wird, nie ein Zweifel bleiben, wie man den Winkel $\omega + \Theta$ zu nehmen hat, wenn man denselben mittelst der Formel

$$\operatorname{tang}(\omega + \Theta) = -\frac{K}{L}$$

berechnet. Weitere Bemerkungen über die obige Auflösung können wir füglich dem Leser überlassen.

Digitized by Google

XV.

Remarques faites à l'occasion du No. XIII. T. IV. p. 113. de ce journal.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer

de Groningue.

Dans l'article cité M. le rédacteur a communiqué une équation générale de M. Bertrand qui sert à trouver la valeur de l'intégrale défini

$$\int_0^x \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}\,d\omega.$$

Cette équation est la suivante

$$(1)\quad \int_a^x f(\omega,x)d\omega = \int_a^x \varphi(x)dx + \int_a^x \varphi_1(x)dx$$

dans laquelle $\varphi(x)$ signifie ce que devient $f(x,\omega)$ lorsqu'on écrit x au lieu de ω, et $\varphi_1(\omega)$ ce que devient $\int_a^x \frac{d.f(x,\omega)}{d\omega}dx$ en mettant x au lieu de ω après la differentiation et l'intégration. Sans ce long avertissement la formule (1) n'a aucune signification et ce serait donc un grave inconvénient si cette équation ne pourrait s'exprimer d'une manière plus simple. Or on verra avec peu d'attention qu'elle n'est autre chose qu'un cas particulier du principe de la differentiation sous le signe intégral.

En effet, soient a et b des fonctions de x et en désignant pour plus de commodité la dérivée $\frac{d.F(x)}{dx}$ d'une fonction quelconque $F(x)$ par $d_xF(x)$, on a en général

$$(2)\quad d_x\int_a^b f(\omega,x)d\omega = f(b,x)d_xb - f(a,x)d_xa + \int_a^b d_xf(\omega,x)d\omega$$

d'où l'on tire en particulier, en faisant $b=x$ et a indépendant de x:

$$(3)\quad d_x\int_a^x f(\omega,x)d\omega = f(x,x) + \int_a^x d_xf(\omega,x)d\omega.$$

Maintenant si l'on fait

$$d_xf(\omega,x) = f(\omega,x)$$

on aura

$$(4) \quad d_\omega f(x,\omega) = f'(x,\omega)$$

et

$$(5) \quad \int_a^x d_x f(\omega,x) d\omega = \int_a^x f'(\omega,x) d\omega.$$

Mais on voit sans peine que l'on aura

$$(6) \quad \int_a^x f'(\omega,x) d\omega = \left[\int_a^x f'(x,\omega)\, dx\right]_{\omega=x}$$

en admettant que le dernier membre signifie qu'il faut changer ω en x dans l'expression $\int_a^x f'(x,\omega) dx$ après l'intégration.

Il suit donc de (5) et (6)

$$\int_a^x d_x f(\omega,x) d\omega = \left[\int_a^x f'(x,\omega)\, dx\right]_{\omega=x}$$

ou d'après (4)

$$\int_a^x d_x f(\omega,x) d\omega = \left[\int_a^x d_\omega f(x,\omega) dx\right]_{\omega=x}$$

ce qui change (3) en

$$(7) \quad d_x \int_a^x f(\omega,x) d\omega = f(x,x) + \left[\int_a^x d_\omega f(x,\omega)\, dx\right]_{\omega=x}.$$

Or $f(x,x)$ est le même que ce qu'on a exprimé par $\varphi(x)$ dans la formule (1) et $\left[\int_a^x d_\omega f(x,\omega) dx\right]_{\omega=x}$ est le même que $\varphi_1(x)$ dans cette formule. Donc d'après cette notation la formule (4) ou (3) se réduit à

$$d_x \int_a^x f(\omega,x)\, d\omega = \varphi(x) + \varphi_1(x),$$

et en intégrant par rapport à x entre les limites $x = a$ et $x = x$ il s'ensuit

$$\int_a^x f(\omega,x) d\omega - \int_a^a f(\omega,a) d\omega = \int_a^x \varphi(x) dx + \int_a^x \varphi_1(x) dx,$$

ou puisque $\int_a^a f(\omega,a) d\omega$ est évidemment égal à zero

$$\int_a^x f(\omega,x) d\omega = \int_a^x \varphi(x) dx + \int_a^x \varphi_1(x) dx.$$

Il résulte de ce qui précède que l'équation de M. Bertrand n'est qu'un cas particulier de l'intégrale de la formule qui sert à différentier sous le signe intégral les intégrales définies par rapport à une variable dont les limites sont des fonctions, et que par conséquent toutes les conséquences que l'on en peut faire se déduiront

aussi de la formule équivalente (3) et a fortiori de la formule générale (2).

Ainsi pour trouver la valeur de l'intégrale définie

$$(8)\quad y=\int_0^x \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}\,d\omega$$

l'on différentie par rapport à x, et la formule (3) donne

$$(9)\ d_x y=\frac{l(1+x^2)}{1+x^2}+\int_0^x d_x\frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}d\omega=\frac{l(1+x^2)}{1+x^2}+\int_0^x\frac{\omega d\omega}{(1+\omega^2)(1+x\omega)}$$

mais on a

$$\frac{\omega}{(1+\omega^2)(1+x\omega)}=\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x}{1+\omega^2}+\frac{\omega}{1+\omega^2}-\frac{x}{1+x\omega}\right)$$

d'où

$$\int_0^x\frac{\omega d\omega}{(1+\omega^2)(1+x\omega)}=\frac{1}{1+x^2}(x.\mathrm{arctan}.x+\tfrac{1}{2}l(1+x^2)-l(1+x^2))$$

En substituant cette valeur dans (9) on obtient

$$2d_x y=\frac{l(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{2x.\mathrm{arctan}.x}{1+x^2}$$

équation que l'on peut écrire sous la forme

$$2d_x y=l(1+x^2)d_x\ \mathrm{arctan}.x+\mathrm{arctan}.x d_x l.(1+x^2)$$
$$=d_x[l(1+x^2).\mathrm{arctan}.x]$$

et en intégrant par rapport à x:

$$2y=l(1+x^2).\mathrm{arctan}.x+C.$$

La quantité C indépendante de x est d'après (8) égale à zéro. Donc on a

$$\int_0^x\frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}d\omega=\tfrac{1}{2}l(1+x^2).\mathrm{arctan}.x.$$

Quant à la formule

$$\int_a^x\psi(x)F(x)dx=\psi(x)\int_a^x F(x)dx-\int_a^x(d_x\psi(x)\int_a^x F(x)dx)dx,$$

que l'on a déduite de l'équation (1) et la quelle offre une extension du principe de l'intégration par partie, elle s'obtient de même de l'équation (3), mais l'équation (2) nous donne la formule plus générale:

Digitized by Google

$$(10) \quad \int_u^v \psi(x)F(x)\,dx = \psi(v)\int_a^v F(x)dx - \psi(u)\int_a^u F(x)dx$$
$$- \int_u^v \left(d_x\psi x \int_a^x F(x)dx\right)dx$$

u et v désignant des fonctions quelconques de x et a une constante. Cependant on n'a pas besoin de transformer (2) pour obtenir la formule précédente, parcequ'on y parviendra immédiatement au moyen de la formule connue:

$$d_x[\psi(x)\varphi(x)] = \psi(x)d_x\varphi(x) + d_x\psi(x)\,.\,\varphi(x).$$

Car en intégrant entre les limites u et v par rapport à x, on aura

$$\int_u^v d_x[\psi(x)\varphi(x)]dx = \int_u^v \psi(x)d_x\varphi(x)dx + \int_u^v d_x\psi(x)\,.\varphi(x)dx;$$

mais

$$\int_u^v d_x[\psi(x)\varphi(x)]dx = \psi(v)\varphi(v) - \psi(u)\varphi(u),$$

d'où

$$\psi(v)\varphi(v) - \psi(u)\varphi(u) = \int_u^v \psi x d_x\varphi(x)dx + \int_u^v d_x\psi(x)\varphi(x)dx.$$

Posons

$$\varphi(x) = \int_a^x F(x)dx,$$

on aura

$$\varphi(v) = \int_a^v F(x)dx, \ \varphi(u) = \int_a^u F(x)dx \text{ et } d_x\varphi(x) = F(x);$$

par conséquent

$$\psi(v)\int_a^v F(x)dx - \psi(u)\int_a^u F(x)dx = \int_u^v \psi(x)F(x)dx$$
$$+ \int_u^v \left(d_x\psi(x)\int_a^x F(x)dx\right)dx.$$

En renversant les termes on obtient la formule (10), par laquelle l'on intègre par parties entre des limites quelconques.

Digitized by Google

XVI.
Uebungsaufgaben für Schüler.

Aufgaben aus den Cambridge problems, proposed by the moderators to the candidates for mathematical honours at the general examination 1842—43 und 1843.

Man soll beweisen, dass die Summe eines Bruchs und seines reciproken Werths immer grösser als 2 ist.

Man soll beweisen, dass, wenn Θ den von den Diagonalen eines Parellelogramms, dessen Seiten a, b unter dem Winkel α gegen einander geneigt sind, eingeschlossenen Winkel bezeichnet, jederzeit

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{2ab\sin\alpha}{a^2-b^2} = \frac{2ab.\sin\alpha}{(a+b)(a-b)}$$

ist.

Wenn

$$\cos\Theta^2 = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\ \cos\Theta_1{}^2 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta},\ \frac{\operatorname{tang}\Theta}{\operatorname{tang}\Theta_1} = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\alpha_1}$$

ist, so ist immer

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha_1 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta.$$

Wenn E und F die Punkte bezeichnen, in denen die Seiten AC und AB eines Dreiecks von den auf sie von den gegenüberstehenden Spitzen B und C gefällten Perpendikeln getroffen werden, so ist immer

$$BC^2 = AB.BF + AC.CE.$$

Wenn a, b, c die Seiten und A, B, C die gegenüberstehenden Winkel eines ebenen Dreiecks sind, und r den Halbmesser des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises bezeichnet, so ist immer

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4r\sin A\sin B\sin C.$$

Wenn die Sinus der Winkel eines ebenen Dreiecks eine arithmetische Progression bilden, so bilden auch jederzeit die Cotangenten der halben Winkel dieses Dreiecks eine arithmetische Progression.

Wenn A, B, C und A', B', C' Punkte in der Peripherie eines Kreises, und die Linien AB, AC den Linien $A'B'$. $A'C'$ beziehungsweise parallel sind, so sind auch jederzeit die Linien BC'' und $B'C$ einander parallel.

Ein rechtwinkliges Dreieck durch eine auf seiner Hypotenuse senkrecht stehende Linie zu halbiren.

Digitized by Google

Wenn zwei Kreise, deren Halbmesser a und b sind, sich von Aussen berühren, und Θ den von zwei gemeinschaftlichen Berührungslinien dieser beiden Kreise eingeschlossenen Winkel bezeichnet, so ist immer

$$\sin\Theta = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

Wenn die Zahl n sich in q Quadrate zerlegen lässt, so lässt die Zahl $2(q-1)n$ sich immer in $q(q-1)$ Quadrate zerlegen.

Die stereographische Projection eines Cubus auf einer auf seiner Diagonale senkrecht stehenden Ebene ist, wenn das Auge sich in der verlängerten Diagonale befindet, ein gleichseitiges Sechseck. Befindet sich das Auge in einer der Diagonale gleichen Entfernung von dem Cubus, so verhalten sich die Sinus zweier einander benachbarten Winkel dieses Sechsecks wie 8 : 5 zu einander.

Ein leuchtender Punkt befindet sich in der grossen Axe einer Ellipse in der Entfernung u vom Mittelpunkte; man soll beweisen, dass die Entfernung u_x des Bildes nach der $x$ten Reflexion vom Mittelpunkte durch die Gleichung

$$\frac{ae-(-1)^x u_x}{ae+(-1)^x u_x} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\pm 2x} \cdot \frac{ae-u}{ae+u}$$

gefunden wird.

Sätze von den Kegelschnitten, welche zu beweisen sind.

Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Nennt man eine jede Sehne eines Kegelschnittes, welche durch einen Brennpunkt geht, eine Brennsehne, und je zwei solche zu einander rechtwinklige Sehnen zwei zugeordnete Brennsehnen desselben, so hat man die Sätze:

1. In jeder Ellipse und Parabel ist die Summe, und in jeder Hyperbel ist die Summe oder der Unterschied der reciproken Werthe der Stücke, in welche eine Brennsehne durch den Brennpunkt zerlegt wird, jenachdem letztere innerhalb oder ausserhalb der Hyperbel liegt, constant, und zwar viermal so gross als der reciproke Werth des Parameters.

2. In jeder Parabel ist die Summe der reciproken Werthe je zweier zugeordneter Brennsehnen gleich dem reciproken Werthe des Parameters, in jeder Ellipse gleich der Summe der reciproken Werthe des Parameters und der Hauptachse, und in jeder Hyperbel ist, wenn beide Brennsehnen innerhalb oder beide ausserhalb derselben liegen, die Summe; dagegen, wenn die eine innerhalb, die andere ausserhalb liegt, der Unterschied ihrer re-

ciproken Werthe gleich dem Unterschiede der reciproken Werthe des Parameters und der Hauptachse.

3. In jeder Parabel ist die Summe der reciproken Werthe der Rechtecke zwischen den durch den Brennpunkt bestimmten Abschnitten je zweier zugeordneter Brennsehnen dem reciproken Werthe des Quadrates des halben Parameters, in jeder Ellipse der Summe der reciproken Werthe der Quadrate des halben Parameters und der halben Nebenachse, und in jeder Hyperbel ist, wenn beide Brennsehnen innerhalb oder beide ausserhalb liegen, die Summe; dagegen, wenn die eine innerhalb, die andere ausserhalb liegt, der Unterschied jener reciproken Werthe dem Unterschiede der reciproken Werthe der Quadrate des halben Parameters und der halben Nebenachse gleich.

4. In jeder gleichseitigen Hyperbel sind je zwei zugeordnete Brennsehnen von gleicher Länge, und die Rechtecke zwischen ihren durch den Brennpunkt bestimmten Abschnitten von gleichem Inhalte.

5. Die Summe der reciproken Werthe der Quadrate über den vier Abschnitten, in welche je zwei zugeordnete Brennsehnen im Brennpunkte getheilt werden, ist für die Parabel 24mal so gross als der reciproke Werth des Quadrates des Parameters, und für die Ellipse oder Hyperbel 24mal so gross als der reciproke Werth des Quadrates des Parameters, weniger oder mehr dem Doppelten des Quadrates der halben Nebenachse.

6. In jeder Ellipse ist die Summe, und in jeder Hyperbel ist der Unterschied der Rechtecke zwischen zwei Paar Zuglinien, welche von beiden Brennpunkten nach den Endpunkten zweier zugeordneter Durchmesser gezogen werden, von unveränderlichem Inhalt, und zwar der Summe oder dem Unterschiede der Quadrate der halben Achsen gleich.

XVII.

Miscellen.

In Schumachers astronomischen Nachrichten No. 491. S. 171. hat Herr Professor **Anger** zu **Danzig** die folgende interessante Bemerkung mitgetheilt.

Wenn man unter dem Höhendreieck eines Dreiecks das Dreieck versteht, welches durch Verbindung der Fusspunkte der drei Höhen des gegebenen Dreiecks durch gerade Linien entsteht, so giebt es

zwischen dem Radius des um das gegebene Dreieck beschriebenen Kreises, dem Radius des in dasselbe beschriebenen Kreises, dem Radius des in das Höhendreieck beschriebenen Kreises, und den drei Winkeln des gegebenen Dreiecks eine merkwürdige Relation. Bezeichnet man nämlich den Radius des um ein Dreieck beschriebenen Kreises durch R, den Radius des in dasselbe beschriebenen Kreises durch r, den Radius des in sein Höhendreieck eingeschriebenen Kreises durch ϱ, so ergeben sich die Cosinusse der drei Winkel des gegebenen Dreiecks durch die Auflösung der folgenden cubischen Gleichung:

$$\cos^3 \alpha - \left(1 + \frac{r}{R}\right) \cos^2 \alpha + \frac{r^2 + 2Rr + R\varrho}{2R^2} \cos \alpha = \frac{\varrho}{R}.$$

Herr Professor Anger bemerkt noch, dass sich viele interessante trigonometrische Sätze aus dieser Gleichung ableiten lassen, die wegen ihrer einfachen Form einige Aufmerksamkeit zu verdienen scheine. G.

Eine Rechnungsspielerei

zur Sprache gebracht von Herrn Professor Hessel in Marburg.

Bei der bekannten Aufgabe, nach welcher man die Zahlen 1 bis 9 so in ein aus 9 Feldern bestehendes quadratisches Täfelchen wie $\left\{\begin{matrix} abc \\ def \\ ghi \end{matrix}\right\}$ einschreiben soll, dass die Summen $a+b+c$, $d+e+f$, $g+h+i$, $a+d+g$, $b+e+h$, $c+f+i$, $a+e+i$, $c+e+g$ gleich gross werden, ist $e=5$, z. B. $\left\{\begin{matrix} 438 \\ 951 \\ 276 \end{matrix}\right\}$. Man ändere nun vorstehende Aufgabe dahin ab, dass gefordert wird, es soll $a+b+c=d+e+f=g+h+i=a+d+g=b+e+h=c+f+i=a+e+i$ aber verschieden von $c+e+g$, und e eine von 5 verschiedene Zahl sein.

Auszug aus einem Briefe des Herrn G. D. E. Weyer, Assistenten an der Sternwarte zu Hamburg, an den Herausgeber.

Die von Gerling, Hansen, Clausen, so wie von Euer etc. selbst bearbeitete geodätische Aufgabe gehört nach meiner Meinung zu den einfachen und nützlichen Problemen, die beim ersten An-

Digitized by Google

blick die Auflösung zu fliehen scheinen. So findet sich die leichtere umgekehrte Aufgabe z. B. fast in allen Navigationsbüchern, während die gegenwärtige wohl mit demselben Rechte einen Platz darin verdiente, indem die unsichere Messung einer Standlinie auf dem Wasser dabei wegfällt und zugleich die magnetische Declination des Compasses (mit Einschluss der Lokalattraction) bestimmt wird. Ich sehe solche Aufgaben gerne historisch nachgewiesen. Hier ist ein Beitrag dazu aus William Payne's Elements of Trigonometrie, London 1772:

Having the distance of two objects A and B (Taf. II. Fig. 9.), with the angles observed at the stations C and D; it is required to find the distance between the stations C and D. — Construction. Upon AB describe segments of circles that will contain the given angles ACB, ADB, make the angle $ABE = ADC$, draw AE, upon AE describe a segment of a circle $AFCE$, that will contain the supplement of the angle ACD, cutting the circle ACB in C, draw ECD, and the thing is evidently done. — Calculation. In the triangle CDA are given all the angles, and by taking CD at pleasure (suppose 1000) we may find CA etc.

Noch einige Aufgaben.

1. Wenn die Mittelpunkte A, B, C dreier Kreise in einer geraden Linie liegen, und die Kreise B und C den Kreis A von Innen, sich selbst von Aussen berühren, so ist immer der ausserhalb der Kreise B und C liegende Theil der Area des Kreises A der Area des über der die beiden Kreise B und C berührenden Sehne des Kreises A beschriebenen Halbkreises gleich.

2. Die Seiten eines ebenen Dreiecks seien den Wurzeln der Gleichung

$$x_3 + ax_2 + bx + c = 0$$

proportional: man soll die Summe der Cosinus der Winkel dieses Dreiecks finden.

3. Aus drei gegebenen Punkten als Mittelpunkten drei sich gegenseitig berührende Kreise zu beschreiben.

XVIII.

Theorie der involutorischen Gebilde nebst Anwendungen auf die Kegelschnitte.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,
Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. XXX. im dritten Hefte des vierten Theils.)

Ueber das Wesen und die Eigenschaften der einem Systeme von Kegelschnitten gemeinschaftlichen Sekanten und Tangentendurchschnitte.

§. 5.

Zwei in einer Ebene beliebig liegende Kegelschnitte.

Steht durch unmittelbare Anschauung fest, dass eine Ellipse und irgend ein anderer Kegelschnitt, welche in einer Ebene beliebig liegen, wenn sie einen Punkt gemein haben, ohne sich in ihm zu berühren, nothwendig einen zweiten, und wenn einen dritten, nothwendig einen vierten Punkt gemein haben müssen, so zeigt man das nämliche von zwei beliebigen Kegelschnitten, indem man alle ihre Punkte mit einem beliebigen Punkte des Raumes durch Gerade verbindet und die so erhaltenen Kegel mit einer Ebene schneidet, welche einer durch den gemeinsamen Scheitel gehenden und einen der Kegelschnitte weder schneidenden noch berührenden Ebene parallel ist. Und hieraus schliesst man dann, dass zwei beliebige Kegelschnitte, welche eine Tangente gemein haben, ohne sich selbst längs derselben zu berühren, nothwendig eine zweite u. s. w. ge-

mein haben müssen, weil die Polar-Kegelschnitte derselben in Bezug auf einen beliebigen dritten *) einen Punkt und folglich zwei Punkte gemein haben.

Es seien nun in einer Ebene zwei Kegelschnitte K, K_1 von beliebiger Gestalt und Lage gegeben; es sei A eine beliebige Gerade dieser Ebene, und B, B_1 die harm. Pole von A für K, K_1. Ferner seien $a, b, c, d \ldots.$ und $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.$ der Reihe nach und beziehlich die harm. Polaren der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.$ von A für K, K_1, und die Punkte B, B_1 mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.$ durch die Strahlen $a', b', c', d' \ldots.$; $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots.$ verbunden; so sind je zwei Strahlen a, a'; b, $b' \ldots.$ für K, und a_1, a'_1; b_1, $b'_1 \ldots.$ für K_1 zug. harmonische Polaren. Man hat also nach §. 4. 1. um jeden der Punkte B, B_1 zwei involutorische, a potiori also projektivische Strahlbüschel B und B', B_1 und B'_1, von denen überdiess B' und B'_1 perspektivisch sind, nämlich:

$$B(a, b, c, d \ldots.) = B'(a', b', c', d' \ldots.) \equiv A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.)$$
$$\equiv B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.),$$

also ist auch

$$B(a, b, c, d \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.).$$

1. **Die harmonischen Polaren aller Punkte einer beliebigen Geraden in Bezug auf zwei in einer Ebene beliebig liegende Kegel-**

1. **Die harmonischen Pole aller Strahlen eines beliebigen Punktes in Bezug auf zwei in einer Ebene beliebig liegende Kegelschnitte**

---

*) Sind nämlich K, K_1 zwei beliebige Kegelschnitte, A, A_1, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots.$ Tangenten von K_1, und B, B_1 $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0 \ldots.$ die harmonischen Pole derselben für K; sind ferner $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.$ die Durchschnittspunkte von A und A_1 mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots.$, und $a, b, c, d \ldots.$ und $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.$ die Strahlen, welche beziehlich B und B_1 mit $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0 \ldots.$ verbinden, so sind $a, b, c, d \ldots.$ der Reihe nach die harmonischen Polaren von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.$, und $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.$ die harmonischen Polaren von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.$ für K; also sind die Punkte $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' \ldots.$, wo A die $a, b, c, d \ldots.$ schneidet, die zugeordneten harmonischen Pole von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.$, und die Durchschnittspunkte $\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1 \ldots.$ von A_1 mit $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.$ sind die zug. harm. Pole von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.$ Nun aber ist nach §. 4. 1. und Einleitung 11.

$$B(a, b, c, d \ldots.) \equiv A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' \ldots.) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.)$$
$$= A'_1(\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.);$$

also auch $B(a, b, c, d \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.)$, d. h. die harmonischen Pole der Tangenten von K_1 für K liegen auf einem dritten Kegelschnitte K_2. Ist nun e_1 die Tangente in B_1, so ist e die Verbindungslinie von B und B_1, e der gegenseitige Durchschnitt von A und A_1, e_1 der Berührungspunkt von A_1, also sind auch die harmonischen Polaren aller Punkte von K_2 für K Tangenten von K_1. Haben nun zwei Kegelschnitte eine Tangente gemein, so ist der harmonische Pol derselben für K ein gemeinschaftlicher Punkt ihrer Polar-Kegelschnitte für K, und die harmonischen Polaren der beiden gemeinschaftlichen Punkte der letzteren sind gemeinschaftliche Tangenten der ersteren.

Digitized by Google

schnitte schneiden sich paarweise auf dem Umfange eines dritten Kegelschnittes, welcher auch die beiden harmonischen Pole jener Geraden enthält.

liegen paarweise auf den Tangenten eines dritten Kegelschnitts, welcher auch die beiden harmonischen Polaren jenes Punktes berührt. *)

Ist $\mathfrak{a}_1$ der gegenseitige Durchschnitt der harmonischen Polaren von $\mathfrak{a}$, so ist auch $\mathfrak{a}$ der gegenseitige Durchschnitt der harmonischen Polaren von $\mathfrak{a}_1$ für K, K_1; daher nennt Herr Poncelet solche zwei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ reciproke oder Wechselpunkte in Bezug auf K, K_1, und in demselben Sinne sollen zwei Gerade, deren jede die harmonischen Pole der anderen in Bezug auf K, K_1 enthält, Wechselstrahlen; ferner soll der Kegelschnitt$_1$ dessen sämmtliche Punkte mit denen einer Geraden A Paare von Wechselpunkten bilden, der Wechselpunkt-Kegelschnitt dieser Geraden, und jener, dessen sämmtliche Tangenten mit den Strahlen eines Punktes Paare von Wechselstrahlen bilden, der Wechselstrahlen-Kegelschnitt dieses Punktes — in Bezug auf K, K_1 — heissen.

Die Wechselpunkt-Kegelschnitte zweier verschiedenen Geraden A, A' in Bezug auf K, K_1 haben nothwendig einen Punkt $\mathfrak{q}_1$, nämlich den Wechselpunkt ihres Durchschnittes $\mathfrak{q}$ gemein. a) Berühren sie sich nun nicht in diesem Punkte $\mathfrak{q}_1$, so haben sie nothwendig einen zweiten Punkt p gemein; die harmonischen Polaren dieses Punktes p convergiren sowohl auf A als auf A', ohne durch $\mathfrak{q}$ zu gehen; also fallen sie in eine einzige Gerade P zusammen; und da diese Gerade nun jede Gerade der Ebene in einem Punkte schneidet, dessen harmonische Polaren für K, K_1 durch p gehen, so haben die Wechselpunkt-Kegelschnitte aller Geraden für K, K_1 den Punkt p gemein. b) Berühren sie sich in $\mathfrak{q}_1$, so seien R, R' die harmonischen Polaren von $\mathfrak{q}_1$, die also durch $\mathfrak{q}$ gehen müssen; es sei B' der harmonische Pol von R' für K, B_1 der harmonische Pol von R für K_1, und es heisse $\mathfrak{q}_1$ als harmonischer Pol von R für K und von R' für K_1 beziehlich B, B'_1. Denkt man sich nun die Wechselpunkt-Kegelschnitte von R und R', und erwägt, dass die Geraden $BB', B_1B'_1$ die harmonischen Polaren von $\mathfrak{q}$ für K, K_1 sind, und dass in den projektivischen Strahlbüscheln B, B_1 (B', B'_1), welche den Wechselpunkt-Kegelschnitt von $R(R')$ erzeugen, die Tangente in $B(B'_1)$ dem gemeinschaftlichen Strahle $B_1B(B'B'_1)$ entspricht, so sieht man, dass die Geraden B_1B und $B'B'_1$ jede den anderen Kegelschnitt in $\mathfrak{q}_1$ berühren. Bildeten sie nun eine gemeinschaftliche Tangente, so hätte der Punkt $\mathfrak{q}$ für K und K_1 einerlei harmonische Polare; wo aber nicht, so hätte diess neue Paar von Wechselpunkt-Kegelschnitten einen zweiten Punkt p gemein, welcher für K und K_1 einerlei harmonische Polare haben und sämmtlichen Wechselpunkt-Kegelschnitten gemeinschaftlich angehören müsste.

2. Sind in einer Ebene zwei Kegelschnitte von be-

*) Da die beiderseitigen Betrachtungen dem Wesen nach allemal eins sind, so wird man die eine jedesmal gern erlassen.

liebiger Gestalt und Lage gegeben, so giebt es in dieser Ebene allemal

einen Punkt p, dessen harmonische Polaren in Bezug auf beide Kegelschnitte in eine einzige Gerade P zusammenfallen.

eine Gerade P, deren harmonische Pole in Bezug auf beide Kegelschnitte sich in einem Punkte p vereinigen.

Dieser Punkt p liegt nun entweder 1) innerhalb beider Kegelschnitte K, K_1, oder 2) innerhalb des einen und ausserhalb des anderen, oder 3) ausserhalb beider, und diesen Fällen entsprechend wird die Gerade P entweder keinen von beiden, oder nur einen, oder beide durchschneiden. Die Involutionen zug. harmonischer Polaren des Punktes p in Bezug auf K und K_1 bestehen nach §. 4. 1. im Falle 1) beide aus gleichliegenden, im Falle 2) die eine aus gleichliegenden, die andere aus ungleichliegenden, im Falle 3) beide aus ungleichliegenden Gebilden; daher haben sie nach §. 3. 5. im Falle 1) und 2) allemal ein Paar zugeordnete Strahlen P_1, P_2 gemein, im Falle 3) aber nur dann, wenn die beiden von p ausgehenden Tangentenpaare sich ein- oder ausschliessen. Diese Geraden P_1, P_2 haben die Eigenschaft, dass eine jede die harmonischen Pole der anderen für K, K_1 enthält, Pole, welche übrigens auch auf P liegen müssen; also schneidet eine jede die P in einem Punkte p_2, p_1, der in Bezug auf K und K_1 der harmonische Pol der anderen (P_2, P_1) ist. Von den beiden Involutionen zug. harmonischer Pole, welche einer dieser Geraden, z. B. P angehören, sind zwei jener drei Punkte p, p_1, p_2, also hier p_1, p_2, ein gem. zug. Paar; bedenkt man also, dass p_1, p_2 beide ausserhalb eines Kegelschnittes $K(K_1)$ liegen müssen, wenn p in demselben, und dass der eine innerhalb, der andere ausserhalb, wenn p ausserhalb desselben liegt, so ergeben sich als die einzigen Lagen, deren die Punkte p, p_1, p_2 in den genannten drei Fällen fähig sind, folgende:

1ster und 3ter Fall.

p innerhalb K und innerhalb K_1;

p_1 ausserhalb K und ausserhalb K_1;

p_2 ausserhalb K und ausserhalb K_1;

2ter und 3ter Fall.

p innerhalb K und ausserhalb K_1;

p_1 ausserhalb K und ausserhalb K_1;

p_2 ausserhalb K und innerhalb K_1;

wo jeder der drei Punkte mit den anderen verwechselt werden kann.

Offenbar aber muss von zwei beliebigen Kegelschnitten K, K_1 entweder a) der eine ganz innerhalb des anderen oder b) ein

jeder ganz ausserhalb des anderen, oder c) zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb des anderen liegen. Im Falle a) können von den früheren drei Fällen nur 1) und 3) eintreten; denn läge p innerhalb des äusseren und ausserhalb des inneren Kegelschnittes, so würde p_1 oder p_2 ausserhalb des äusseren und innerhalb des inneren liegen müssen, was unmöglich ist. Tritt aber der Fall 3) ein, d. h. liegt der einzelne Punkt p, den zwei Kegelschnitte allemal besitzen, ausserhalb des inneren und des äusseren, so schneidet die Gerade P beide in zwei Punktenpaaren, welche sich einschliessen; also existiren die Punkte p_1, p_2 im Falle a) allemal. Im Falle b) ist der Fall 1) nicht denkbar, und da im Falle 3) die Gerade P die Kegelschnitte in zwei Punktenpaaren schneidet, die sich ausschliessen, so existiren auch im Falle b) die Punkte p_1, p_2 unbedingt. Im Falle c) endlich haben die Kegelschnitte, da Berührungspunkte ausgeschlossen sind, entweder vier oder nur zwei Punkte gemein. Ist das erstere, so bilden die vier Punkte ein vollständiges Viereck, dessen Gegenseiten sich offenbar in drei Punkten p, p_1, p_2 schneiden. Demnach kann der Umstand, dass zwei Kegelschnitte nur einen einzigen Punkt p in ihrer Ebene besitzen, einzig nur dann statt finden, wenn sie bloss zwei Punkte gemein haben. Und zwar findet er dann nothwendig statt; denn sonst könnte man einen jeden der gemeinschaftlichen Punkte a, b, z. B. a, mit einem der Punkte p, p_1, p_2, z. B. mit p_1, durch eine Gerade ap_1 verbinden, welche nicht in die Richtung ab fiele, und die folglich jeden der Kegelschnitte K, K_1 in einem zweiten Punkte c, c_1 schneiden müsste; dann aber würde P_1, als harmonische Polare von p_1 für K, K_1, die ap_1 in einem Punkte schneiden, welcher sowohl zu a, c, p_1 als zu a, c_1, p_1 der vierte harmonische, dem p_1 zugeordnete Punkt wäre, was unmöglich ist, da c und c_1 nicht zusammenfallen sollen.

Ebenso zeigt man, dass zwei Kegelschnitte, welche nur zwei Tangenten gemein haben, auch nur eine Gerade P, und folglich auch nur einen Punkt p besitzen. Hieraus folgt dann, dass sie allemal und nur zwei Punkte gemein haben, und umgekehrt: Haben zwei Kegelschnitte nur zwei Punkte gemein, so haben ihre Polar-Kegelschnitte in Bezug auf irgend einen dritten nur zwei Tangenten, also auch nur zwei Punkte, also die ursprünglichen allemal und nur zwei Tangenten gemein.

3. Haben zwei in einer Ebene beliebig liegende Kegelschnitte

nur zwei Punkte gemein, so haben sie allemal und nur zwei Tangenten gemein.	nur zwei Tangenten gemein, so haben sie allemal und nur zwei Punkte gemein.

4. Zwei in einer Ebene beliebig liegende Kegelschnitte haben allemal drei zugeordnete harmonische Pole und drei zugeordnete harmonische Polaren gemein, wenn sie einerseits entweder keinen oder vier Durchschnittspunkte, oder wenn sie andererseits entweder keine oder vier Tangenten gemein haben, und zwar a) wenn einer der Kegelschnitte ganz innerhalb des anderen liegt, so liegen zwei jener drei Pole ausser-

halb, der dritte innerhalb beider, und zwei jener drei Polaren schneiden beide, die dritte keinen; b) wenn ein jeder Kegelschnitt ganz ausserhalb des anderen liegt, so liegt einer der drei Pole ausserhalb beider, und in jedem der Kegelschnitte liegt einer der beiden anderen; eine der drei Polaren schneidet beide, und jede der beiden anderen nur einen, nämlich denjenigen, welchen die andere nicht schneidet; und c) wenn sie sich in vier Punkten durchdringen, so liegen die drei Pole und Polaren entweder wie im Falle a) oder wie im Falle b). Haben sie endlich nur zwei Durchschnittspunkte oder Tangenten gemein, so giebt es in ihrer Ebene nur einen, aber allemal einen Punkt, dessen harmonische Polaren in Bezug auf beide zusammenfallen; und dieser Punkt liegt ausserhalb beider.

Man sieht leicht voraus, dass die Punkte p, p_1, p_2 und die Geraden P, P_1, P_2 ganz eigenthümliche Eigenschaften in sich vereinigen werden. Denn diese Geraden allein sind es, deren Wechselpunkt-Kegelschnitte sich auf einen Punkt, und jene Punkte allein sind es, deren Wechselstrahlen-Kegelschnitte sich auf eine Gerade reduciren.

Es sei A ein beliebiger Strahl eines dieser Punkte, z. B. p, so liegen seine beiden harmonischen Pole B, B_1 auf P, und die oben betrachteten projektivischen Strahlbüschel B, B_1, deren entsprechende Strahlenpaare $a, b, c, d \ldots$; $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ sich in den Wechselpunkten von A schneiden, sind jetzt offenbar perspectivisch, weil die harmonischen Polaren von p. d. h. zwei entsprechende Strahlen von B, B_1 in eine Gerade BB_1 zusammenfallen.

Der Wechselpunkt-Kegelschnitt von A geht also jetzt in ein System zweier Geraden über, deren eine (P) die harmonischen Pole von A, die andere die Wechselpunkte von A enthält; und zwar ist letztere selbst ein Strahl von p, weil die harmonischen Polaren des Durchschnittes von A und P durch p gehen müssen. Aehnlicher Weise geht der Wechselstrahlen-Kegelschnitt eines Punktes von P in ein System zweier Punkte über, deren einer (p) die harmonischen Polaren jenes Punktes, der andere die Wechselstrahlen desselben enthält, und dieser liegt auch auf P.

Zwei Strahlen eines Punktes p, p_1, p_2, deren Punkte paarweise Wechselpunkte sind, sollen **zwei Wechselpunktstrahlen**, und zwei Punkte einer Geraden P, P_1, P_2, deren Strahlen paarweise Wechselstrahlen bilden **zwei Wechselstrahlenpunkte** heissen.

Aus dem Vorigen ergiebt sich eine lineäre Construktion des Punktes p, wenn K, K_1 und ein beliebiger Strahl von p gegeben sind.

Es sei jetzt A eine beliebige Gerade, und B, B_1 seien ihre harmonischen Pole für K, K_1; durch p seien die Strahlen a, b, c, $d \ldots$ gezogen, welche A in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ schneiden, und durch denselben Punkt nach den Wechselpunkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ die Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$; endlich werde entweder B oder B_1 mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ durch die Strahlen $a', b', c', d' \ldots$ und $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots$ verbunden; so ist einmal

$$p(a, b, c, d \ldots) \equiv B(a', b', c', d' \ldots),$$

Digitized by Google

sodann

$$B(a', b', c', d' \ldots) = B(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots),$$

weil die Strahlenpaare a', a'_1; b', b', ..., als zugeordnete harmonische Polaren für K, eine Involution bilden; endlich ist

$$B(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots) = p(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots),$$

weil die Punkte p, B, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ .... auf dem Wechselpunkt-Kegelschnitte von A liegen. Demnach ist auch

$$p(a, b, c, d \ldots) = p(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots).$$

Aber je zwei Strahlen a, a_1; b, b_1; .... sind Wechselpunktstrahlen; es sind also nicht nur ein Punkt $\mathfrak{a}$, wo a die A, und ein Punkt $\mathfrak{a}_1$, wo a_1 den Wechselpunkt-Kegelschnitt schneidet, sondern auch ein Punkt, wo a_1 die A, und ein Punkt, wo a den Wechselpunkt-Kegelschnitt schneidet, sind Wechselpunkte von einander, d. h. die Strahlen a, a_1 entsprechen sich in doppeltem Sinne; also ist

$$p(a, b, c, d \ldots a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) = p(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots a, b, c, d \ldots);$$

d. h. die Wechselpunktstrahlen eines Punktes p, p_1, p_2 für K, K_1 bilden eine Involution von Strahlen; und gleicher Weise bilden die Wechselstrahlenpunkte einer Geraden P, P_1, P_2 eine Involution von Punkten.

Die Hauptstrahlen einer Involution von Wechselpunktstrahlen sollen Hauptwechselpunktstrahlen, und die Hauptpunkte einer Involution von Wechselstrahlenpunkten sollen Hauptwechselstrahlenpunkte heissen. In jedem der ersteren fallen zwei Wechselpunktstrahlen, in jedem der letzteren zwei Wechselstrahlenpunkte zusammen; jener besitzt also die charakteristische Eigenschaft, dass die Wechselpunkte aller seiner Punkte auf ihm selber liegen; dieser die, dass alle seine Strahlen ihre Wechselstrahlen in ihm selber schneiden. Man kann daher als sekundäre Definition der Hauptwechselpunktstrahlen und der Hauptwechselstrahlenpunkte aufstellen, dass die zugeordneten harmonischen Pole der einen, und die zugeordneten harmonischen Polaren der anderen in Bezug auf den einen Kegelschnitt es zugleich auch in Bezug auf den anderen sind, und insofern könnte man einen jeden Hauptwechselpunktstrahl eine Gerade vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Pole beider Kegelschnitte, und jeden Hauptwechselstrahlenpunkt einen Mitelpunkt vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Polaren beider Kegelschnitte nennen. Fasst man endlich die Hauptpunkte der Involution jener Pole, und die Hauptstrahlen der Involution dieser Polaren ins Auge, so begreift man, dass die harmonischen Polaren eines solchen Hauptpunktes (wenn er existirt) in Bezug auf K und K_1 durch diesen Punkt selber gehen, und dass die harmonischen Pole eines solchen Hauptstrahles auf ihm selber liegen müssen, d. h. ersterer ist ein Durchschnittspunkt, letzterer eine Tangente beider Kegelschnitte. Als tertiäre Definition der Hauptwechselpunktstrahlen und der Hauptwechselstrahlenpunkte ergiebt sich daher, dass jene gemein-

schaftliche Sekanten, diese gemeinschaftliche Tangentendurchschnitte beider Kegelschnitte sind; und zwar heissen sie reell und ideal, jenachdem jene Hauptpunkte und Hauptstrahlen existiren, oder nicht.

Zu jeder Involution von Wechselpunktstrahlen gehören nicht nur zwei der Geraden P, P_1, P_2, sondern auch die beiden harmonischen Polaren N, N_1; N', N'_1 eines jeden Hauptwechselstrahlenpunktes s, s', welcher der dritten angehört. Denn sind a, a_1 zwei beliebige Wechselstrahlen des Punktes s, deren jeder also die harmonischen Pole des anderen enthält, und schneidet a die N in $\mathfrak{a}$, a_1 die N_1 in $\mathfrak{a}_1$, so ist $\mathfrak{a}_1$ der harmonische Pol von a für K_1, weil dieser Pol auch auf der harmonischen Polare N_1 von s für K_1 liegt; und ebenso ist $\mathfrak{a}$ der harmonische Pol von a_1 für K; also schneiden sich die harmonischen Polaren von $\mathfrak{a}$ für K, K_1 im Punkte $\mathfrak{a}_1$, und somit sind N, N_1, da sie nach zwei Wechselpunkten gehen, Wechselpunktstrahlen des betreffenden Punktes p, p_1, p_2.

Gleicher Weise gehören zu jeder Involution von Wechselstrahlenpunkten einer Geraden P, P_1, P_2 nicht nur zwei der Punkte p, p_1, p_2, sondern auch die beiden harmonischen Pole n, n_1; n', n'_1 eines jeden Hauptwechselpunktstrahles S, S_1, welcher dem dritten angehört.

Jedes Paar Hauptwechselpunktstrahlen eines Punktes p, p_1, p_2 heisst ein Paar zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten, und jedes Paar Hauptwechselstrahlenpunkte einer Geraden P, P_1, P_2 heisst ein Paar zugeordnete gemeinschaftliche Tangentendurchschnitte; und wieder heisst ein Paar der ersteren einem Paare der letzteren zugeordnet, wenn jenes einem Punkte p, und dieses einer Geraden P zugehört, welche die harmonische Polare von p für K, K_1 ist.

Es ist nun die Frage, ob zwei Kegelschnitte 1) jedesmal ein Paar zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten oder Tangentendurchschnitte, und 2) ob auch jedesmal zwei zugeordnete Paare zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten und Tangentendurchschnitte besitzen?

1) Fasst man alle Eigenschaften eines Punktes p, p_1, p_2 zusammen, so erweist er sich als gemeinschaftlicher Mittelpunkt von vier Involutionen von Strahlen: a) der zugeordneten harmonischen Polaren für K; b) der zugeordneten harmonischen Polaren für K_1; c) der Wechselpunktstrahlen für K, K_1; d) derjenigen Strahlenpaare, welche nach den Wechselstrahlenpunkten der entsprechenden Geraden P, P_1, P_2 gehen. Zu jeder von diesen vier Involutionen gehören die beiden Geraden P_1, P_2; P, P_2; P, P_1 als zugeordnetes Paar. Da nun zwei Gerade P_1, P_2 nothwendig existiren, wenn eine oder zwei der Involutionen, denen sie angehören, gleichliegende Gebilde enthält, und nur dann möglicher Weise nicht, wenn alle vier Involutionen aus ungleichliegenden Gebilden bestehen; und da sie in zwei Kegelschnitten, welche nur zwei Punkte und Tangenten gemein haben, in der That nicht vorhanden sind, so müssen in diesem Falle alle jene vier Involutionen aus ungleichliegenden Gebilden bestehen, und demnach eine jede ihre Hauptstrahlen besitzen. Solche Kegelschnitte haben also zwei gemeinschaftliche Sekanten, und aus ähnlichen Gründen zwei denselben zugeordnete gemeinschaftliche Tangentendurchschnitte; doch ist natürlich die eine und der eine reell, die anderen ideal.

Besitzen die Kegelschnitte drei Punkte p, p_1, p_2, und man stellt sich irgend einen innerhalb des Dreiecks pp_1p_2 liegenden

Punkt a vor, so liegt sein Wechselpunkt a_1 entweder a) ebenfalls innerhalb desselben, oder doch b) innerhalb eines seiner Winkel. Im Fall a) erhält man drei Paar Wechselpunktstrahlen pa, pa_1; p_1a, p_1a_1; p_2a, p_2a_1, deren jedes das concentrische Strahlenpaar P_1, P_2; P, P_2; P, P_1 ausschliesst; und im Falle b) schliesst allemal eines, aber auch nur eines der drei ersteren eines der drei letzteren aus. Da nun diese ebenfalls Wechselpunktstrahlen sind, so sind im Falle a) alle drei Involutionen der Wechselpunktstrahlen aus ungleichliegenden Gebilden zusammengesetzt, und es giebt also drei Paar zugeordneter gemeinschaftlicher Sekanten, welche sämmtlich reell sind, im Falle b) dagegen giebt es aus demselben Grunde allemal ein Paar zugeordneter gemeinschaftlicher Sekanten, aber nur eines; und da dieser Fall nur solche Kegelschnitte betreffen kann, welche keinen Punkt gemein haben, so ist jede von beiden ideal und geht somit durch einen ausserhalb beider Kegelschnitte gelegenen Punkt p.

Ebenso zeigt man mittels einer beliebigen Geraden α, die alle Seiten des Dreiecks pp_1p_2 ausserhalb desselben schneidet, und ihres Wechselstrahls α_1, welcher nothwendig entweder alle 3 Seiten oder nur eine ausserhalb des Dreiecks schneidet, dass zwei beliebige Kegelschnitte entweder drei Paar zugeordneter gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, welche sämmtlich reell sind, oder nur ein einziges besitzen, dessen Punkte beide ideal sind und einer beide Kegelschnitte durchschneidenden Geraden P angehören.

2) Diese Frage betrifft nur noch den Fall, wenn drei Punkte p, p_1, p_2 und drei Gerade P, P_1, P_2 vorhanden sind. Geht durch p eine reelle oder ideale gemeinschaftliche Sekante S, und sind pn, pn_1 die zugeordneten harmonischen Polaren von S für K, K_1, so haben die Geraden P_1, P_2, welche ebenfalls zugeordnete harmonische Polaren für K und K_1 sind, a) wenn p innerhalb K und K_1 liegt, sowohl zu S und pn als zu S und pn_1 eine abwechselnde Lage; b) wenn p ausserhalb K und K_1 liegt, so schliessen P_1, P_2 sowohl S und pn als S und pn_1 aus oder ein; c) wenn p innerhalb K und ausserhalb K_1, so liegen P_1, P_2 zu S und pn abwechselnd, zu S und pn_1 aus- oder einschliessend. In den beiden Fällen a) und b) müssen also die Geraden P_1, P_2 die Geraden pn und pn_1, und folglich auch die Punkte p_1, p_2 die harmonischen Pole n, n_1 von S aus- oder einschliessen, im Falle c) dagegen liegen P_1, P_2 zu pn, pn_1, und somit auch p_1, p_2 zu n, n_1 abwechselnd. Aber p_1, p_2 und n, n_1 sind zwei Paar Wechselstrahlenpunkte von P; also giebt es in den Fällen a) und b) allemal, und im Falle c) nie ein der Sekante S zugeordnetes Paar gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte.

Haben also K, K_1 vier Punkte gemein, so besitzen sie entweder drei Paar zugeordnete gemeinschaftliche Tangentendurchschnitte und somit vier gemeinschaftliche Tangenten. oder nur ein solches Paar und folglich keine gemeinschaftlichen Tangenten, jenachdem zwei der Punkte p, p_1, p_2 ausserhalb und der dritte innerhalb beider Kegelschnitte, oder nur einer ausserhalb beider, ein zweiter nur innerhalb K und ausserhalb K_1, der dritte innerhalb K_1 und ausserhalb K liegt.

Haben sie dagegen keinen Punkt gemein, so besitzen sie nur zwei gemeinschaftliche Sekanten, deren Durchschnitt p ausserhalb beider Kegelschnitte liegt, also jedesmal ein diesen Sekanten zugeordnetes Paar gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, welche,

wenn die Kegelschnitte ausser einander liegen, beide reell, wenn aber der eine den anderen einschliesst, beide ideal sein müssen.

Andererseits ergiebt sich, dass jedem Paare gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, deren Verbindungslinie P beide Kegelschnitte durchschneidet oder beide nicht durchschneidet, ein Paar gemeinschaftliche Sekanten zugeordnet sind, dass aber solche nicht existiren, wenn P den einen schneidet, den andern nicht; dass daher zwei Kegelschnitte mit vier gemeinschaftlichen Tangenten entweder drei Paar reelle gemeinschaftliche Sekanten oder nur ein Paar ideale besitzen, jenachdem zwei der Geraden P, P_1, P_2 beide Kegelschnitte durchsetzen und die dritte keinen, oder nur eine beiden begegnet, und jede der beiden anderen nur einem; und dass endlich zwei Kegelschnitte, welche keine gemeinschaftliche Tangente haben, allemal wenigstens ein Paar gemeinschaftliche Sekanten besitzen, welche solchen gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitten zugeordnet sind, deren Verbindungslinie beide Kegelschnitte schneidet.

5. Sind in einer Ebene zwei Kegelschnitte von beliebiger Gestalt und Lage gegeben, so giebt es in dieser Ebene

a) allemal entweder drei oder wenigstens einen Punkt, dessen Strahlen paarweise Wechselpunktstrahlen bilden, d. h. solche Strahlenpaare, deren jedes lauter Wechselpunkte enthält.	a) allemal entweder drei oder wenigstens eine Gerade, deren Punkte paarweise Wechselstrahlenpunkte bilden, d. h. solche Punktenpaare, deren jedes lauter Wechselstrahlen enthält.
b) Diese Wechselpunktstrahlen bilden eine Involution von Strahlen, und diese besteht, wenn sie die einzige ist, allemal aus ungleichliegenden Gebilden, und wenn ihrer drei vorhanden sind, so besteht entweder eine jede derselben, oder nur eine, deren Mittelpunkt ausserhalb beider Kegelschnitte liegt, aus solchen Gebilden.	b) Diese Wechselstrahlenpunkte bilden eine Involution von Punkten, und diese besteht, wenn sie die einzige ist, allemal aus ungleichliegenden Gebilden, und wenn ihrer drei vorhanden sind, so besteht entweder eine jede derselben oder nur eine, deren Richtungslinie beide Kegelschnitte durchschneidet, aus solchen Gebilden.
c) Die Hauptstrahlen einer solchen Involution oder die Hauptwechselpunktstrahlen sind zwei Gerade, von denen eine jede lauter Wechselpunkte enthält. Daher ist ein jeder Hauptwechselpunktstrahl eine Gerade vereinigter Paare zugeordneter harmonischer	c) Die Hauptpunkte einer solchen Involution oder die Hauptwechselstrahlenpunkte sind zwei Punkte, von denen ein jeder lauter Wechselstrahlen enthält. Daher ist ein jeder Hauptwechselstrahlenpunkt ein Mittelpunkt vereinigter Paare zugeordneter harmo-

Digitized by Google

Pole, d. h. deren Punkte paarweise zugeordnete harmonische Pole in Bezug auf beide Kegelschnitte zugleich sind. Endlich ist jeder Hauptpunkt einer Involution vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Pole ein beiden Kegelschnitten gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt, und insofern ist jeder Hauptwechselpunktstrahl, jenachdem er einem der Kegelschnitte begegnet oder nicht, eine reelle oder ideale gemeinschaftliche Sekante derselben.

nischer Polaren, d. h. dessen Strahlen paarweise zugeordnete harmonische Polaren in Bezug auf beide Kegelschnitte zugleich sind. Endlich ist jeder Hauptstrahl einer Involution vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Polaren eine beiden Kegelschnitten gemeinschaftliche Tangente, und insofern ist jeder Hauptwechselstrahlenpunkt, jenachdem er ausserhalb oder innerhalb eines der Kegelschnitte liegt, ein reeller oder idealer gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitt derselben.

d) Einer jeden Involution von Wechselpunktstrahlen ist eine Involution von Wechselstrahlenpunkten zugeordnet, deren Richtungslinie die harmonische Polare des Mittelpunktes der ersteren in Bezug auf beide Kegelschnitte ist. Diese letztere besteht aus ungleichliegenden Gebilden, wenn die erstere entweder aus ungleichliegenden besteht, und ihr Mittelpunkt innerhalb oder ausserhalb beider Kegelschnitte liegt; oder wenn die erstere aus gleichliegenden besteht, und ihr Mittelpunkt innerhalb des einen und ausserhalb des anderen Kegelschnittes liegt; in jedem anderen Falle dagegen besteht die letztere aus gleichliegenden Gebilden.

d) Einer jeden Involution von Wechselstrahlenpunkten ist eine Involution von Wechselpunktstrahlen zugeordnet, deren Mittelpunkt der harmonische Pol der Richtungslinie der ersteren in Bezug auf beide Kegelschnitte ist. Diese letztere besteht aus ungleichliegenden Gebilden, wenn die erstere entweder aus ungleichliegenden besteht, und ihre Richtungslinie beide Kegelschnitte durchschneidet oder nicht durchschneidet, oder wenn die erstere aus gleichliegenden besteht, und ihre Richtungslinie den einen Kegelschnitt durchschneidet, den anderen nicht; in jedem anderen Falle dagegen besteht die letztere aus gleichliegenden Gebilden.

e) Zu jeder Involution von Wechselpunktstrahlen gehören als zugeordnete Strahlen die beiden Geraden, welche in Bezug auf beide Kegelschnitte zuge-

e) Zu jeder Involution von Wechselstrahlenpunkten gehören als zugeordnete Punkte die beiden Punkte, welche in Bezug auf beide Kegelschnitte

ordnete harmonische Polaren sind, und ausserdem die beiden harmonischen Polaren eines jeden Hauptwechselstrahlenpunktes der der ersteren zugeordneten Involution in Bezug auf beide Kegelschnitte, wenn er existirt.

zugeordnete harmonische Pole sind, und ausserdem die beiden harmonischen Pole eines jeden Hauptwechselpunktstrahles der der ersteren zugeordneten Involution in Bezug auf beide Kegelschnitte, wenn er existirt.

6. Sind in einer Ebene zwei Kegelschnitte von beliebiger Gestalt und Lage gegeben, so besitzen dieselben:

a) wenn sie vier Punkte gemein haben, drei reelle Paare zugeordneter gemeinschaftlicher Sekanten, und entweder drei reelle Paare zugeordneter gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, oder nur ein solches und zwar ideales Paar, welches demjenigen der drei ersteren zugeordnet ist, dessen gegenseitiger Durchschnitt ausserhalb beider Kegelschnitte liegt; b) wenn sie bloss zwei Punkte gemein haben, so besitzen sie allemal nur ein einziges Paar gemeinschaftlicher Sekanten, wovon die eine reell, die andere ideal ist, und nur ein einziges und zwar ein dem ersteren zugeordnetes Paar gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, wovon der eine reell, der andere ideal ist; c) wenn sie keinen Punkt gemein haben, so besitzen sie nur ein einziges und zwar ideales Paar gemeinschaftlicher Sekanten, und entweder drei reelle Paare gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte oder nur ein solches und zwar ideales Paar, welches dem ersteren zugeordnet ist, und dessen Verbindungslinie beide Kegelschnitte durchschneidet,

a) wenn sie vier Tangenten gemein haben, drei reelle Paare zugeordneter gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, und entweder drei reelle Paare zugeordneter gemeinschaftlicher Sekanten, oder nur ein solches und zwar ideales Paar, welches demjenigen der drei ersteren zugeordnet ist, dessen Verbindungslinie beide Kegelschnitte durchschneidet; b) wenn sie bloss zwei Tangenten gemein haben, so besitzen sie allemal nur ein einziges Paar gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, wovon der eine reell, der andere ideal ist, und nur ein einziges und zwar ein dem ersteren zugeordnetes Paar gemeinschaftlicher Sekanten, wovon die eine reell, die andere ideal ist; c) wenn sie keine Tangente gemein haben, so besitzen sie nur ein einziges und zwar ideales Paar gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, und entweder drei reelle Paare gemeinschaftlicher Sekanten, oder nur ein solches und zwar ideales Paar, welches dem ersteren zugeordnet ist, und dessen gegenseitiger Durchschnitt ausserhalb beider Kegel-

jenachdem die Kegelschnitte völlig aussereinander oder ineinander liegen. schnitte liegt, jenachdem die Kegelschnitte sich durchdringen oder nicht.

Mit Hülfe der gegebenen Sätze wird man nun leicht die Auflösung folgender Aufgabe finden.

7. Mittels des Lineals und eines festen Kreises die gemeinschaftlichen Sekanten und Tangentendurchschnitte zweier Kegelschnitte, von denen ein jeder durch fünf Punkte oder fünf Tangenten beliebig in einer Ebene gegeben ist, zu finden, wenn

a) irgend einer der Punkte p, p_1, p_2; b) wenn irgend ein Strahl eines dieser Punkte; c) wenn irgend ein Punkt einer reellen oder idealen gemeinschaftlichen Sekante, der aber kein Durchschnittspunkt beider Kegelschnitte sein darf, bekannt ist.

a) irgend eine der Geraden P, P_1, P_2; b) wenn irgend ein Punkt einer dieser Geraden; c) wenn irgend ein Strahl eines reellen oder idealen gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes, der aber keine gemeinschaftliche Tangente sein darf, bekannt ist.

Umgekehrt darf man behaupten, dass jede Gerade, deren sämmtliche Punkte paarweise Wechselpunkte in Bezug auf zwei Kegelschnitte bilden, eine reelle oder ideale gemeinschaftliche Sekante derselben, und dass jeder Punkt, dessen Strahlen paarweise Wechselstrahlen bilden, ein reeller oder idealer gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitt derselben sei. Denn jene Gerade S' schneidet zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten von K, K_1 entweder im Punkte p, und dann fällt sie, als Vereinigung zweier Wechselpunktstrahlen, nothwendig mit einer von beiden zusammen, oder sie schneidet jede in zwei besondern Punkten, und dann ist jeder dieser Punkte ein gemeinschaftlicher Durchschnitt der Kegelschnitte, also S' eine gemeinschaftliche Sekante; oder fiele einer derselben nicht mit seinem Wechselpunkte zusammen, so würde letzterer sowohl auf S' als auf einer gemeinschaftlichen Sekante liegen, also wiederum S' mit einer gemeinschaftlichen Sekante zusammenfallen.

Besondere Fälle.

Sind je zwei zugeordnete Durchmesser eines Kegelschnittes denen eines anderen parallel, was offenbar der Fall ist, wenn es von zwei Paaren allein gilt (§. 1. *e*), so ist die unendlich-entfernte Gerade ihrer Ebene eine Gerade vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Pole, also eine gemeinschaftliche Sekante der Kegelschnitte, und umgekehrt. Sind aber A, A_1; B, B_1 zwei Paar zugeordnete Durchmesserlängen des einen, und a, a_1; b, b_1 die Längen der ihnen parallelen Durchmesser des anderen, so ist

kraft §. 4.*) $A : A_1 = a : a_1$ und $B : B_1 = b : b_1$, also auch $A . A_1 : a . a_1 = A^2 : a^2$; $B . B_1 : b . b_1 = B^2 : b^2$, und nach §. 4. 6. ist $A . A_1 : B . B_1 = a . a_1 : b . b_1$; also $A : a = B : b = C : c$ u. s. w., d. h. die Kegelschnitte sind ähnliche und ähnlich-liegende Figuren; und umgekehrt.

8. **Je zwei ähnliche und ähnlich-liegende Ellipsen oder Hyperbeln haben beziehlich eine unendlich-entfernte ideale oder reelle Sekante gemein.**

9. **Zwei in einer Ebene beliebig liegende Kreise haben eine unendlich-entfernte ideale Sekante gemein.**

Sind die Achsen zweier Parabeln parallel, so haben sie nicht nur die unendlich-entfernte Tangente, sondern auch deren Berührungspunkt gemein; da nun die harmonische Polare jedes Punktes einer Tangente durch den Berührungspunkt geht, so folgt auch für diese Art Kegelschnitte:

10. **Zwei in einer Ebene beliebig, aber mit parallelen Achsen liegende Parabeln haben eine unendlich-entfernte Sekante gemein, welche zugleich deren gemeinschaftliche Tangente ist.**

Die zugeordneten harmonischen Polaren eines Brennpunktes sind zu einander rechtwinklig, also bildet jedes Paar derselben in zwei Kegelschnitten, welche einen Brennpunkt gemein haben, zwei Wechselstrahlen:

11. **Fällt ein Brennpunkt eines Kegelschnittes mit dem eines andern zusammen, so ist er ein idealer gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitt derselben.**

Es möge jetzt eine beliebige Gerade A zwei beliebige Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ und zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten S, S_1 derselben in den Punkten $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ schneiden; so giebt es, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ nicht etwa abwechselnd liegen, allemal zwei Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, die sowohl mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ als mit $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ harmonisch sind. Solche zwei Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sind aber Wechselpunkte für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, also die Strahlen, welche sie mit dem Durchschnitte p von S, S_1 verbinden, Wechselpunktstrahlen; woraus folgt, dass $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ auch mit $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ harmonisch, folglich die Punktenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{s}. \mathfrak{s}_1$ eine Involution von sechs Punkten bilden. Haben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ keinen Punkt gemein, so schliessen die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ einander ein oder aus, und das nämliche gilt von den Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte gezogen werden.

---

*) Denn nach der dortigen Bezeichnung ist

$$A^2{}_1 : B^2{}_1 = M\mathfrak{a}^2 . \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} : M\mathfrak{a}^2{}_1 . \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} = \frac{M\mathfrak{a}^2}{M\mathfrak{m}^2} . \frac{M\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}\mathfrak{a}} : \frac{M\mathfrak{a}^2{}_1}{M\mathfrak{m}^2} . \frac{M\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1},$$

also wenn α, α_1 die Winkel sind, welche A_1, B_1 mit der Achse $M\mathfrak{m}$ bilden: $A^2{}_1 : B^2{}_1 = \frac{\cot . \alpha}{\cos^2 . \alpha} : \frac{\cot . \alpha_1}{\cos^2 . \alpha_1} = \sin \alpha_1 . \cos \alpha_1 : \sin \alpha . \cos \alpha = \sin 2\alpha_1 : \sin 2\alpha$; (und ebenso ist rechts $\mathrm{tng}^2 . \alpha : \mathrm{tng}^2 . \alpha_1 = M\mathfrak{a}_1 : M\mathfrak{a}$). Nach der jetzigen Bezeichnung also ist $A^2 : A^2{}_1 = \sin . 2\alpha_1 : \sin . 2\alpha = a^2 : a^2{}_1$.

Der Fall, dass diese Punkte oder Tangenten abwechselnd liegen, kann also nur dann eintreten, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ vier oder nur zwei Punkte gemein haben.

Es seien B, B_1 irgend zwei den Kegelschnitten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gemeinschaftliche Punkte; durch B sei eine beliebige Gerade gelegt, welche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zum andernmal in B_2, B_3 schneidet, und durch B_1 die Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 …., welche $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ …. und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$…. schneiden; endlich gehen von B_2 nach $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$…. die Strahlen a_2, b_2, c_2, d_2 …., und von B_3 nach $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$…. die Strahlen a_3, b_3, c_3, d_3 ….; diess vorausgesetzt, so ist

$$B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) = B_3(a_3, b_3, c_3, d_3 \ldots),$$

also

$$B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots) = B_3(a_3, b_3, c_3, d_3 \ldots).$$

Aber derjenige Strahl e_1 von B_1, welcher mit BB_1 zusammenfällt, schneidet $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in zwei Punkten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, welche sich in B vereinigen; also fallen auch die Strahlen e_2, e_3 mit B_2B_3 zusammen. Die Strahlbüschel B_2, B_3 sind also perspektivisch, d. h. je zwei Strahlen a_2, a_3; b_2, b_3 …. schneiden sich auf einer Geraden S_1.

Ist nun A eine beliebige Gerade, welche $\mathfrak{A}$ in B_2, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}^o$, $\mathfrak{b}^o{}_1$, ferner BB_1 oder S in $\mathfrak{s}$ und $B_2\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{s}_1$ schneidet, so bilden die drei Punktenpaare B_2, $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}^o$, $\mathfrak{b}^o{}_1$; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$, als Durchschnitte von A mit $\mathfrak{B}$ und den Gegenseiten des dem $\mathfrak{B}$ eingeschriebenen Vierecks $BB_1\mathfrak{a}_1B_3$, eine Involution von sechs Punkten*).

*) Ist nämlich B_2 ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes K, und sind (BB') und B_1 zwei beliebige Punkte von K; sind ferner α, α_1; β, β_1; γ, γ_1; δ, δ_1 …. die Durchschnitte von K mit beliebigen Geraden, welche von B_2 ausgehen, und haben diese Punkte mit (BB') die Strahlenpaare a, a'; b, b'; c, c'; d, d' …., und insbesondere die Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1 …. mit B_1 die Strahlen a_1, b_1, c_1, d_3 …. gemein, so hat man nach §. 3. 3. und Einl. 11.

$$B(a, b, c, d \ldots) = B'(a', b', c', d' \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots).$$

Wird nun eine beliebige, durch B_2 gehende Gerade (AA_1) von a, b, c, d ….; a_1, b_1, c_1, d_1 …. beziehlich in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ….; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ …. geschnitten, so hat man

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots).$$

Aber auf A entspricht dem Punkte $\mathfrak{f}$, welcher mit B einerlei ist, ein Punkt $\mathfrak{f}_1$ auf A_1, welcher der Linie BB_1 angehört, und dem Punkte φ auf A, welcher mit $\mathfrak{f}_1$ zusammenliegt, entspricht auf A_1 ein mit $\mathfrak{f}$ zusammenliegender Punkt φ_1; also ist

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots),$$

woraus obiger Satz sich sofort ergiebt. Aber noch mehr. Sieht man z. B. den Punkt $\mathfrak{a}_1$ als der A zugehörig an, zieht $B\mathfrak{a}_1$ oder a^o, welcher Strahl K in α^o schneidet, sofort die Gerade $B_2\alpha^o$, welche K wieder in $\alpha^o{}_1$ schneidet, endlich den Strahl $B_1\alpha^o{}_1$ oder $a^o{}_1$, so muss $a^o{}_1$

Aber der Punkt $\mathfrak{s}_1$ gehört auch der Geraden S_1 an, welche durch Drehung der Geraden $B_2\mathfrak{a}$ und $B_2\mathfrak{a}_1$ um die Punkte B_2, B_1 erzeugt wird; und offenbar lassen sich immer durch B_2 zwei Gerade A so legen, dass die Punkte B_2, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ sich ein- oder ausschliessen, und zugleich die Punkte $\mathfrak{b}^0$, $\mathfrak{b}^0{}_1$ existiren — es braucht nur B_2 innerhalb $\mathfrak{B}$ zu liegen — also würden für diese zwei Geraden A die Punkte $\mathfrak{s}_1$ sowohl auf S_1 als auf der zugeordneten gemeinschaftlichen Sekante von BB_1 liegen müssen, und demnach diese letztere mit S_1 identisch sein.

Ebenso behandelt man andrerseits den Fall, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ vier oder zwei Tangenten gemein haben; und was denjenigen betrifft, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ vier Punkte, aber keine Tangente gemein haben, so überzeugt man sich leicht, dass die zwei Tangentenpaare, welche von einem beliebigen Punkte an solche zwei Kegelschnitte gelegt werden, sich ein- oder ausschliessen müssen. Denn denkt man sich den Polar-Kegelschnitt $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{B}$ in Bezug auf $\mathfrak{A}$, so können $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_1$ keinen Punkt gemein haben, weil $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keine gemeinschaftliche Tangente besitzen; heissen nun jene zwei Tangentenpaare a, a_1; b, b_1, und sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ deren harmonische Pole für $\mathfrak{A}$, so liegen diese in einer Geraden, und zwar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ auf $\mathfrak{B}_1$; folglich schliessen sich diese Punktenpaare ein oder aus, und demnach gilt dasselbe auch von a, a_1; b, b_1, weil die harmonischen Polaren aller Punkte einer Geraden für $\mathfrak{A}$ einen mit dieser Geraden projektivischen Strahlbüschel bilden.

12. Die drei Punktenpaare, in welchen zwei Kegelschnitte von beliebiger Gestalt und Lage und zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten derselben von einer beliebigen Geraden geschnitten werden, bilden eine Involution von sechs Punkten.

12. Die drei Strahlenpaare, welche von einem beliebigen Punkte an zwei Kegelschnitte von beliebiger Gestalt und Lage, als Tangenten, und nach zwei zugeordneten gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitten derselben gezogen werden, bilden eine Involution von sechs Strahlen.

Ich übergehe die Corollare dieses Satzes.

13. Haben zwei Kegelschnitte zwei Punkte gemein, und man legt durch jeden dieser Punkte eine beliebige Gerade, so schneiden sich die durch diese zwei Geraden bestimmten Sehnen der Kegelschnitte

13. Haben zwei Kegelschnitte zwei Tangenten gemein, und man zieht von einem beliebigen Punkte einer jeden an jeden Kegelschnitt eine neue Tangente, so liegen die gegenseitigen Durchschnitte je zweier

---

durch den Punkt $\mathfrak{a}$ gehen. Die Punkte α, B, α^0, $\alpha^0{}_1$, B_1, α_1 bilden ein dem K eingeschriebenes Sechseck $\alpha B\alpha^0\alpha^0{}_1B_1\alpha_1$, dessen Hauptgegenseiten sich paarweise in drei Punkten B_2, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ einer Geraden schneiden, und offenbar ist dieses Sechseck beliebig.

auf einer gemeinschaftlichen Sekante derselben, welche der durch jene Punkte gehenden zugeordnet ist.

Tangenten desselben Kegelschnitts mit einem gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte derselben, welcher dem der beiden ersten Tangenten zugeordnet ist, in gerader Linie.

---

§. 6.

Construction und Eigenschaften eines Systems von beliebig vielen Kegelschnitten, welche zwei zugeordnete Sekanten oder Tangentendurchschnitte gemein haben. System der zugehörigen Wechselpunkt- oder Wechselstrahlen-Kegelschnitte. Drei Wechsel-Systeme von Kegelschnitten mit zwei zugeordneten gemeinschaftlichen Sekanten oder Tangentendurchschnitten.

1. Sind in einer Ebene ein Kegelschnitt, zwei Gerade und ein Punkt beliebig gegeben, einen zweiten Kegelschnitt zu finden, welcher mit dem ersteren die beiden Geraden als (reelle oder ideale) Sekanten gemein habe und durch den gegebenen Punkt gehe.

1. Sind in einer Ebene ein Kegelschnitt, zwei Punkte und eine Gerade beliebig gegeben, einen zweiten Kegelschnitt zu finden, welcher mit dem ersteren die beiden Punkte als (reelle oder ideale) Tangentendurchschnitte gemein habe und die gegebene Gerade berühre.

Erste Auflösung (links). Es sei 𝔅 der gegebene Kegelschnitt, S, S_1 die gegebenen Geraden, 𝔞 der gegebene Punkt des gesuchten Kegelschnittes 𝔄. Man verbinde den Durchschnitt p von S, S_1 mit 𝔞 durch eine Gerade a, suche die harmonische Polare P von p für 𝔅, welche die a in p' schneide, und zu p, p', 𝔞 den vierten harmonischen, dem 𝔞 zug. Punkt $𝔞_1$; suche zu S, S_1, a den vierten harmonischen, dem a zugeordneten Strahl a', und noch die harmonischen Polaren von 𝔞, $𝔞_1$ für 𝔅, welche a in α, α_1 schneiden. Jetzt verbinde man die Punkte 𝔞 und α, $𝔞_1$ und α_1 durch die Geraden A, A_1, lege durch 𝔞 eine beliebige Gerade, welche 𝔅 in $𝔟$, $𝔟_1$ und S, S_1 in $𝔰$, $𝔰_1$ schneide, suche einen Punkt $𝔞_2$, welcher mit 𝔞 und $𝔟$, $𝔟_1$; $𝔰$, $𝔰_1$ eine Involution von sechs Punkten bildet, und suche einen Kegelschnitt, welcher durch die Punkte 𝔞, $𝔞_1$, $𝔞_2$ gehe und die Geraden A, A_1 berühre; so ist diess der verlangte Kegelschnitt 𝔄.

Beweis. Da A, als Tangente in 𝔞, die harmonische Polare von 𝔞 für 𝔄 ist, und von der harmonischen Polare desselben Punktes für 𝔅 in α geschnitten wird, so sind 𝔞, α, und aus demselben Grunde $𝔞_1$, α_1 Wechselpunkte für 𝔄, 𝔅, und da p, p' harmonisch mit 𝔞, $𝔞_1$, und p' auf der harm. Polare von p für 𝔅 liegt, so sind p, p' ebenfalls Wechselpunkte für 𝔄, 𝔅. Es liegen also drei Paar Wechselpunkte 𝔞, α; $𝔞_1$, α_1; p, p' auf denselben zwei Geraden a, a'; demnach sind a, a' zwei Wechselpunktstrahlen für 𝔄, 𝔅, und p ist

ein Punkt, dessen harmonische Polaren für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sich vereinigen. Die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, da sie beliebig ist, konnte jedenfalls so gewählt werden, dass die Punktenpaare $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ einander und folglich auch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$ ein- oder ausschliessen; also giebt es auf ihr zwei Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, welche sowohl mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$ als mit $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ (und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$) harmonisch, also Wechselpunkte für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind. Somit sind auch die Strahlen g, h, welche p mit $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ verbinden, Wechselpunktstrahlen, und da nun S, S_1 sowohl mit a, a' als mit g, h harmonisch sind, so sind sie zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Zweite Auflösung (links). Man lege durch den gegebenen Punkt $\mathfrak{a}$ beliebig viele Strahlen a_1, a_2, a_3 ...., und suche auf jedem derselben, z. B. auf a_1, einen Punkt $\mathfrak{a}_1$, welcher mit $\mathfrak{a}$ und den Punktenpaaren $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$, wo a_1 den gegebenen Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ und die Geraden S, S_1 schneidet, eine Involution von sechs Punkten bildet; so gehören alle diese Punkte $\mathfrak{a}_1$ u. s. f. dem verlangten Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ an.

Beweis. Da durch die erste Auflösung bewiesen, dass der Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ existirt, so sind, wenn $\mathfrak{A}$ den Strahl a_1 zum zweitenmal in $\mathfrak{a}_{,,}$ schneidet, sowohl $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{,,}$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ als auch $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ in Involution, also $\mathfrak{a}_{,,}$ mit $\mathfrak{a}_1$ identisch u. s. w. Zugleich sieht man, dass nur ein einziger Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ existirt.

2. Wird ein ebener Strahlbüschel von einem beliebigen Kegelschnitte und von zwei festen Geraden geschnitten, so gehören alle Punkte, welche mit dem Mittelpunkte des Strahlbüschels, als zugeordnetem Punkte, und mit den jedesmaligen zwei Punktenpaaren des Kegelschnittes und der festen Geraden Involutionen von sechs Punkten bilden, dem Umfange eines zweiten Kegelschnittes an, welcher mit ersterem die beiden festen Geraden als reelle oder ideale Sekanten gemein hat und durch den Mittelpunkt des Strahlbüschels geht.

2. Alle Geraden, welche mit einer beliebig gegebenen Geraden, als zugeordnetem Strahle, mit zwei Tangenten eines beliebig gegebenen Kegelschnittes und mit zwei nach zwei festen Punkten gehenden Geraden Involutionen von sechs Strahlen bilden, umhüllen einen zweiten Kegelschnitt, welcher mit ersterem die zwei festen Punkte als reelle oder ideale Tangentendurchschnitte gemein hat und die gegebene Gerade berührt.

Aus §. 5. 12. folgt nun ohne Weiteres:

3. Hat eine Schaar von Kegelschnitten mit einem und demselben Kegelschnitte dieselben zwei zugeordneten reellen oder idealen Sekanten gemein, so bilden sämmtliche Punktenpaare, in denen diese

3. Hat eine Schaar von Kegelschnitten mit einem und demselben Kegelschnitte dieselben zwei zugeordneten reellen oder idealen Tangentendurchschnitte gemein, so bilden sämmtliche Tangenten-

Kegelschnitte und Sekanten eine beliebige Gerade schneiden, eine Involution von Punkten, deren Hauptpunkte allemal zweien die Gerade berührenden Kegelschnitten angehören; und desshalb hat jeder Kegelschnitt dieser Schaar mit jedem jene zwei Sekanten gemein.

paare, welche von einem beliebigen Punkte an dieselben, nebst den Geraden, welche nach den gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitten gehen, eine Involution von Strahlen, deren Hauptstrahlen allemal zwei durch jenen Punkt gehende Kegelschnitte berühren; und desshalb hat jeder Kegelschnitt dieser Schaar mit jedem jene zwei Tangentendurchschnitte gemein.

Aus diesem Satze wieder ergiebt sich sehr leicht:

4. Die harmonischen Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf eine Schaar von Kegelschnitten, welche mit einander dieselben zwei zugeordneten Sekanten gemein haben, schneiden sich alle in einem und demselben Punkte, und daher gehen auch alle Durchmesser derselben, deren zugeordnete parallel laufen, durch einerlei Punkt.

4. Die harmonischen Pole einer beliebigen Geraden in Bezug auf eine Schaar von Kegelschnitten, welche mit einander dieselben zwei zugeordneten Tangentendurchschnitte gemein haben, liegen alle auf einer und derselben Geraden; und daher liegen die Mittelpunkte aller dieser Kegelschnitte in einer und derselben geraden Linie.

Ist in der Ebene der (links) in Rede stehenden Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ .... und K eine Gerade A beliebig gegeben, so giebt es allemal unzählige unter ihnen, welche diese Gerade in Punktenpaaren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ .... schneiden; denn jeder Punkt von A bestimmt einen solchen. Es werde nun 1) K ebenfalls von A in zwei Punkten $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$ geschnitten (oder in einem Punkte berührt); von einem beliebigen Punkte B des K gehen nach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ .... $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$ die Strahlenpaare a, a_1; b, b_1 .... k, k_1, welche K zum zweitenmal in α, α_1; β, β_1 .... $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$ schneiden; so bilden diese Strahlenpaare eine Involution von Strahlen; folglich gehen sämmtliche Sehnen $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ .... und A durch einerlei Punkt q (§. 3. 4.). Sind nun jene Punktenpaare ungleichliegend, so schneidet die harmonische Polare von q für K diesen Kegelschnitt in zwei Punkten ε, φ, und die Strahlen e, f des Strahlbüschels B, welche nach ε, φ gehen, sind mit je zwei Strahlen a, a_1; b, b_1 ...., also auch die Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, wo dieselben der A begegnen, mit je zwei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ .... harmonisch, d. h. $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ sind zwei Wechselpunkte auf A für sämmtliche Kegelschnitte. Wird aber 2) K von A weder geschnitten noch berührt, so sind die zugeordneten harmonischen Pole von A für K nothwendig gleichliegend, folglich hat die Involution dieser Pole mit derjenigen für irgend einen andern der Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ .... allemal zwei zugeordnete Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$

Digitized by Google

gemein (§. 3. 5.), und diese sind dann zwei der Geraden A zugehörige Wechselpunkte für sämmtliche Kegelschnitte. Demnach sind auch jetzt die Strahlen e, f, welche B mit $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ verbinden, mit je zwei Strahlen a, a_1; b, b_1 .... harmonisch, und sofort die Gerade $\varepsilon\varphi$ die harmonische Polare eines Punktes q, in welchem sich auch jetzt die Sehnen $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, ... schneiden müssen. Weil aber die Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ zwei zugeordnete harmonische Pole von A für K sind, so ergiebt sich durch Umkehrung des Satzes (§. 4. 2.), dass q als harmonischer Pol von $\varepsilon\varphi$ auf A liegen muss.

5. Hat eine Schaar von Kegelschnitten dieselben zwei zugeordneten reellen oder idealen

Sekanten gemein, und werden alle oder ein Theil derselben von einer Geraden geschnitten, und man zieht von einem beliebigen Punkte eines der Kegelschnitte Strahlenpaare nach je zwei Durchschnittspunkten, so gehen die Sehnen dieses letzteren, welche durch diese Strahlenpaare bestimmt werden, alle durch einen und denselben Punkt, welcher allemal auf jener Geraden liegt, es mag nun diese letztere diesen einen Kegelschnitt durchschneiden, berühren oder gänzlich ausserhalb desselben liegen.

Tangentendurchschnitte gemein, und man zieht von einem beliebigen Punkte an alle oder einen Theil derselben Tangentenpaare und ausserdem an einen der Kegelschnitte eine beliebige Tangente, endlich wieder von je zwei Durchschnittspunkten dieser Tangente mit jenen Tangentenpaaren an den letzteren zwei neue Tangenten, so liegen die Durchschnitte dieser letzteren alle auf einer und derselben Geraden, welche allemal durch jenen Punkt geht, es mag nun dieser Punkt ausserhalb, auf oder innerhalb dieses einen Kegelschnittes liegen.

Aus §. 5. 1. und §. 6. 4. folgert man:

6. Die harmonischen Pole jeder Geraden in Bezug auf eine Schaar von Kegelschnitten, welche dieselben zwei zugeordneten reellen oder idealen Sekanten gemein haben, liegen auf dem Umfange eines einzigen Kegelschnittes.

6. Die harmonischen Polaren eines jeden Punktes in Bezug auf eine Schaar von Kegelschnitten, welche dieselben zwei zugeordneten reellen oder idealen Tangentendurchschnitte gemein haben, umhüllen einen einzigen Kegelschnitt.

7. Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche zwei zugeordnete reelle oder ideale Sekanten gemein haben, liegen auf dem Umfange eines einzigen Kegelschnittes.

7. In einer Schaar von Kegelschnitten, welche zwei zugeordnete reelle oder ideale Tangentendurchschnitte gemein haben, umhüllen alle Durchmesser, deren zugeordnete parallel laufen, einen einzigen Kegelschnitt.

Eine beliebige Gerade A schneide die zugeordneten gemeinschaftlichen Sekanten S, S_1 von 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 ...., welche letztere allemal besitzen, in den Punkten 𝔤, 𝔤₁, so liegen die Wechselpunkte B, B_1 von 𝔤, 𝔤₁ ebenfalls auf S, S_1, und die harmonischen Polaren a, a_1 von 𝔤, 𝔤₁ in Bezug auf irgend einen 𝔄 jener Kegelschnitte gehen, die eine a durch B und den harmonischen Pol α von S, die andere a_1 durch B_1 und den harmonischen Pol α_1 von S_1 für 𝔄; zugleich aber liegt der Durchschnitt 𝔞 von a, a_1 als harmonischer Pol von A für 𝔄, auf dem Wechselpunkt-Kegelschnitte A_1 der Geraden A. Die Punkte α, α_1 und alle ähnlichen β, β_1; γ, γ_1; δ, δ_1 ...., welche den Kegelschnitten 𝔅, ℭ, 𝔇 .... entsprechen, liegen auf der Geraden P, und jedem Punkte 𝔰 dieser Geraden, als harmonischen Pol von S oder S_1 gedacht, entspricht in jenem System ein Kegelschnitt 𝔖 oder 𝔖₁, in Bezug auf welchen er es ist. Ist nun 𝔰 der Durchschnitt von A mit P und zwar der harmonische Pol von S für 𝔖, so ist B der harmonische Pol von A für 𝔖, weil die harmonischen Polaren S, s, s_1 von 𝔰, 𝔤, 𝔤₁ durch einerlei Punkt 𝔰 gehen müssen, der auf A_1 liegt; also ist 𝔰₁ mit BB_1, und s mit B𝔰 identisch, und daher B𝔰 Tangente an A_1 in B. Denkt man sich dagegen denselben Punkt 𝔰 als harmonischen Pol von S_1 für 𝔖₁, so ist B_1 der harmonische Pol von A für 𝔖₁, also jetzt B_1𝔰 Tangente an A_1 in B_1. Demnach liegt der harmonische Pol 𝔰' von BB_1 in Bezug auf A_1 auf der Geraden P; und hieraus folgt nach §. 4. 2. wegen der dem A_1 eingeschriebenen Dreiecke B𝔞B_1, B𝔟B_1 .... B𝔰B_1 ...., dass die Punktenpaare α, α_1; β, β_1; γ, γ_1; δ, δ_1 .... zugeordnete harmonische Pole der Geraden P in Bezug auf A_1, und sofort, weil diese Punkte nur von 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 .... abhängen und mit A_1 sich nicht ändern, es auch in Bezug auf alle anderen Wechselpunkt-Kegelschnitte sein müssen.

8. Hat eine Schaar von Kegelschnitten zwei zugeordnete reelle oder ideale Sekanten gemein, so bilden a) die harmonischen Pole dieser zwei Sekanten in Bezug auf je einen dieser Kegelschnitte eine Involution von Punkten, welche nur dann aus gleichliegenden Gebilden besteht, wenn eine der gemeinschaftlichen Sekanten reell, die andere ideal ist; b) jedes Paar dieser Pole sind zwei zugeordnete harmonische Pole der Geraden P in Bezug auf alle Wechselpunkt-Kegelschnitte, welche zu jener Schaar gehören, und daher haben c) alle diese Wechselpunkt-Kegelschnitte ausser dem Punkte p, wo

8. Hat eine Schar von Kegelschnitten zwei zugeordnete reelle oder ideale Tangentendurchschnitte gemein, so bilden a) die harmonischen Polaren dieser zwei Tangentendurchschnitte in Bezug auf je einen dieser Kegelschnitte eine Involution von Strahlen, welche nur dann aus gleichliegenden Gebilden besteht, wenn einer der gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte reell, der andere ideal ist; b) jedes Paar dieser Polaren sind zwei zugeordnete harmonische Polaren des Punktes p in Bezug auf alle Wechselstrahlen-Kegelschnitte, welche zu jener Schaar gehören, und daher

die gemeinschaftlichen Sekanten sich schneiden, noch die ihm entsprechende Gerade P als reelle oder ideale Sekante gemein, jenachdem jene erstere Schaar vier, keinen oder nur zwei gemeinschaftliche Durchschnitte besitzt.

haben c) alle diese Wechselstrahlen-Kegelschnitte ausser einer Tangente P, welche die gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte verbindet, noch den dieser Geraden entsprechenden Punkt p als reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein, jenachdem jene erstere Schaar vier, keine oder nur zwei gemeinschaftliche Tangenten besitzt.

Der 3te Satz veranlasst jetzt zu fragen: **Welchem Gesetze sind die Hauptpunkte aller Involutionen von Punkten, von denen dort die Rede war, unterworfen, wenn ihre Richtungslinien durch einerlei Punkt gehen?** und ähnlich andrerseits. Aber, so allgemein gestellt, lässt sich diese Frage nicht erledigen, ohne die Betrachtung auf Curven von höherer als der zweiten Ordnung auszudehnen. Nur in einem besonderen Falle, wenn nämlich jene Linien von einem Punkte einer gemeinschaftlichen Sekante ausgehen, erscheint jenes Gesetz in der einfacheren Gestalt von Kegelschnitten; und wir stossen hier auf eine höchst eigenthümliche Wechselbeziehung zwischen mehreren Systemen von Kegelschnitten, welche zwar bereits in den Eigenschaften der sogenannten **Orthogonal-Kreise**, aber noch nicht in allen ihren Momenten hervortritt.

Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{s}$ der Sekante S, welche eine Schaar von Kegelschnitten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots.$ nebst einer ihr zugeordneten S_1 gemein haben, mögen beliebig viele Gerade A, B, C, $D \ldots.$ gehen, welche der Reihe nach die Wechselpunkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1 \ldots.$ enthalten. **Da jede dieser Geraden von zweien jener Kegelschnitte in diesen Punkten berührt wird**, so kann man allemal vom Punkte $\mathfrak{s}$ an einen derselben, z. B. $\mathfrak{A}$, zwei Tangenten legen, deren Berührungspunkte B, B_1 heissen mögen. Man denke sich von B (oder B_1) nach $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1 \ldots.$ die Strahlenpaare a, a'; b, b'; c, c'; $d, d' \ldots.$ gezogen, welche $\mathfrak{A}$ in α, α_1; β, β_1; γ, γ_1; $\delta, \delta_1 \ldots.$ schneiden, und sofort diese Punkte mit B_1 durch die Strahlen a'_1, a_1; b'_1, b_1; c'_1, c_1; d'_1, d_1 verbunden. Da nun z. B. $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ zugeordnete harmonische Pole von A für $\mathfrak{A}$ sind, so muss die Sehne $\alpha\alpha_1$ durch den harmonischen Pol $\mathfrak{a}'$ von A für $\mathfrak{A}$ gehen, welcher übrigens auch auf BB_1, der harmonischen Polare von $\mathfrak{s}$, liegt; also ist $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt von a, a_1, so wie $\mathfrak{a}_1$ der von a', a'_1. Aus demselben Grunde geht ferner auch die Gerade A durch den harmonischen Pol $\mathfrak{a}''$ der Sehne $\alpha\alpha_1$ für $\mathfrak{A}$; und zieht man nun $B\mathfrak{a}''$, so sind (nach einem Zusatze zu §. 3. 3.) die Strahlen $B\mathfrak{s}$, $B\mathfrak{a}''$ mit Ba, Ba_1, also auch die Punkte $\mathfrak{s}, \mathfrak{a}''$ mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ harmonisch.

Nun aber sind je zwei Wechselpunkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ mit den, den gemeinschaftlichen Sekanten S, S_1 angehörigen Punkten jedesmal harmonisch; also liegt der Punkt $\mathfrak{a}''$ auf S_1, und auf derselben Linie ebenso auch alle ähnlichen Punkte $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}'' \ldots.$ Demnach

Digitized by Google

gehen alle Sehnen $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1, \delta\delta_1 \dots$ durch einen festen Punkt, nämlich den harmonischen Pol $\mathfrak{a}'_0$ von S_1 für $\mathfrak{A}$; also bilden die Strahlenpaare a, a'; b, b'; c, c_1; $d, d_1 \dots$ eine Involution von Strahlen, und weil auch

$$B(a', b', c', d' \dots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \dots)$$

ist, so ist

$$B(a, b, c, d \dots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \dots)$$

oder vielmehr

$$B(a, b, c, d \dots a', b', c', d' \dots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \dots a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \dots);$$

dies heisst: alle Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1 \dots$ liegen sammt B, B_1 auf dem Umfange eines einzigen Kegelschnittes K.

Da die Sehnen $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1, \delta\delta_1 \dots$ durch den harmonischen Pol $\mathfrak{a}'_0$ der gemeinschaftlichen Sekante S_1 gehen, so wird S_1 von jedem Strahlenpaare a, a'; $b, b' \dots$ in zwei zugeordneten harmonischen Polen für $\mathfrak{A}$ und zugleich auch für $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \dots$ geschnitten; aber auch die Sehnen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}\mathfrak{d}_1 \dots$ von K gehen durch einen festen Punkt $\mathfrak{s}$, und dieser ist offenbar der harmonische Pol von S_1 für K, indem je zwei Punkte $\mathfrak{s}, \mathfrak{a}''$; $\mathfrak{s}, \mathfrak{b}''$; $\mathfrak{s}, \mathfrak{c}'' \dots$ resp. mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1 \dots$ harmonisch sind; also wird S_1 von denselben Strahlenpaaren a, a'; b, b'; c, c'; $d, d' \dots$ auch in Bezug auf K in zugeordneten harmonischen Polen geschnitten.

Wählt man nun statt $\mathfrak{s}$ irgend einen anderen Punkt $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \dots$ der gemeinschaftlichen Sekante S, so erhält man statt K einen ähnlichen Kegelschnitt $K_1, K_2 \dots$, in Bezug auf welchen das Gesagte ebenfalls gilt; also ist S_1 eine Gerade vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Pole für sämmtliche Kegelschnitte $K, K_1, K_2 \dots$, d. h. eine gemeinschaftliche Sekante derselben, und zwar haben sie dieselbe zugleich mit jedem der Kegelschnitte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \dots$ gemein.

In den projektivischen Strahlbüscheln B, B_1 entsprechen dem gemeinschaftlichen Strahle BB_1 wechselseitig die Geraden $B_1\mathfrak{a}'_0$, $B\mathfrak{a}'_0$, welche nach dem harmonischen Pole $\mathfrak{a}'_0$ von S_1 für $\mathfrak{A}$ gehen, also sind diese Geraden Tangenten an K, und es ist BB_1 die harmonische Polare von $\mathfrak{a}'_0$ für K. Aber BB_1 geht, als harmonische Polare von $\mathfrak{s}$ für $\mathfrak{A}$, durch den harmonischen Pol $\mathfrak{a}_0$ von S für $\mathfrak{A}$, welcher mit $\mathfrak{a}'_0$ zugleich auf der den Sekanten S, S_1 zugeordneten Geraden P liegt; also sind diese Punkte ebensosehr zwei zugeordnete harmonische Pole von P für K, als für sämmtliche Wechselpunkt-Kegelschnitte des Systemes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \dots$ (8); und da diese Punkte nur mit $\mathfrak{A}$ sich ändern, so sind sie es auch für K_1, $K_2 \dots$ Vertauscht man aber $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \dots$, so erhält man ähnliche Punktenpaare $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}'_0$; $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}'_0$; $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}'_0 \dots$, von welchen in Bezug auf $K, K_1, K_2 \dots$, welche dieselben geblieben sind, Gleiches als von $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}'_0$ gelten muss; also ist auch P eine Gerade vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Pole für $K, K_1, K_2 \dots$ d. h. eine Sekante, welche sie unter sich und mit jedem der Wechselpunkt-Kegelschnitte des Systemes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \dots$ gemein haben.

Digitized by Google

Da endlich die Punkte $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \ldots$ der Reihe nach die harmonischen Pole von S_1 für $K, K_1, K_2 \ldots$ sind, S_1 aber eine gemeinschaftliche Sekante dieser Kegelschnitte ist, so spielt die Gerade S für diese dieselbe Rolle, als P für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ Und da je zwei zugeordnete harmonische Pole von S für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots$ Wechselpunkte, und als solche die Durchschnitte von S mit je einem der Kegelschnitte $K, K_1, K_2 \ldots$ sind, so ist die Involution dieser Paare von Durchschnittspunkten mit der Involution der vereinigten Paare zugeordneter harmonischer Pole von S für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots$, folglich auch die Hauptpunkte der ersteren, d. h. die Punkte p_1, p_2 für $K, K_1, K_2 \ldots$, mit denen der letzteren, d. h. den gemeinschaftlichen Durchschnitten von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots$ identisch.

Nimmt man in der Ebene von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots$ einen Punkt $\mathfrak{a}$ beliebig an und verbindet ihn mit seinem Wechselpunkte $\mathfrak{a}_1$ durch eine Gerade A, welche S im Punkte $\mathfrak{s}$ schneidet, so erzeugt dieser Punkt $\mathfrak{s}$ einen Kegelschnitt K, welcher zur Schaar von K_1, K_2 gehört und durch $\mathfrak{a}$ geht. Also gehören alle Kegelschnitte, welche mit dieser Schaar einerlei gemeinschaftliche Sekanten haben, auch hinsichtlich der übrigen Eigenschaften zu derselben.

Nimmt man endlich die Punkte $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \ldots$, statt auf S, auf der zugeordneten gemeinschaftlichen Sekante S_1 an, so erhält man ein von dem vorigen verschiedenes, aber in Bezug auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ mit denselben Eigenschaften als $K, K_1, K_2 \ldots$ ausgestattetes System von Kegelschnitten $K', K'_1, K'_2 \ldots$; dieses hat mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots$ die Sekante S und mit deren Wechselpunkt-Kegelschnitten die Sekante P gemein. Bezeichnet man der Kürze wegen die drei Systeme von Kegelschnitten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$; $K, K_1, K_2 \ldots$; $K', K'_1, K'_2 \ldots$ durch $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$ und schreibt S_2 statt P, so sind der Reihe nach S und S_1, S_1 und S_2, S_2 und S zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten des Systemes $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$; jedes dieser Systeme hat mit jedem der beiden anderen $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$; $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$; $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}$ eine Sekante S_1, S; S_2, S_1; S, S_2 und mit dessen Wechselpunkt-Kegelschnitten eine Sekante S, S_1; S_1, S_2; S_2, S gemein, und die Wechselpunkt-Kegelschnitte eines jeden haben die Gerade S_2, S, S_1 zur gemeinschaftlichen Sekante. Zieht man von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{s}$ der Geraden S an sämmtliche Kegelschnitte des Systemes $\mathfrak{S}_2$ Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte des Systemes $\mathfrak{S}$, und die Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{s}_2$ der S_2 an die Kegelschnitte von $\mathfrak{S}$ gelegt werden, berühren sie in Punkten, welche auf einem des Systemes $\mathfrak{S}_2$ liegen u. s. w.

9. Hat eine Schaar von Kegelschnitten zwei zugeordnete reelle oder ideale Sekanten gemein, so liegen a) die Berührungspunkte aller Tangenten, die von einem beliebigen Punkte einer dieser Sekanten an jene Kegelschnitte gelegt werden, auf dem Umfange eines neuen Kegelschnittes, welcher mit ersteren

9. Hat eine Schaar von Kegelschnitten zwei zugeordnete reelle oder ideale Tangentendurchschnitte gemein, so umhüllen a) alle Tangenten derselben, deren Berührungspunkte mit einem dieser gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte in gerader Linie liegen, einen neuen Kegelschnitt, welcher mit erste-

die andere Sekante und mit deren Wechselpunkt-Kegelschnitten die Gerade P als Sekante gemein hat. b) Alle mittels der einzelnen Punkte einer jener gemeinschaftlichen Sekanten so erzeugten Kegelschnitte bilden eine zweite Schaar, welche ihrerseits ebenfalls zwei zugeordnete reelle oder ideale Sekanten gemein haben, nämlich die eine, welche sie mit jedem der ersten Schaar, und die andere, welche sie mit jedem Wechselpunkt-Kegelschnitte der ersten Schaar gemein haben; und ebenso haben auch die Kegelschnitte der ersten Schaar mit den Wechselpunkt-Kegelschnitten der zweiten jene Sekante gemein, mittels deren letztere erzeugt wurde.

c) Berücksichtigt man nach einander beide der ersten Schaar gemeinschaftliche Sekanten, so erhält man im Ganzen drei Schaaren von Kegelschnitten, welche in vollkommener Wechselbeziehung zu einander stehen, nämlich je zwei dieser Schaaren haben allemal unter sich und mit den Wechselpunkt-Kegelschnitten der dritten Schaar eine von drei bestimmten Geraden zur gemeinschaftlichen Sekante; jeder Kegelschnitt der einen schneidet alle Kegelschnitte der zweiten oder der dritten Schaar in den Berührungspunkten solcher Tangenten der beiden letzteren, welche in zwei Punkten der den Wechselpunkt-Kegelschnitten der ersten Schaar gemeinschaftlichen Sekante convergiren; und es kann also eine jede dieser drei Schaaren als diejenige an-

ren den anderen Tangentendurchschnitt und mit deren Wechselstrahlen-Kegelschnitten den Tangentendurchschnitt p gemein hat. b) Alle mittels der einzelnen Strahlen eines jener gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte so erzeugten Kegelschnitte bilden eine zweite Schaar, welche ihrerseits ebenfalls zwei zugeordnete reelle oder ideale Tangentendurchschnitte gemein haben, nämlich den einen mit jedem Kegelschnitte der ersten Schaar und den anderen mit jedem Wechselstrahlen-Kegelschnitte dieser Schaar zugleich; und ebenso haben auch die Kegelschnitte der ersten Schaar mit den Wechselstrahlen-Kegelschnitten der zweiten jenen Tangentendurchschnitt gemein, mittels dessen Strahlen letztere erzeugt wurde.

c) Berücksichtigt man nacheinander beide der ersten Schaar gemeinschaftliche Tangentendurchschnitte, so erhält man im Ganzen drei Schaaren von Kegelschnitten, welche in vollkommener Wechselbeziehung zu einander stehen, nämlich: je zwei dieser Schaaren haben allemal unter sich und mit den Wechselstrahlen-Kegelschnitten der dritten Schaar einen von drei bestimmten Punkten zum gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitt; jeder Kegelschnitt der einen hat mit sämmtlichen Kegelschnitten der zweiten oder der dritten Schaar solche Tangenten gemein, deren Berührungspunkte auf zwei Strahlen des den Wechselstrahlen-Kegelschnitten der

gesehen werden, aus welcher die beiden anderen entsprungen sind.

ersten Schaar gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes liegen; und es kann also eine jede dieser drei Schaaren als diejenige angesehen werden, aus welcher die beiden anderen entsprungen sind.

Diese drei Schaar sollen drei Wechsel-Systeme von Kegelschnitten mit zwei zugeordneten gemeinschaftlichen Sekanten oder Tangentendurchschnitten, und eine jede einzelne ein Wechsel-System der beiden anderen genannt werden.

Sind die Kegelschnitte der oben zu Grunde gelegten Schaar $\mathfrak{S}_2$ (links) ähnlich und ähnlichliegend, so haben sie mit einander und mit denen der Schaar $\mathfrak{S}$ (oder $\mathfrak{S}_1$) eine unendlich entfernte Sekante S_1 gemein; folglich gehen die harmonischen Polaren eines beliebigen Punktes von S_1 für sämmtliche Kegelschnitte von $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}$, d. h. alle Durchmesser derselben, deren zugeordnete nach jenem Punkte gerichtet sind, nach einem und demselben zweiten Punkte von S_1, sind also unter sich, sowie jene unter sich, parallel. Demnach sind auch alle Kegelschnitte von $\mathfrak{S}$ mit einander und mit denen von $\mathfrak{S}_2$ ähnlich und ähnlichliegend (§. 5. 8. Umkehrung).

Die dritte Schaar $\mathfrak{S}_1$ dagegen besitzt keine solche Sekante S_1; weil aber die harmonischen Pole ihrer gemeinschaftlichen Sekanten S und S_2 in Bezug auf alle ihre Kegelschnitte der unendlich-entfernten Geraden S_1 angehören, so sind S und S_2 Durchmesser aller dieser Kegelschnitte, welche demnach concentrisch sein müssen.

10. Hat eine Schaar ähnlicher und ähnlich-liegender Kegelschnitte ausser der unendlich-entfernten noch eine zweite Sekante gemein, so besteht das eine ihrer Wechsel-Systeme ebenfalls aus ähnlichen und ähnlich-liegenden Kegelschnitten, und zwar sind sie diess nicht nur unter sich, sondern auch mit ersteren zugleich; dagegen besteht das andere aus lauter concentrischen Kegelschnitten, deren gemeinschaftliche Sekanten zwei Durchmesser sind.

11. Die beiden Wechsel-Systeme einer Schaar von Kegelschnitten, welche zwei Durchmesser zu zugeordneten gemeinschaftlichen Sekanten haben, bestehen ein jedes für sich und beide unter einander aus lauter ähnlichen und ähnlich-liegenden Kegelschnitten.

Jenachdem die unendlich-entfernte gemeinschaftliche Sekante S_1 von $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}$ reell oder ideal ist, ist es auch die der Wechselpunkt-Kegelschnitte von $\mathfrak{S}_1$, und es besitzen folglich die letzteren im ersten Falle entweder zwei reelle oder zwei ideale, im zweiten aber allemal eine reelle und eine ideale gemeinschaftliche Sekante S, S_2. Besteht also $\mathfrak{S}_2$ und folglich auch $\mathfrak{S}$ aus lauter Ellipsen, wo S_1 ideal sein muss, so besteht $\mathfrak{S}_1$ aus lauter Hyperbeln, indem der gemeinschaftliche Mittelpunkt jetzt ausserhalb der Kegelschnitte von $\mathfrak{S}_1$ liegen muss. Da nun jede Gerade ein Sy-

stem von Kegelschnitten mit zwei zugeordneten gemeinschaftlichen Sekanten in solchen Punktenpaaren schneidet, welche eine Involution von Punkten bilden, und hierzu auch die Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Sekanten als zugeordnete gehören; da ferner die Berührungspunkte der Tangenten, welche von einem Punkte p an ein solches System gezogen werden, in einer Geraden P liegen, also auch diese Tangentenpaare sammt den gemeinschaftlichen Sekanten eine Involution von Strahlen bilden, diese Tangentenpaare aber im Falle des Systemes $\mathfrak{S}_1$ die Asymptoten der betreffenden Kegelschnitte sind, so bilden die Asymptotenpaare dieser Schaar $\mathfrak{S}_1$ eine Involution von Strahlen, und zwar besteht diese nothwendig aus gleichliegenden Gebilden, wenn es keine Gerade P_1, P_2 giebt, d. h. wenn $\mathfrak{S}_1$ eine reelle und eine ideale gemeinschaftliche Sekante besitzt.

Besteht nun die Schaar $\mathfrak{S}_2$ aus lauter Kreisen, so stehen S und S_2 senkrecht auf einander; denn in diesem Falle ist S_2 die harmonische Polare des unendlich-entfernten Punktes von S für alle jene Kreise, und je zwei zugeordnete Durchmesser eines Kreises sind rechtwinklig zu einander. Also bilden die Asymptotenpaare der Kegelschnitte von $\mathfrak{S}_1$ eine Involution der rechten Winkel, indem ausser S und S_2 auch noch die Achsen dieser Involution zu einander rechtwinklig sind.

12. Hat eine Schaar von Kreisen ausser der unendlich-entfernten noch eine zweite Sekante gemein, so liegen a) die Berührungspunkte aller Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte dieser zweiten Sekante an dieselben gezogen werden, auf einem neuen Kreise, dessen Mittelpunkt jener beliebige Punkt ist; und alle diese Kreise, welche den verschiedenen Punkten der zweiten gemeinschaftlichen Sekante entsprechen, haben die Centrallinie der ersteren zur gemeinschaftlichen Sekante, welche reell oder ideal ist, jenachdem die der ersteren ideal oder reell ist, und sowie erstere von jedem der letzteren, so werden auch letztere von jedem der ersteren in den Berührungspunkten solcher Tangenten geschnitten, welche im Mittelpunkte desselben convergiren. b) Die Berührungspunkte aller Tangenten jener ersteren Kreise, welche eine und dieselbe parallele Richtung haben, liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, und alle diese gleichseitigen Hyperbeln, welche den verschiedenen Richtungen der Ebene entsprechen, sind concentrisch und haben mit jenen Kreisen die zweite Sekante und mit der zweiten Schaar von Kreisen die Centrallinie der ersteren als Sekante, und zwar beide als Durchmesser, gemein. c) Diese Schaar gleichseitiger Hyperbeln bleibt dieselbe, sie mag nun aus der ersten oder aus der zweiten Schaar von Kreisen abgeleitet werden u. s. w.

§. 7.

Construction und Eigenschaften eines Systems von Kegelschnitten, welche nur eine Sekante und nur einen ihr zugeordneten Tangentendurchschnitt gemein haben.

1. Wenn eine Gerade als Richtungslinie einer Involution von Punkten, und ein Punkt als Mittelpunkt einer Involution von Strahlen beliebig gegeben sind, einen Kegelschnitt zu finden, für welchen die eine jener beiden Involutionen eine Involution zugeordneter harmonischer Pole, die andere eine Involution zugeordneter harmonischer Polaren sei,

und für welchen die harmonische Polare jenes Punktes durch einen zweiten beliebig gegebenen Punkt gehe.	und für welchen der harmonische Pol jener Geraden auf einer zweiten beliebig gegebenen Gernden liege.

Auflösung (links). Sind auf der gegebenen Geraden S die involutorischen Punktenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \ldots.$, nnd um den gegebenen Punkt s die involutorischen Strahlenpaare $a, a_1; b, b_1 \ldots.$ beliebig gegeben, und schneiden letztere die Gerade S in den Punkten $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_1; \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'_1 \ldots.$, so suche mnn das gemeinschaftliche Paar zugeordneter Punkte p, q der Involutionen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \ldots.$ und von $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_1; \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'_1 \ldots.$, verbinde einen beliebigen dieser Punkte, z. B. p, mit dem zweiten gegebenen Punkte $\mathfrak{i}$ durch eine Gerade N, und den nnderen, q, mit s durch eine Gerade P. Jetzt wähle man ein beliebiges Paar der Strahlen $a, a_1; b, b_1 \ldots.$, z. B. a, a_1, und verbinde den Punkt α_1, wo z. B. a_1 die N schneidet, mit dem Punkte α_2, der in der Involution von $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \ldots.$ dem Durchschnitte $\mathfrak{a}'$ von a und S zngeordnet ist, durch eine Gerade a_2, welche P in α schneide.

Besteht nun a) die gegebene Involution von Strahlen aus ungleichliegenden Gebilden, so suche man deren Hauptstrahlen g, h, welche die N in $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ schneiden mögen; verbinde einen dieser Punkte $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, z. B. $\mathfrak{g}$, mit α durch eine Gerade, welche S in $\mathfrak{s}$ schneide, suche zu $\mathfrak{s}, \alpha, \mathfrak{g}$ den vierten harmonischen, dem $\mathfrak{g}$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{g}_1$ und construire einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$, welcher g und h in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ berührt und durch $\mathfrak{g}_1$ geht; so ist $\mathfrak{A}$ der gesuchte, und zwar N harmonische Polare von s für $\mathfrak{A}$.

Besteht aber b) jene Involution aus gleichliegenden Gebilden, so suche man, wenn s_1 der Durchschnitt von P und N ist, zwei Punkte B, B_1, welche sowohl mit s, s_1 als mit q, α harmonisch sind, und verbinde einen jeden derselben mit den Punktenpaaren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \ldots.$ durch die Strahlen a', a'' und $a'_1, a''_1; b', b''$ und $b'_1, b''_1 \ldots.$, so gehören die Punkte B, B_1 und die Durchschnitte je zweier Strahlen a' und a''_1; a'' und a'_1; b' und b''_1; b'' und $b'_1 \ldots.$ dem Umfange des gesuchten Kegelschnittes $\mathfrak{A}$ an. Liegen s, s_1 abwechselnd zu q, α, so existiren keine Punkte B, B, und kein Kegelschnitt $\mathfrak{A}$.

Beweis. a) Da $\mathfrak{A}$ die g, h in $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ berührt, so ist N harmo-

nische Polare von s, und da g_1 h die Hauptstrahlen der gegebenen Involution sind, so ist diese eine Involution zugeordneter harmonischer Polaren für $\mathfrak{A}$. Ferner ist, weil sp, sq ein zugeordnetes Paar dieser Involution, P die harmonische Polare von p, also auch p, q zugeordnete harmonische Pole von S. Da ferner $\mathfrak{s}$, α mit $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1$ harmonisch, so geht die harmonische Polare von $\mathfrak{s}$ durch α; durch denselben Punkt geht aber auch die harmonische Polare von p; also ist α der harmonische Pol von S. Demnach geht auch die harmonische Polare von $\mathfrak{a}'$ durch α, zugleich aber auch durch den harmonischen Pol α_1 von α, welcher im Durchschnitte von α_1 und N liegen muss, fällt also mit α_2 zusammen. Nun sind zwei zugeordnete Punktenpaare p, q und $\mathfrak{a}'$, α_2 der gegebenen Involution zugeordnete harmonische Pole von S für $\mathfrak{A}$; also gilt dasselbe von allen solchen Paaren.

b) Giebt es unter den jetzigen Bedingungen einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$, so geht die harmonische Polare von p durch q, aber auch durch den harmonischen Pol von sp, welcher auf sq liegt, fällt also mit P zusammen. Ferner geht die harmonische Polare von $\mathfrak{a}'$ durch α_2, aber auch durch den harmonischen Pol von α, welcher im Durchschnitte von α_1 und N liegt, — denn die harmonische Polare von s geht durch $\mathfrak{i}$ und p — fällt also mit α_2 zusammen. Folglich ist α der harmonische Pol von S, und da nun α, q und s, s_1 zugeordnete harmonische Pole von P sind, und die Gerade P den Kegelschnitt durchschneiden muss, weil die gegebene Involution von Strahlen aus gleichliegenden Gebilden besteht, folglich s innerhalb $\mathfrak{A}$ liegt, so giebt es nothwendig zwei Punkte B, B_1. Giebt es also keine Punkte B, B_1, so giebt es auch keinen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$. Doch sieht man in diesem Falle, wo s, s_1 mit q, α abwechseln, dass dies nicht stattfinden würde, wenn man nur den Punkt $\mathfrak{i}$ auf die andere Seite von S verlegte.

Da nun $B(a', b', c', d' \ldots . a'', b'', c'', d'' \ldots .) \equiv S(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots . \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots .) = S(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots . \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots .) \equiv B_1(a''_1, b''_1, c''_1, d''_1 \ldots . a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots .)$, so ist $B(a', b', c', d' \ldots . a'', b'', c'', d'' \ldots .) = B_1(a''_1, b''_1, c''_1, d''_1 \ldots . a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots .)$, also liegen die Durchschnitte von $a', a''_1 \ldots .$ und B_1 B_1 auf einem Kegelschnitte, und da auch p, q zu $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \ldots .$ gehören, so sind Bp, B_1p Tangenten desselben, und P harmonische Polare von p. Daher geht die harmonische Polare von s durch p und, weil s, s_1 mit B, B_1 harmonisch, auch durch s_1, fällt also mit N zusammen. Ebenso geht die harmonische Polare von α durch p und, weil q, α mit B, B_1 harmonisch, durch q, fällt also mit S zusammen. Und da nun BB_1 durch den harmonischen Pol von S geht, so schneiden je zwei Strahlen a', a''_1; b', $b''_1 \ldots .$ die S in zugeordneten harmonischen Polen.

Die harmonische Polare von $\mathfrak{a}'$ geht also durch α_2 und auch durch den harmonischen Pol α von S, fällt also mit α_2 zusammen; sie geht aber auch durch den harmonischen Pol von α, der auf N liegt; also ist α_1 dieser Pol, und α_1 zugeordnete harmonische Polare von α. Es haben also die gegebene Involution von Strahlen und die der zugeordneten harmonischen Polaren von s zwei zugeordnete Paare α, α_1 und sp, sq gemein, sind also identisch; w. z. b. w.

Man denke sich nun die Involutionen auf S und um s mittels eines beliebigen Kegelschnittes gegeben, den Punkt $\mathfrak{i}$ aber verän-

derlich, und zwar jedesmal sowohl mit q als mit p verbunden, so überzeugt man sich ganz streng von folgendem Satze:

2. Ist ein Kegelschnitt, eine Gerade und ein Punkt beliebig gegeben, so giebt es allemal unzählige Kegelschnitte, welche mit ersterem jene Gerade als Sekante und diesen Punkt als Tangentendurchschnitt gemein haben; es bilden aber diese Kegelschnitte zwei besondere Gruppen, welche sich dadurch von einander unterscheiden, dass die harmonischen Polaren des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes in Bezug auf die Kegelschnitte der einen Gruppe in einem und demselben Punkte der gemeinschaftlichen Sekante, und die harmonischen Polaren desselben Punktes in Bezug auf die der anderen Gruppe in einem anderen Punkte dieser Sekante convergiren, und dass zu gleicher Zeit die harmonischen Pole der gemeinschaftlichen Sekante in Bezug auf die der ersten oder zweiten Gruppe zwei verschiedenen Geraden angehören, welche den gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitt beziehlich mit dem zweiten oder ersten jener Punkte verbinden.

Denkt man sich zur Construction dieser Kegelschnitte 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇.... immer dasselbe Strahlenpaar a, a_1 gebraucht, so bleiben ausser dem Punkte p auch noch die Punkte a' und α_2 unverändert, und es erscheint a_1 als der perspektivische Durchschnitt zweier Strahlbüschel, deren einer von den harmonischen Polaren A, B, C, D.... des Punktes s, der andere von den harmonischen Polaren a_2, b_2, c_2, d_2.... des Punktes a' für 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇.... gebildet wird. Nun aber gehen a_2, b_2, c_2, d_2.... durch die harmonischen Pole $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.... von S, und diese liegen in einer Geraden P; also lässt sich behaupten:

3. Hat eine Schaar von Kegelschnitten eine Sekante und einen ihr zugeordneten Tangentendurchschnitt gemein, so bilden in Bezug auf alle diese Kegelschnitte die harmonischen Polaren dieses Punktes und die harmonischen Pole jener Geraden zwei projektivische Gebilde, in welchen allemal zwei demselben Kegelschnitte zugehörige Elemente sich entsprechen, und insbesondere entspricht der gemeinschaftlichen Sekante ein auf ihr selbst enthaltener Punkt, und dem gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitt ein nach ihm selbst gerichteter Strahl.

Eine beliebige Gerade A werde von der gemeinschaftlichen Sekante S von 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇.... im Punkte 𝔰 und von den harmonischen Polaren a', b', c', d'.... ihres gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes s in den Punkten 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡.... geschnitten, wobei vorausgesetzt wird, dass a', b', c'.... durch einerlei Punkt p gehen; es seien a, b, c, d.... die harmonischen Polaren der Punkte 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡.... für 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇...., welche also sämmtlich durch s gehen müssen; und a_1, b_1, c_1, d_1.... seien die Strahlen, welche von s nach 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡.... gehen; endlich seien a'', b'', c'', d''.... die harmonischen Polaren des Punktes 𝔰 für 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇...., welche also sämmtlich durch einerlei Punkt B'' von S und einzeln durch die harmonischen Pole $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.... von S für 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇.... gehen müssen. Diess vorausgesetzt, so schneiden sich je zwei Strah-

len a, a''; b, b''; c, c''; d, d'' .... im harmonischen Pole von A für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ....; aber die Strahlen a, b. c, d .... bilden einen Strahlbüschel s oder B, welcher mit dem von a_1, b_1, c_1, d_1 .... gebildeten B_1 involutorisch ist — denn je zwei Strahlen a, a_1 .... sind zugeordnete harmonische Polaren von s —, der letztere wieder ist mit dem von a', b', c', d' .... gebildeten p oder B' perspektivisch, und dieser dem vorigen Satze zufolge mit dem von a'', b'', c'', d''.... gebildeten B'' projektivisch; also ist auch $B(a, b, c, d....) \equiv B''(a'', b'', c'', d'' ....)$. Bedenkt man nun, dass in den Strahlbüscheln B, B_1, B', B'' der Reihe nach sich die Strahlen sB'', $s\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ und wieder sq (oder P), sp, sp, $B''s$ entsprechen, so erhält man links, und ähnlicher Weise rechts, den Satz:

4. **Hat eine Schaar von Kegelschnitten eine reelle oder ideale Sekante und einen reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein,**

so liegen die harmonischen Pole einer beliebigen Geraden ihrer Ebene in Bezug auf alle diese Kegelschnitte auf zwei Kegelschnitten, deren jeder die gemeinschaftliche Sekante in demjenigen Punkte berührt, dessen harmonische Polaren auf jener Geraden convergiren, und denen jeder im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte diejenige Gerade berührt, welche die harmonischen Pole der gemeinschaftlichen Sekante für die betreffende Gruppe von Kegelschnitten enthält; so dass also sämmtliche Kegelschnitte, welche den verschiedenen Geraden der Ebene entsprechen, die gemeinschaftliche Sekante der ersten Schaar paarweise in einem und demselben Punkte, und ausserdem im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte, in zwei besondere Gruppen getrennt, zwei besondere Geraden berühren.

so umhüllen die harmonischen Polaren eines beliebigen Punktes ihrer Ebene in Bezug auf alle diese Kegelschnitte zwei Kegelschnitte, deren jeder im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte diejenige Gerade berührt, deren harmonische Pole mit jenem Punkte in gerader Linie liegen, und deren jeder die gemeinschaftliche Sekante in demjenigen Punkte berührt, welcher die harmonischen Polaren des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes für die betreffende Gruppe von Kegelschnitten vereinigt; so dass also sämmtliche Kegelschnitte, welche den verschiedenen Punkten der Ebene entsprechen, im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte paarweise einerlei Gerade, und ausserdem die gemeinschaftliche Sekante, in zwei besondere Gruppen getrennt, in zwei besonderen Punkten berühren.

Rückt man die Gerade A (links) und den Punkt (rechts) ins Unendliche hinaus, so erhält man die besonderen Aussagen:

5. **Hat eine Schaar von Kegelschnitten eine reelle oder ideale Sekante und einen reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein,**

so sind die Mittelpunkte aller dieser Kegelschnitte auf die Umfänge zweier Kegelschnitte vertheilt, deren jeder die gemeinschaftliche Sekante im Mittelpunkte ihrer Involution zugeordneter harmonischer Pole, und ausserdem im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte diejenige Gerade berührt, welche die harmonischen Pole der gemeinschaftlichen Sekante für die betreffende Gruppe von Kegelschnitten enthält*).

so umhüllen die Durchmesser aller dieser Kegelschnitte, deren zugeordnete einander parallel sind, zwei Kegelschnitte, deren jeder im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte diejenige Gerade berührt, deren harmonische Pole in einer mit jenen Durchmessern parallelen Geraden liegen, und ausserdem die gemeinschaftliche Sekante in demjenigen Punkte, welcher die harmonischen Polaren des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes für die betreffende Gruppe von Kegelschnitten vereinigt.

Es seien S, S_1 zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten zweier Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, und s ein denselben zugeordneter gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitt; ferner seien a, b die harmonischen Polaren von s für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; durch s gehe ein beliebiger Strahl, welcher $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ schneide; endlich seien a', a'_1; b', b'_1 die Tangenten in $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$, deren erstere sich in α_1, letztere in β_1 schneiden; so sind die Geraden a, b mit S, S_1 harmonisch (§. 5. 5. e.), und die auf a, b liegenden Punkte α_1, β_1 gehören einerlei Strahle von s an, nämlich der zugeordneten harmonischen Polare von $s\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zugleich. Es werde nun eine beliebige von jenen vier Tangenten, z. B. a', von S, S_1 in $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$, von b', b'_1 in σ, σ_1 und von b in β_2 geschnitten, so sind 1) die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ mit α_1, β_2 harmonisch, weil S, S_1 mit a. b harmonisch, und 2) wenn $\mathfrak{a}_2$ derjenige Punkt ist, in welchem die harmonische Polare von $\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{B}$ die Tangente a' schneidet, so sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$ Wechselpunkte für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, also die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ auch mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$ harmonisch (Corollar zu §. 5. 12.). Ebenso aber auch sind die Punkte σ, σ_1 1) mit den Punkten α_1, β_2 harmonisch, weil die Geraden b', b'_1 mit $s\beta_1$, b es sind, und 2) auch mit den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_2$, weil die harmonische Polare von $\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{B}$ durch β_1, den harmonischen Pol von sb für $\mathfrak{B}$, und durch $\mathfrak{a}_2$ geht, also die Geraden b', b'_1 mit $\beta_1\mathfrak{a}$, $\beta_1\mathfrak{a}_2$ harmonisch sind. Hieraus folgt, dass die Punktenpaare $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ und σ, σ_1 identisch sind, d. h. dass die Tangenten a' und b' auf S, und die anderen a' und b'_1 auf S_1 convergiren, u. s. w.

6. Legt man durch einen reellen oder idealen gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitt zweier be-

6. Zieht man von irgend einem Punkte einer reellen oder idealen gemeinschaftlichen Sekante zweier be-

*) Hiernach sind die im 3ten Theil des Archivs S. 232. und 235. stehenden Sätze zu verallgemeinern und noch ferner zu berichtigen.

Digitized by Google

liebiger Kegelschnitte irgend eine Gerade, welche jeden derselben in zwei Punkten schneidet, so bilden die Tangenten in diesen Punkten ein vollständiges Vierseit, dessen eine Diagonale mit dem Wechselstrahle jener Geraden, die beiden anderen mit den jenem Tangentendurchschnitte zugeordneten gemeinschaftlichen Sekanten beider Kegelschnitte zusammenfallen.

liebiger Kegelschnitte an dieselben zwei Paar Tangenten, so bilden deren Berührungspunkte ein vollständiges Viereck, von dessen Gegenseiten das eine Paar im Wechselpunkte jenes Punktes, die beiden anderen in den jener Sekante zugeordneten gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitten beider Kegelschnitte convergiren.

7. Hat eine Schaar von Kegelschnitten eine reelle oder ideale Sekante und einen ihr zugeordneten reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein,

so bilden die Tangenten aller dieser Kegelschnitte, deren Berührungspunkte mit dem gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte in gerader Linie liegen, zwei Strahlbüschel, deren Mittelpunkte auf der gemeinschaftlichen Sekante liegen.

so bilden die Berührungspunkte der Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte der gemeinschaftlichen Sekante an alle diese Kegelschnitte gelegt werden, zwei Gerade, welche nach dem gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte gerichtet sind.

Da nun von allen diesen Tangenten (links) je zwei demselben Kegelschnitte angehörige sich auf dem Wechselstrahle der Geraden, welche ihre Berührungspunkte enthält, schneiden, und allemal die eine dem einen, die andere dem anderen der erwähnten zwei Strahlbüschel angehört, so folgt zunächst:

8. In jedem Strahle des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes der erwähnten Schaar von Kegelschnitten fallen zwei projektivische Gerade zusammen, deren entsprechende Punktenpaare allemal einerlei Kegelschnitte auf bestimmte Weise angehören, und zwar sind sowohl im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte als auf der gemeinschaftlichen Sekante entsprechende Punkte vereinigt.

8. Jeder Punkt der gemeinschaftlichen Sekante der genannten Schaar von Kegelschnitten ist der Mittelpunkt zweier projektivischen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlenpaare allemal zwei Tangenten eines und desselben Kegelschnittes sind; und zwar sind sowohl auf der gemeinschaftlichen Sekante als im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte entsprechende Strahlen vereinigt.

Digitized by Google

Und da aus dem zuletzt Bemerkten zugleich folgt, dass ein jeder der beiden Strahlbüschel (links) mit dem von den harmonischen Polaren des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes gebildeten perspektivisch ist, und da dasselbe von allen anderen dergleichen Strahlbüscheln gilt; da diese also alle mit einem und demselben Strahlbüschel p, also auch unter einander projektivisch, und zwar, weil im gemeinschaftlichen Strahle entsprecheude sich vereinigen, perspektivisch sind, so folgt weiter:

9. Alle Strahlen des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes sind auf vierfache Weise in Ansehung der Punkte, in welchen sie die genannten Kegelschnitte schneiden, perspektivisch, und zwar liegen bei je zwei Strahlen die vier Projektionspunkte auf der gemeinschaftlichen Sekante.

9. Je zwei Punkte der gemeinschaftlichen Sekante sind die Mittelpunkte von Strahlbüscheln, welche auf vierfache Weise in Ansehung der an die genannten Kegelschnitte gehenden Tangenten perspektivisch sind, und zwar gehen ihre vier perspektivischen Durchschnitte durch den gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitt.

Hieran würden sich nun noch eine grosse Menge von Sätzen über Systeme von Kegelschnitten mit einer gemeinschaftlichen Sekante oder mit einem gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte und über die dieselben berührenden Kegelschnitte, über Osculation und doppelte Berührung, durch welche letztere erst die bisher entwickelten Eigenschaften in ihrer grössten Allgemeinheit und in ihrem eigentlichen Wesen sich darstellen, endlich Constructionen der Kegelschnitte mittels sogenannter imaginärer Bedingungselemente — anschliessen. Indessen das hier Mitgetheilte scheint dem im Eingange angegebenen Zwecke zu genügen. Der berühmte Entdecker der Gesetze, welche hier angewandt worden, hat dieselben die innere Natur der Sache genannt; dass sie dieses sind, d. h. dass sie in Einem zugleich Princip, Methode und Gegenstand der fortschreitenden Betrachtung sind, dafür dürften die Eigenschaften der involutorischen Gebilde, so unvollkommen sie hier auch immer dargestellt worden, als ein Belag mehr erscheinen.

XIX.

Beiträge zur systematischen Darstellung der allgemeinen Arithmetik.

Von

Herrn L. Ballauff,

Lehrer der Mathematik an der Bürgerschule zu Varel.

A. Grössen und einfache Behandlungszeichen.

§. 1. Die in der Arithmetik vorausgesetzten Grundbegriffe sind:

1) Der Begriff der Grösse.

2) Der Begriff der Gleichheit zweier Grössen.

3) Der Begriff des Addirens einer Grösse zu, und des Subtrahirens einer Grösse von einer andern.

Als Postulat wird verlangt:

1) Die Gleichheit zweier Grössen erkennen zu können.

2) Eine Grösse zu einer andern addiren und von derselben subtrahiren zu können, wenn beides möglich ist.

Zwei Grössen heissen gleichartig, wenn sich die eine zu der andern addiren und von derselben subtrahiren lässt. Es kann nur zwischen gleichartigen Grössen von Gleichheit oder Ungleichheit die Rede sein.

§. 2. Die in §. 1. angegebenen Grundbegriffe sind keiner eigentlichen Definition fähig. Es muss aber durch Grundsätze so viel von ihnen ausgesagt werden, dass der Umfang derselben vollkommen festgestellt ist. Die Gesammtheit dieser Grundsätze ersetzt also eine Definition der obigen Begriffe; sie kann aber nicht als eine eigentliche Definition betrachtet werden, da ihr die Form einer solchen fehlt und da keine Auflösung der §. 1. angegebenen Postulate aus ihr hergeleitet werden kann.

Die zur Feststellung der obigen Grundbegriffe dienenden Grundsätze sind aber ebenso willkührlich, wie jede eigentliche Definition der Arithmetik. Man rechnet eben nur solche Dinge zu den Grössen, man nennt nur solche Verknüpfungen zwischen Grössen Addition und Subtraktion, die diesen Grundsätzen genügen. So wie aber die allgemeinen Sätze der Arithmetik auf eine besondere Art von Grössen angewandt werden sollen, muss erst nachgewiesen werden, dass nach jenen Grundsätzen durch die betreffenden Definitionen genügt sei.

Vorläufig sollen hier folgende Sätze als Grundsätze aufgestellt werden:

Digitized by Google

I) Sind A, B, C gleichartig, so ist auch $A \pm B \pm C$ mit A, B und C gleichartig.

II) Aus den Gleichungen $A = B$, $B = C$ folgt die Gleichung $A = C$.

III) Es ist $A + B - C = A - C + B = B + A - C$ etc.

IV) Aus $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ folgt $A \pm B \pm C = A' \pm B' \pm C'$.

V) Es ist $A - B + B = A$, also auch $A + B - B = A$.

VI) Es ist $A + (B \pm C \pm D) = A + B \pm C \pm D$.

Aus diesen Sätzen folgt der Lehrsatz:

$$\text{VII)}\ A - (B \pm C \pm D) = A - B \mp C \mp D.$$

Alle diese Sätze gelten aber nur unter der Voraussetzung, dass die einzelnen vorkommenden Summen und Differenzen möglich sind.

Dass diese Grundsätze keinen Widerspruch in sich selbst enthalten (die einzige Bedingung, die die willkührliche Aufstellung derselben beschränkt), folgt daraus, dass sie z. B. für Längen gelten.

§. 3. Ein Behandlungszeichen ist ein Zeichen, welches vorschreibt, dass mit einer Grösse gewisse Veränderungen vorgenommen werden sollen, durch welche eine mit der behandelten gleichartige Grösse entsteht.

Die kleinen Buchstaben sollen in dem Folgenden Behandlungszeichen, die grossen Grössenzeichen sein. Für beide gilt die bekannte Beschränkung, dass in einer Untersuchung ein und derselbe Buchstabe eine und dieselbe Grösse oder eine und dieselbe Behandlung einer Grösse bezeichnet.

Das Produkt $X \,.\, a$ oder aX bezeichnet eine Grösse, welche entsteht, wenn man X nach der Vorschrift von a behandelt.

Der Quotient $X : a$ oder $\frac{X}{a}$ bezeichnet eine Grösse, deren Produkt in $a = X$ ist, so dass man also hat: $X : a \,.\, a = X$.

Es muss besonders hervorgehoben werden, dass der Multiplikand oder die Einheit des Produktes, so wie der Dividend des Quotienten immer ein Grössenzeichen; der Multiplikator oder Divisor immer ein Behandlungszeichen ist. Das Produkt oder der Quotient bezeichnet eine mit dem Multiplikanden oder Dividenden gleichartige Grösse.

Die Gleichung zwischen zwei Behandlungszeichen: $a = b$ bezeichnet, dass die Produkte $X \,.\, a$ und $X \,.\, b$ gleiche Grössen sind (bezeichnen), welche Grösse auch X bezeichnet. Bezeichnet E eine bestimmte Grösse, so darf man aus der Gleichheit von $E \,.\, a$ und $E \,.\, b$ noch nicht die Gleichheit von a und b folgern. Erst dann ist dieser Schluss erlaubt, wenn man für E jede Grösse setzen kann, ohne dass die Gleichung $E \,.\, a = E \,.\, b$ aufhört richtig zu sein.

Aus den Gleichungen $a = b$, $b = c$ folgt $a = c$. Denn aus der Gleichung $a = b$ folgt $X \,.\, a = X \,.\, b$; aus der Gleichung $b = c$ folgt $X \,.\, b = X \,.\, c$. Daher ist auch $X \,.\, a = X \,.\, c$; also, da X jede Grösse bezeichnen kann, auch $a = c$.

§. 4. Die einfachsten Behandlungszeichen sind die ganzen absoluten Zahlen, die eine Vervielfachung der Einheit anzeigen und die durch die Gleichungen

$X.1 = X,\ X.2 = X + X,\ X.3 = X.2 + X = X + X + X$, etc. definirt werden. Bezeichnen p und q ganze absolute Zahlen, so gelten folgende Sätze, die hier aufgeführt werden, um eine Eintheilung der Behandlungszeichen überhaupt darauf zu begründen.

I) Aus $X = Y$ folgt $X.p = Y.p$, und alle Grössen, die durch das Zeichen $X.p$, wo X und p gegeben sind, bezeichnet werden dürfen, sind gleich. Das Produkt einer gegebenen Grösse in eine gegebene ganze Zahl ist also vollkommen bestimmt.

II) Es ist $(X \pm Y \pm Z).p = X.p \pm Y.p \pm Z.p$.

III) Es ist $X.p.q = X.q.p$.

IV) Es ist, wie leicht zu beweisen, $A - A = B - B$. Die Differenz zweier gleichen Grössen bezeichnet man mit 0 und jede Grösse, die nicht $= 0$ ist, soll in dem Folgenden eine angebbare Grösse heissen. Es kann alsdann als Grundsatz vorausgesetzt werden, dass das Produkt einer angebbaren Grösse in eine ganze absolute Grösse wieder eine angebbare Grösse bezeichnet.

§. 5. Sind jetzt p und q Behandlungszeichen in der allgemeinsten Bedeutung des Wortes, so können folgende Unterscheidungen gemacht werden.

I) Ist X eine gegebene Grösse, so sind entweder alle Grössen, welche durch $X.p$ bezeichnet werden dürfen, einander gleich und aus $X = Y$ folgt mit Nothwendigkeit $X.p = Y.p$, d. h. die durch $X.p$ bezeichnete Grösse ist vollkommen bestimmt, oder die Behandlung der Einheit, welche p vorschreibt, genügt diesen Bedingungen nicht. Im ersten Falle soll das Behandlungszeichen p eindeutig, im zweiten Falle vieldeutig oder unbestimmt genannt werden.

Die gewöhnlichen ganzen Zahlen und Brüche sind bekanntlich eindeutige Behandlungszeichen; dagegen ist $5 + \sqrt{4}$ ein zweideutiges Behandlungszeichen, indem $X.(5 + \sqrt{4})$ sowohl dem 3fachen, als auch dem 7fachen von X gleich sein kann. In dem Folgenden sollen die einfachen Buchstaben eindeutige Behandlungszeichen sein.

II) Es ist entweder $(X \pm Y \pm Z).p = X.p \pm Y.p \pm Z.p$ oder diese Gleichung findet nicht statt. Ist diese Gleichung richtig, welche Grössen auch X, Y, Z sein mögen, so soll p eine Zahl heissen.

Es ist leicht zu ersehen, dass hier der Begriff der Zahl weiter gefasst ist, als es gewöhnlich geschieht. So sind hier namentlich diejenigen Behandlungszeichen mit zu den Zahlen gerechnet, mit welchen sogenannte symbolische Rechnungen vorgenommen werden können. Fällt z. B. die zu behandelnde Grösse unter die Form $A.\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ eine beliebige Function von x bezeichnet, so gehören die Zeichen $\frac{d}{dx}$, Δx, $\int_a^b dx.(\ )$ mit zu den Zahlen, während sin, cos, log nicht dazu gerechnet werden dürfen.

III) Ist für jedes X $X.p.q = X.q.p$, so sollen p und q gleichartige Behandlungszeichen heissen; ist dagegen diese Gleichung nicht allgemein richtig, so sollen p und q ungleichartig heissen.

Gleichartige Zahlen sind also z. B. alle rationalen und irrationalen Zahlen unter sich; $\frac{d}{dx}$ und Δx; $\frac{d}{dx}$ und jede von x unabhängige rationale oder irrationale Zahl. Es muss noch bemerkt wer-

Digitized by Google

den, dass aus der Gleichartigkeit von p und q, und von q und r keineswegs die Gleichartigkeit von p und r folgt. So ist z. B. $\frac{d}{dx}$ gleichartig mit a; a gleichartig mit x, aber nicht $\frac{d}{dx}$ mit x.

IV) Bezeichnet das Produkt einer jeden angebbaren Grösse in p wieder eine angebbare Grösse, so soll p ein angebbares Behandlungszeichen genannt werden. p soll aber nicht mehr angebbar heissen, wenn das Produkt auch nur einer einzigen angebbaren Grösse in $p = O$ ist.

So ist $\frac{d}{dx}$ nicht angebbar, indem $\frac{d}{dx}(aE) = 0$ ist, obgleich aE angebbar sein kann.

§. 6. Aus den in dem Vorigen aufgestellten Begriffen ergeben sich mit Leichtigkeit folgende Lehrsätze:

I) Aus $X = Y$, $a = b$ folgt $X . a = Y . b$, wenn a und b eindeutig sind. Denn da a eindeutig ist, so folgt aus $X = Y$ $X . a = Y . a$; aus $a = b$ folgt $Y . a = Y . b$. Daher ist $X . a = Y . b$.

II) Wenn a eine Zahl ist, so ist $(X \pm Y \pm Z) . a = X . a \pm Y . a \pm Z . b$. Folgt unmittelbar aus §. 5. II.

III) Sind a und b angebbare, eindeutige Zahlen, so folgt aus $X . a = Y . b$ und $a = b$ auch $X = Y$.

Aus $a = b$ folgt $Y . a = Y . b$; daher ist $X . a = Y . a$, also $O = X . a - Y . a = (X - Y) . a$, da a eine Zahl. Wäre nun $X - Y$ angebbar, so müsste, da a angebbar ist, auch $(X - Y) . a$ angebbar sein. Da dieses nicht der Fall ist, so muss $X - Y = O$, also $X = Y + O = Y + (A - A) = Y + A - A = Y$ sein.

IV) Aus $X = Y$ und $a = b$ folgt $X : a = Y : b$, wenn a und b angebbar sind. Denn es ist $X : a . a = X$, $Y : b . b = Y$; also $X : a . a = Y : b . b$; mithin, da a und b angebbar und gleich sind, $X : a = Y : b$. (III)

V) Es ist $(X \pm Y \pm Z) : a = X : a \pm Y : a \pm Z : a$, wenn a eine angebbare Zahl ist. Denn

$$(X : a \pm Y : a \pm Z : a) . a = X : a . a \pm Y : a . a \pm Z : a . a$$
$$= X \pm Y \pm Z = (X \pm Y \pm Z) : a . a;$$

daher, weil a angebbar:

$$X : a \pm Y : a \pm Z : a = (X \pm Y \pm Z) : a.$$

VI) Sind a und b gleichartige Zahlen, so ist: $X . a . b = X . b . a$, $X . a : b = X : b . a$, $X : a : b = X : b : a$, wenn alle vorkommenden Divisoren angebbar sind. Der erste Satz folgt aus der Erklärung gleichartiger Zahlen. Für den zweiten hat man $X : b . a . b = X : b . b . a = X . a = X . a : b . b$; also, wenn b angebbar, $X : b . a = X . a : b$. Aehnlich ist der Beweis für den dritten Satz.

Ist a eine angebbare Zahl, so ist $X . a : a = X : a . a = X$. Man darf aber nicht unbedingt setzen: $(\Delta X) : \frac{d}{dx} = \Delta(X : \frac{d}{dx})$; $(\frac{d}{dx} X) : \frac{d}{dx} = X$.

Digitized by Google

B. Rationale Ausdrücke aus einfachen Behandlungszeichen.

§. 7. Sind a, b, c einfache Behandlungszeichen, so ist $a \pm b \pm c$ ein Behandlungszeichen, welches vorschreibt, dass die Einheit mit a, mit b und mit c multiplicirt und dass die entstehenden Produkte addirt oder subtrahirt werden sollen. $a \,.\, b : c$ schreibt vor, dass die Einheit mit a multiplicirt, das Ergebniss mit b multiplicirt, und das jetzige Ergebniss durch c dividirt werden soll. Die Definition dieser Zeichen ist daher enthalten in den Gleichungen:

$$X\,.\,(a \pm b \pm c) = X\,.\,a \pm X\,.\,b \pm X\,.\,c,\quad X\,.\,(a\,.\,b:c) = X\,.\,a\,.\,b:c$$

oder auch

$$X\,.\,(:a\,.\,b:c) = X:a\,.\,b:c.$$

Aus diesem ergiebt sich leicht die Bedeutung zusammengesetzterer rationaler Ausdrücke aus einfachen Behandlungszeichen. Ferner lässt sich leicht zeigen, dass $a \pm b \pm c$ und $a\,.\,b:c$ eindeutige Behandlungszeichen sind, wenn in den letztern nur angebbare Divisoren vorkommen.

§. 8. Lehrsätze:

I) Aus $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ folgt $a \pm b \pm c = a' \pm b' \pm c'$.

II) Es ist $a + b - c = a - c + b = b + a - c$ etc.

III) $a + b - b = a$, $a - b + b = a$.

IV) $a + (x + y - z) = a + x + y - z$.

V) $a - (x + y - z) = a - x - y + z$.

Die Beweise dieser Sätze sind einander ganz ähnlich. So ist z. B. für II.:

$$X\,.\,(a + b - c) = X\,.\,a + X\,.\,b - X\,.\,c;$$
$$X\,.\,(a - c + b) = X\,.\,a - X\,.\,c + X\,.\,b.$$

Nun ist

$$X\,.\,a + X\,.\,b - X\,.\,c = X\,.\,a - X\,.\,c + X\,.\,b;$$

daher auch $X\,.\,(a + b - c) = X\,.\,(a - c + b)$. Da hier aber offenbar X jede Grösse bezeichnen kann, so folgt aus der Erklärung der Gleichung zwischen Behandlungszeichen $a + b - c = a - c + b$.

VI) $a + b - c$ ist eine Zahl, wenn a, b, c Zahlen sind und ist mit jeder Zahl gleichartig, welche mit a, b, c gleichartig ist.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}(X \pm Y)\,.\,(a + b - c) &= (X \pm Y)\,.\,a + (X \pm Y)\,.\,b - (X \pm Y)\,.\,c \\ &= X\,.\,a \pm Y\,.\,a + X\,.\,b \pm Y\,.\,b - X\,.\,c \mp Y\,.\,c \\ &= X\,.\,(a + b - c) \pm Y\,.\,(a + b - c);\end{aligned}$$

mithin ist $a + b - c$ nach §. 5. II. eine Zahl.

Ist m eine mit a, b, c gleichartige Zahl, so ist

Digitized by Google

$$X.m.(a+b-c) = X.m.a + X.m.b - X.m.c$$
$$= X.a.m + X.b.m - X.c.m$$
$$= (X.a + X.b - X.c).m$$
$$= X.(a+b-c).m;$$

daher ist auch $a+b-c$ mit m gleichartig (§. 5. III.).

0 ist ein Behandlungszeichen, definirt durch die Gleichung $X.0 = 0$, wo X jede Grösse sein kann. Es ergiebt sich hieraus, dass $0 =$ der Differenz zweier gleichen Zahlen, also auch eine Zahl und mit allen andern Zahlen gleichartig sei.

§. 9. Lehrsätze:

I) $a.b:c$ ist eine Zahl, wenn a, b, c Zahlen sind, und ist mit jeder Zahl gleichartig, welche mit a, b, c gleichartig ist, vorausgesetzt, dass alle in diesem Ausdrucke vorkommenden Divisoren angebbar sind.

Beweis. Es ist, wenn a, b, c Zahlen und c angebbar: $(X + Y).(a.b:c) = (X \pm Y).a.b:c = (X.a \pm Y.a).b:c = (X.a.b \pm Y.a.b):c = X.a.b:c \pm Y.a.b:c = X.(a.b:c) \pm Y.(a.b:c)$; also $a.b:c$ eine Zahl (§. 5. II.).

Ist ferner m mit a, b, c gleichartig, so ist $X.(a.b:c).m = X.a.b:c.m = X.m.a.b:c = X.m.(a.b:c)$; also $a.b:c$ mit m gleichartig (§. 5. III.).

II) Sind a, b, c gleichartige und angebbare Behandlungszeichen, so ist $X:(a.b:c) = X:a:b.c$. Denn $X:a:b.c.a.b:c = X = X:(a.b:c).a.b:c$, woraus sich leicht der Lehrsatz ergicbt.

III) Aus $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ folgt, wenn die Divisoren angebbar sind, $a.b:c = a'.b':c'$.

IV) Sind a, b, c gleichartige Behandlungszeichen und c angebbar, so ist $a.b:c = a:c.b = :c.b.a$ etc.

V) $m.(a.b:c) = m.a.b:c$, wenn die Divisoren angebbar.

VI) $m:(a.b:c) = m:a:b.c$, wenn die Divisoren angebbar und a, b, c gleichartig sind.

VII) $(a \pm b).m = a.m \pm b.m$, wenn m eine Zahl.

VIII) $(a \pm b):m = a:m \pm b:m$, wenn m eine angebbare Zahl.

IX) $m.(a \pm b) = m.a \pm m.b$.

Die Beweise der Sätze III. — IV. sind einander ganz ähnlich. So ist für III. $X.(a.b:c) = X.a.b:c$, $X.(a:c.b) = X.a:c.b$. Unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes ist aber $X.a.b:c = X.a:c.b$; daher auch $X.(a.b:c) = X.(a:c.b)$. Da man sich hier für X jede Grösse gesetzt denken kann, so ist nach der Erklärung der Gleichheit $a.b:c = a:c.b$.

Aus den Sätzen der beiden letzten Paragraphen ergiebt sich, dass jeder rationale Ausdruck aus ganzen absoluten Zahlen gleich einem Ausdruck von der Form $\frac{a-b}{c-d}$ ist, wo a, b, c, d ganze Zahlen sind, vorausgesetzt dass in dem Ausdrucke nur angebbare Divisoren vorkommen. Es wird dabei angenommen, dass man die Summe und die Differenz zweier ganzen Zahlen als eine ganze Zahl berechnen könne. Bezeichnet $(+a)$ die Summe $0+a$ und $(-a)$ die Differenz $0-a$, so ist also jeder rationale Ausdruck aus ganzen

Zahlen $= \pm \frac{m}{n}$, also gleich einer reellen, rationalen Zahl. Hieraus folgt dann wieder, dass auch jeder rationale Ausdruck aus reellen, rationalen Zahlen = einer rationalen, reellen Zahl ist, immer unter der Voraussetzung, dass nur angebbare Divisoren vorkommen.

C. Ungleichheit von Grössen und Zahlen; absolute, positive und negative Zahlen und Grössen.

§. 10. Zwei Grössen heissen einstimmig, wenn sie in allen ihren in Betracht kommenden Eigenschaften übereinstimmen und sich nur durch ihre etwa verschiedene Grösse von einander unterscheiden. Sind A und B zwei einstimmige Grössen, und ist $A-B$ eine mit A und B einstimmige angebbare Grösse, so heisst A dem absoluten Werthe nach grösser als B (val. abs. $A >$ val. abs. B).

Zur nähern Bestimmung dieser Begriffe dienen folgende Grundsätze, die also zu den in §. 2. angeführten noch hinzukommen.

I) Die Summe mehrerer einstimmigen Grössen ist mit den einzelnen Theilen einstimmig und angebbar, wenn nur einer der Theile angebbar ist.

II) Zwei einstimmige Grössen sind entweder einander gleich oder die eine ist grösser als die andere.

III) Von jeder angebbaren Grösse lässt sich ein Vielfaches angeben, welches grösser ist als jede mit ihr einstimmige Grösse.

Der in §. 4. IV. angenommene Grundsatz ist eine unmittelbare Folge aus I., braucht also als Grundsatz nicht weiter berücksichtigt zu werden.

Aus den eben angegebenen Sätzen lassen sich die verschiedenen Lehrsätze über die Ungleichheit einstimmiger Grössen mit Leichtigkeit herleiten.

§. 11. Ist die durch $X \,.\, m$ bezeichnete Grösse immer mit X einstimmig, so heisst das Behandlungszeichen m ein absolutes. Ein Behandlungszeichen von der Form $0 + m$ heisst alsdann ein positives, eins von der Form $0 - m$ ein negatives Behandlungszeichen. a heisst grösser als b oder kleiner als b, jenachdem $a - b$ einem positiven oder einem negativen angebbaren Behandlungszeichen gleich ist.

Die aus diesen Definitionen sich ergebenden Lehrsätze über die Ungleichheit verschiedener Behandlungszeichen sind bekannt. Nur auf einen Umstand muss hier noch aufmerksam gemacht werden. Aus der Ungleichheit von a und b darf man nämlich nicht ohne Weiteres schliessen, dass $a > b$ oder $a < b$ ist. Wenn a und b imaginäre Zahlen sind, so ist dies bekannt. Aber auch die Zahlen $\frac{d}{dx}$, $\frac{2d}{dx}$ sind ungleich, ohne dass die eine von beiden grösser ist, indem ihre Differenz $\frac{d}{dx}$ keine angebbare Zahl ist. Ist $E.a > E.b$ und gilt diese Beziehung nur für die eine Grösse E, so kann man daraus noch nicht schliessen, dass auch $a > b$ sei.

§. 12. Es ist $A = B$, wenn $A - B$ und $B - A$ kleiner ist als jede mit A und B einstimmige angebbare Grösse, wenn A und B einstimmig sind. Denn wäre A nicht $= B$, so wäre $A > B$ oder $B > A$, also eine der Differenzen $A - B$ oder $B - A$ eine mit B und A einstimmige, angebbare Grösse.

Digitized by Google

Das absolute Behandlungszeichen a ist gleich b, wenn sowohl $a - b$, als auch $b - a < \frac{1}{n}$, wo n jede noch so grosse absolute ganze Zahl bezeichnen kann. Denn ist X eine beliebige Grösse, so ist $X.(a-b)$ oder $X.(b-a) \leqq X.\frac{1}{n}$; also auch $X.a - X.b$ oder $X.b - X.a$ dem absoluten Werthe nach $\leqq X.\frac{1}{n}$. Da aber $X.\frac{1}{n}$ kleiner sein kann als jede mit X einstimmige angebbare Grösse, so ist $X.a = X.b$, und da dieses für jede Grösse X gilt, so ist $a = b$.

§. 13. In dem Vorigen war schon von solchen Differenzen absoluter Zahlen die Rede, in denen der Minuend kleiner war als der Subtrahend. Es müssen nun zunächst diejenigen Grössen näher betrachtet werden, deren Produkte in solche negative Zahlen eine wirkliche Bedeutung haben.

Betrachtet man eine Grösse X, insofern sie zu einer andern Grösse A addirt dieselbe vergrössert oder verkleinert, so nennt man X eine algebraische Grösse; und zwar soll X eine positive Grösse genannt werden, wenn $A + X > A$; eine negative, wenn $A + X < A$ ist. Eine Grösse, welche nicht in einer solchen Beziehung zu einer andern gedacht wird, und namentlich auch A selbst, soll eine absolute Grösse heissen.

Die algebraische Grösse X muss offenbar mit A gleichartig genannt werden, indem sie zu A addirt werden kann (§. 1.); sie ist aber nicht mehr mit A einstimmig, da sie sonst bei ihrer Addition keine Verkleinerungen von A hervorbringen könnte (§. 10). Das passendste Beispiel für diese Verhältnisse giebt das bekannte, aber etwas modifizirte Beispiel von Vermögen und Schulden. Sieht man das Vermögen einer Person als die absolute Grösse an, so sind die Einnahmen dieser Person positive, die Ausgaben negative Grössen. Sieht man den Schuldenstand dieser Person als absolute Grösse an, so verhält es sich umgekehrt.

In dem Folgenden soll A diejenige absolute Grösse sein, deren Vergrösserung oder Verkleinerung betrachtet wird; X, Y, Z etc. sollen algebraische Grössen bezeichnen. Es gelten alsdann folgende Definitionen:

I) Es ist $X = Y$, wenn $A + X = A + Y$.

II) Der Ausdruck $X + Y - Z$ wird definirt durch die Gleichung $A + (X + Y - Z) = A + X + Y - Z$. Diese Definitionen sind aber nicht mehr rein willkührlich; es muss im Gegentheil gezeigt werden, dass sie den in §. 2. aufgestellten Grundsätzen genügen, was ohne Schwierigkeit angeht. So ist z. B. $X + (Y - Z) = X + Y - Z$; denn

$$\left.\begin{aligned} A+[X+(Y-Z)] &= A+X+(Y-Z) = A+X+Y-Z \\ A+(X+Y-Z) &= A+X+Y-Z \end{aligned}\right\}\text{.... (Def. II.)}$$

daher

$$A + [X + (Y - Z)] = A + [X + Y - Z];$$

also

$$X + (Y - Z) = X + Y - Z \text{.... (Def. I.).}$$

Es ergiebt sich aus diesen Erklärungen unmittelbar, dass zwei gleiche angebbare Grössen entweder beide positiv oder beide nega-

tiv sind. Bringt die Addition von X zu A keine Veränderung von A hervor, so ist $X = 0$, was unmittelbar aus der Relation $A + X = A = A + 0$ folgt.

§. 14. Man erhält also den Begriff einer positiven Grösse, wenn man sich eine absolute Grösse X mit der Eigenschaft behaftet denkt, bei ihrer Addition zu A um die Grösse X zu vergrössern, und ebenso erhält man eine negative Grösse, wenn man sich die Grösse X mit der Eigenschaft behaftet denkt, A um X zu verkleinern. Die auf diese Weise aus der absoluten Grösse X entstehende positive Grösse soll mit X^+, die entstehende negative mit X^- bezeichnet werden und X soll der absolute Werth von $X^\pm$ heissen. Es ist dann $A + X^+ = A + X$, $A + X^- = A - X$. Es ergeben sich ferner leicht folgende Lehrsätze:

I) $X^+ + Y^+ = (X + Y)^+$; denn $A + (X^+ + Y^+) = A + X + Y$, $A + (X + Y)^+ = A + X + Y$; daher $A + (X^+ + Y^+) = A + (X + Y)^+$ oder $X^+ + Y^+ = (X + Y)^+$.

II) $X^- + Y^- = (X + Y)^-$.

III) $X^+ + Y^- = (X - Y)^+$ oder $= (Y - X)^-$, jenachdem $X > Y$ oder $Y > X$ ist.

IV) $X - Y^\pm = X + Y^\mp$.

§. 15. Sind X und Y zwei einstimmige Grössen und bezieht sich das Hinzufügen der Zeichen + oder − auf die Vergrösserung oder Verkleinerung derselben absoluten Grösse, so sind X^+ und X^- nicht mehr einstimmig, indem sie sich noch durch etwas Anderes als ihre verschiedene Grösse unterscheiden. Dagegen dürfen X^+ und Y^+, so wie X^- und Y^- noch als einstimmige Grössen betrachtet werden. Um die Zulässigkeit hievon nachzuweisen, muss gezeigt werden, dass diese Grössen den in §. 10. aufgestellten Grundsätzen genügen. Es ist aber:

I) $(X^+ + Y^+) = (X + Y)^+$, $(X^- + Y^-) = (X + Y)^-$; also in beiden Fällen die Summe einstimmig mit den Theilen und angebbar, wenn einer der Theile angebbar ist.

II) Es ist $X > Y$ oder $X = Y$ oder $X < Y$, also $X = Y + V$ oder $X = Y$ oder $X = Y - V$, wenn V eine mit X und Y einstimmige angebbare Grösse bezeichnet. Daraus folgt aber, dass $X^+ = Y^+ + V^+$ oder $= Y^+$ oder $= Y^+ - V^+$, so wie dass $X^- = Y^- + V^-$ oder $= Y^-$ oder $= Y^- - V^-$ ist, d. h. dass dem absoluten Werthe nach X^+ entweder $>$ oder $=$ oder $< Y^+$ und X^- entweder $>$ oder $=$ oder $< Y^-$ ist.

III) Es giebt ein Vielfaches von X, welches grösser als Y, so dass also $nX = Y + V$ ist, wo V eine mit X und Y einstimmige Grösse bezeichnet. Daraus folgt aber $nX^+ = Y^+ + V^+$, $nX^- = Y^- + V^-$, so dass es ein Vielfaches von $X^\pm$ giebt, welches dem absoluten Werthe nach grösser als $Y^\pm$ ist.

Jede negative Grösse ist gleich einer Differenz zweier positiven Grössen, in welcher der Subtrahend dem absoluten Werthe nach grösser als der Minuend ist und ein ähnlicher Satz lässt sich auch für positive Grössen aussprechen. So ist $X^- = Y^+ - (X + Y)^+$. Lässt man bei der Bezeichnung der positiven Grössen den Accent + weg, so ist $X^+ = 0 + X$ oder abgekürzt $= (+ X)$, $X^- = 0 - X = (- X)$. Ist a eine beliebige Zahl, so ist

I) $0 . a = (X - X) . a = X . a - X . a = 0$.

II) $X^\pm . (+ a) = (0 \pm X) . (0 + a) = (\pm a X)$.

III) $X^\pm . (- a) = (0 \pm X) . (0 - a) = (\mp a X)$ etc.

womit zugleich nachgewiesen ist, dass das Produkt einer algebraischen Grösse in eine negative Zahl, d. h. in eine Differenz zweier absoluten Zahlen, deren Minuend kleiner ist als der Subtrahend, eine wirkliche Bedeutung habe. Die Sätze über die Produkte und Quotienten positiver und negativer Zahlen lassen sich aus der oben gegebenen Erklärung der positiven und negativen Zahlen mit Leichtigkeit herleiten.

D. Transcendente und irrationale Behandlungszeichen.

§. 17. Eine Grösse oder ein Behandlungszeichen heisst durch gewisse Bedingungen bestimmt, wenn alle Grössen oder Behandlungszeichen, welche diesen Bedingungen genügen, einander gleich sind. Eine Grösse oder ein Behandlungszeichen heisst gegeben, wenn sie entweder unmittelbar vorliegen, oder wenn man doch vermittelst der gegebenen Bedingungen eine Grösse oder ein Behandlungszeichen herleiten kann, welches dem in Rede stehenden gleich ist. In dem Folgenden soll aber eine Grösse schon als gegeben angesehen werden, wenn man eine Grösse darstellen kann, deren Unterschied von der eigentlich zu bestimmenden dem absoluten Werthe nach kleiner ist als jede noch so kleine, gegebene, angebbare Grösse. Unter ähnlichen Verhältnissen soll auch ein Behandlungszeichen als gegeben angesehen werden.

Ist $A_0, A_1, A_2 \ldots A_n$ in inf. eine unendliche Reihe von Grössen, so heisst diese Reihe eine unendlich klein werdende, wenn sich in dieser Reihe ein Glied angeben lässt, von welchem an alle folgende Glieder dem absoluten Werthe nach kleiner sind als jede gegebene noch so kleine angebbare Grösse. Die Grösse $\mathfrak{A}$ heisst die Gränze der Reihe $A_0, A_1, A_2 \ldots A_n$ in inf., oder es ist $\mathfrak{A} = \lim_{n=\infty} A_n$, wenn die Reihe $\mathfrak{A} - A_0, \mathfrak{A} - A_1, \mathfrak{A} - A_2 \ldots \mathfrak{A} - A_n$ in inf. eine unendlich klein werdende Reihe ist. Bekanntlich besitzt aber nicht jede unendliche Reihe eine Gränze, sondern die Reihe kann auch unendlich gross werdend sein, oder die Glieder können zwischen gewissen Grössen immer hin und her gehen.

Wie diese Begriffe sich auf Behandlungszeichen ausdehnen lassen, ist leicht zu ersehen; es tritt alsdann an die Stelle der beliebig kleinen angebbaren Grösse eine beliebig kleine, gegebene, angebbare absolute Zahl.

Für die unendlich klein werdenden Reihen und für die Reihen, welche Gränzen besitzen, lassen sich leicht die in den folgenden Formeln ausgedrückten Sätze beweisen:

I) Ist $\lim A_n = O$, $\lim B_n = O$, so ist auch $\lim (A_n \pm B_n) = O$.

II) Ist $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$, so ist auch $\lim (a_n \pm b_n) = 0$, $\lim (a_n \,.\, b_n) = 0$, $\lim (A_n \,.\, a_n) = 0$; wenn nicht $\lim A_n = \pm \infty$.

III) $\lim (A_n \pm B_n) = \lim A_n \pm \lim B_n$ (denn $\lim (\mathfrak{A} - A_n) = O$, $\lim (\mathfrak{B} - B_n) = O$, also $\lim ((\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}) - (A_n \pm B_n)) = O$).

IV) $\lim (A_n \,.\, a_n) = \lim A_n \,.\, \lim a_n$, $\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$, $\lim (a_n \,.\, b_n) = \lim a_n \,.\, \lim b_n$.

V) $\lim (A_n : b_n) = \lim A_n : \lim b_n$, $\lim (a_n : b_n) = \lim a_n : \lim b_n$, wenn nicht $\lim b_n = 0$ ist.

Ist von einer Grösse ausgesagt, dass sie die Gränze einer un-

endlichen Reihe $A_0, A_1 \ldots . A_n$ in inf. sei, so ist diese Grösse vollkommen bestimmt, vorausgesetzt, dass diese Reihe wirklich eine Gränze besitzt. Denn sind die beiden Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Gränzen dieser Reihe, so ist $\lim(\mathfrak{A} - A_n) = 0$, $\lim(\mathfrak{B} - A_n) = 0$, also nach III) $\lim(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) = \lim[(\mathfrak{A} - A_n) - (\mathfrak{B} - A_n)] = 0$, was offenbar nur möglich ist, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Ist eine Methode gegeben, nach welcher man sämmtliche Glieder der unendlichen Reihe finden kann, so ist die Gränze der Reihe auch als gegeben anzusehen. Auf ganz ähnliche Weise kann auch ein Behandlungszeichen als Gränze einer Reihe von Behandlungszeichen bestimmt und gegeben werden.

Endlich verdient noch bemerkt zu werden, dass zwei Reihen gleiche Gränzen haben, wenn ihre Differenz eine unendlich klein werdende Reihe ist, vorausgesetzt, dass die Reihen Gränzen besitzen. Denn ist $\lim(a_n - b_n) = 0$, so ist $\lim a_n - \lim b_n = \lim(a_n - b_n) = 0$ oder $\lim a_n = \lim b_n$.

§. 18. Ein Behandlungszeichen ist nach dem Frühern ein Zeichen, welches anzeigt, dass mit einer Grösse eine beliebige Veränderung vorgenommen werden soll. Diese mit einer Grösse vorzunehmende Behandlung kann aber wieder aus einer Reihefolge von einzelnen Operationen zusammengesetzt sein und diese Reihe der mit der Grösse vorzunehmenden Operationen kann auch als ohne Ende fortgehend gedacht werden. In dem letzten Falle soll das Behandlungszeichen ein transcendentes oder eine Transcendente genannt werden; die Bedeutung einer solchen Transcendenten muss aber zunächst näher aus einander gesetzt werden.

Schreibt ein Behandlungszeichen s vor, dass mit einer Grösse eine unendliche Reihe von Operationen vorgenommen werden soll, so soll das Produkt einer Einheit in s die Gränze derjenigen unendlichen Reihe von Grössen sein, deren Glieder man erhält, wenn man mit der Einheit zuerst die erste, dann die erste und zweite, dann die erste, zweite und dritte etc. etc. der durch s vorgeschriebenen Operationen vornimmt. Bedeutet also s die aus einer unendlichen Anzahl von Theilen bestehende Summe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots . a_n +$ in inf., so bedeutet $X.s$ die Gränze der unendlichen Reihe:

$$X.a_0,\ X.(a_0 + a_1),\ X.(a_0 + a_1 + a_2) \ldots .$$
$$X.(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots . + a_n) \ldots . \text{ in inf.}$$

Bedeutet s das Produkt aus unendlich vielen Faktoren $a_0 . a_1 . a_2 . a_3 \ldots . a_n$ in inf., so bezeichnet $X.s$ die Summe der unendlichen Reihe:

$$X.a_0,\ X.a_0.a_1,\ X.a_0.a_1.a_2, \ldots .\ X.a_0.a_1.a_2 \ldots . a_n, \ldots . \text{ in inf.}$$

Es ist einleuchtend, dass das Produkt einer Grösse in eine Transcendente nach Umständen etwas Mögliches oder Unmögliches sein kann, dass aber im ersten Falle das Produkt $X.s$ bestimmt und gegeben ist, wenn es die Glieder der entstehenden Reihe sind.

In manchen Fällen ist eine Transcendente bekanntlich einem endlichen Ausdruck aus einfachen Behandlungszeichen gleich. Ist z. B. der endliche Ausdruck $s = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots . x^n + \ldots$ in inf., wo x eine absolute Zahl sein soll, so ist zuerst s ebenfalls ein absolutes Behandlungszeichen. Aus der Erklärung des

Zeichens s ergiebt sich aber unmittelbar $s = 1 + x \,.\, s$. Diese Gleichung enthält aber offenbar einen Widerspruch, wenn $x \geqq 1$, da dann $1 + x \,.\, s > s$. In diesem Falle kann also die unendliche Reihe keinem endlichen Ausdruck gleich sein. Ist aber $x < 1$, so erhält man unmittelbar $s = \frac{1}{1-x}$.

Eben so gut wie in der Aufgabe die Reihe $1 + x^2 + x^3$ in inf. zu summiren, ein Widerspruch liegt, wenn $x \geqq 1$ ist, könnte auch in dieser Aufgabe noch ein Widerspruch liegen, wenn $x < 1$ ist, welcher uns nur bei unserer Untersuchung entgangen wäre. Es ist daher durchaus nothwendig, die Richtigkeit des oben auf analytischem Wege gefundenen Resultates auch noch synthetisch nachzuweisen. Im vorliegenden Falle geht dieses freilich leicht an. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots . + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x},$$

also:

$$A \,.\, \frac{1}{1-x} = A \,.\, (1 + x + x^2 + \ldots . + x^{n-1}) + A \,.\, \frac{x^n}{1-x}.$$

Da dieses gilt, welche ganze Zahl n ist, so kann man auf beiden Seiten die Gränzen für $n = \infty$ nehmen, und erhält:

$$A \,.\, \frac{1}{1-x} = \lim A \,.\, (1 + x + x^2 + \ldots . x^{n-1}) + A \,.\, \lim \frac{x^n}{1-x}.$$

Ist aber $x < 1$, so ist $\lim \frac{x^n}{1-x} = 0$, daher

$$\begin{aligned} A \,.\, \frac{1}{1-x} &= \lim \, [A \,.\, (1 + x + x^2 + \ldots . + x^{n-1}) \\ &= A \,.\, (1 + x + x^2 + \ldots . x^n + \ldots . \text{ in inf.}) \end{aligned}$$

oder, da A jede Grösse bezeichnen kann:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots . + x^n + \ldots . \text{ in inf.}$$

Ich kann hier die Bemerkung nicht unterdrücken, dass streng genommen jede Auflösung einer Aufgabe, welche auf analytischem Wege, z. B. durch die Auflösung von Gleichungen gewonnen ist, noch eines synthetischen Beweises bedarf. Ich glaube, dass in dieser Hinsicht die Analogie zwischen unserm jetzigen analytischen Verfahren und der Analyse der Alten grösser ist, als man es gewöhnlich anzunehmen scheint. Wird z. B. eine Gerade gesucht, welche gewissen Bedingungen genügen soll, so nimmt man bei der Analyse der Alten bekanntlich an, man kennte diese Gerade schon. Aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe sucht man alsdann andere Bedingungen herzuleiten, denen man durch Konstruktion leichter genügen kann. Aus zwei Ursachen kann nun die auf die-

Digitized by Google

sem Wege gefundene Auflösung fehlerhaft sein; es kann nämlich einmal den Bedingungen der Aufgabe vielleicht gar nicht durch eine Gerade genügt werden, so dass schon in der ersten Annahme ein Fehler liegt; oder es können bei der Umformung der Bedingungen gewisse Bedingungen verloren gegangen sein, so dass zwar die konstruirte Gerade den abgeleiteten, aber nicht mehr den ursprünglichen Bedingungen der Aufgabe genügt. Bei dem jetzigen analytischen Verfahren liegt schon darin, dass man das Gesuchte durch ein einfaches oder zusammengesetztes Zeichen bezeichnet, eine selten a priori begründete Voraussetzung, die den Bedingungen der Aufgabe widersprechen kann, und dass dieser Widerspruch im Verlauf der Untersuchung sich nicht immer zu zeigen braucht, hat die Theorie der unendlichen Reihen genugsam gelehrt. Was den zweiten Punkt anbetrifft, so hat man immer festzuhalten, dass die durch die Analyse abgeleiteten Bedingungen zwar eine nothwendige Folgerung aus den ursprünglichen der Aufgabe, aber nicht umgekehrt letztere aus ersteren sind. Das Gesuchte muss den gefolgerten Bedingungen genügen, aber nicht alles, was den gefolgerten Bedingungen genügt, genügt auch sämmtlichen Bedingungen der Aufgabe. Hat man aber keine unstatthaften Voraussetzungen über die Natur des Gesuchten gemacht und kann man den gefolgerten Bedingungen nur durch eine einzige Grösse genügen, so muss diese auch sämmtlichen Bedingungen der Aufgabe genügen. Giebt es aber mehrere Grössen, die den gefolgerten Bedingungen genügen, so ist es immer noch zweifelhaft, ob auch alle gefundenen Grössen sämmtlichen Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Hat man endlich über die Natur des Gesuchten eine unstatthafte Annahme gemacht, so können durch diese gewisse Bedingungen der Aufgabe ersetzt sein, so dass auch dann die Bestimmtheit der Auflösung keinen Beweis für die Richtigkeit des Gefundenen abgiebt. Liegt z. B. die Aufgabe vor: einen Ausdruck $f(x)$ zu finden, welcher $= e^x$ ist, so muss dieser der Bedingung $f(2x) = f(x) . f(x)$ genügen. Macht man nun aber die unerlaubte Annahme, dass $f(x) = 1 + ax$ sei, so erhält man die identische Bedingungsgleichung $1 + 2ax = 1 + 2ax + x^2$. welcher durch $a = 0$ genügt wird, und man erhielte $f(x) = 1$, welches ganz bestimmte Resultat aber offenbar nicht mehr der ursprünglichen Aufgabe genügt.

§. 19. Ein Behandlungszeichen a heisst durch Annäherung gegeben, wenn eine Methode gegeben ist, mittelst welcher man eine rationale Zahl a' finden kann, so dass der absolute Werth von $a - a'$ kleiner ist als $\frac{1}{n}$, wie gross auch die ganze Zahl n angenommen wird. Ein durch Annäherung gegebenes Behandlungszeichen soll ein irrationales genannt werden, obgleich es auch einer rationalen Zahl gleich sein kann. Für irrationale Behandlungszeichen gelten alsdann folgende Lehrsätze.

I) Jedes irrationale Behandlungszeichen a ist eindeutig.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass aus $X = Y$ folgt $X.a = Y.a$ (§. 4. I.). Es sei a' ein bis auf $\frac{1}{n}$ angenäherter Werth von a und zwar, um die Begriffe festzustellen, $a' < a$ und X positiv, so ist $a' < a < a' + \frac{1}{n}$, also $X . a' \leqq X . a \leqq X . a' + X . \frac{1}{n}$, $Y . a'$

$+ Y.\frac{1}{n} \geqq Y.a \geqq Y.a'$. Da nun a' und $\frac{1}{n}$ als rationale Zahlen eindeutig sind, so ist $X.a' = Y.a'$, $X.\frac{1}{n} = Y.\frac{1}{n}$, also $-X.\frac{1}{n} \leqq X.a - Y.a \leqq X.\frac{1}{n}$, d. h. val. abs. $(X.a - Y.a) \leqq X.\frac{1}{n}$. Da nun $X.\frac{1}{n}$ dem absoluten Werthe nach kleiner sein kann als jede angebbare Grösse, so ist $X.a = Y.a$.

II) Jedes irrationale Behandlungszeichen ist eine Zahl.

Beweis. Es ist, wenn man die Bezeichnung des vorigen Satzes beibehält, zu zeigen, dass $(X \pm Y).a = X.a \pm Y.a$ (§. 4. II.). Nun ist $(X+Y).a' \leqq (X+Y).a \leqq (X+Y).(a'+\frac{1}{n})$ .... (1). Ferner $X.(a'+\frac{1}{n}) \geqq X.a \geqq X.a'$, $Y.(a'+\frac{1}{n}) \geqq Y.a \geqq Y.a'$; also, da a' und $a'+\frac{1}{n}$ Zahlen sind, $(X+Y).(a'+\frac{1}{n}) \geqq X.a + Y.a \geqq (X+Y).a'$....(2). Aus (1) und (2) folgt aber $-(X+Y).\frac{1}{n} \leqq (X+Y).a - (X.a + Y.a) \leqq (X+Y).\frac{1}{n}$; mithin, da $(X+Y).\frac{1}{n}$ kleiner sein kann, als jede angebbare Grösse, $(X+Y).a = X.a + Y.a$.

Ferner ist $X - Y + Y = X$, also $(X - Y + Y).a = X.a$, daher nach dem eben bewiesenen Satze $(X - Y).a + Y.a = X.a$; also $(X - Y).a = X.a - Y.a$.

III) Eine irrationale Zahl ist mit jeder Zahl m gleichartig, welche mit allen rationalen Zahlen gleichartig ist; also auch mit allen rationalen Zahlen selbst und demzufolge wieder mit allen irrationalen Zahlen.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $X.m.a = X.a.m$ (§. 4. III). Nun ist, wenn man der Einfachheit wegen m als positiv annimmt, $X.(a'+\frac{1}{n}).m \geqq X.a.m \geqq X.a'.m$, $X.m.a' \leqq X.m.a \leqq X.m.(a'+\frac{1}{n})$. Den Voraussetzungen des Lehrsatzes zu Folge ist aber $X.a'.m = X.m.a'$, $X.\frac{1}{n}.m = X.m.\frac{1}{n}$. Daher $X.m.\frac{1}{n} \geqq X.a.m - X.m.a \geqq -X.m.\frac{1}{n}$, also $X.a.m = X.m.a$.

IV) Eine jede irrationale Zahl ist entweder angebbar oder 0. Es giebt also keine irrationale Zahl, deren Produkt in eine angebbare Grösse $= 0$ ist, während eine andere Grösse mit ihr multiplicirt ein angebbares Produkt giebt.

Beweis. Ist E eine bestimmte angebbare, X eine willkühr- Grösse und ist $E.a = 0$, so ist, wenn a' ein auf $\frac{1}{n}$ angenäherter Werth von a ist und E als positiv betrachtet wird, $a - \frac{1}{n} < a'$

$-a < \frac{1}{n}$, also $-E.\frac{1}{n} < E.(a'-a) = E.a' - E.a < E.\frac{1}{n}$; mithin auch $-E.\frac{1}{p} < E.a' < E.\frac{1}{n}$. Da a' eine rationale Zahl ist, so kann man $a' = \pm\frac{p}{q}$ setzen, wo p und q absolute ganze Zahlen sind. Dann ist $-E.\frac{1}{n} < \pm E.p:q < E.\frac{1}{n}$, also $E.p:q < E.\frac{1}{n}$ oder $E.p.n < qE$. Da $p.n$ und q ganze Zahlen sind und E angebbar ist, so ist dieses nur möglich, wenn $p.n < q$, also $p:q < \frac{1}{n}$ ist. Es ist daher auch $-\frac{1}{n} < a' < +\frac{1}{n}$, also $-X.\frac{1}{n} \leqq X.a' \leqq X.\frac{1}{n}$. Aus einer frühern Bedingung folgt aber $-X.\frac{1}{n} \leqq X.a - X.a' \leqq X.\frac{1}{n}$, daher $-X.\frac{2}{n} \leqq X.a \leqq X.\frac{2}{n}$, was, da n beliebig gross sein kann, nur möglich ist, wenn $X.a = 0$ ist. Ist also a nicht angebbar, giebt also eine angebbare Grösse E in sie multiplicirt ein Product $= 0$, so ist das Product jeder Grösse in sie $= 0$, also $a = 0$.

§. 20. Es ist leicht zu beweisen, dass die Summe, die Differenz, das Product und der Quotient zweier Irrationalen wieder einer irrationalen Zahl gleich sind, deren angenäherte Werthe man erhält, wenn man die angenäherten Werthe der gegebenen Zahlen addirt, subtrahirt, multiplicirt oder dividirt, und dass man auf diese Weise die Annäherung beliebig weit treiben kann, ausser wenn der Divisor des Quotienten $= 0$ ist. Man kann also auch jeden rationalen Ausdruck aus rationalen oder irrationalen Zahlen, in welchem alle Divisoren von 0 verschieden sind, einer rationalen oder irrationalen Zahl gleich setzen, und im letztern Falle beliebig genau in rationalen Zahlen berechnen.

Im Allgemeinen folgt die Gleichheit zweier Behandlungszeichen erst dann, wenn man nachgewiesen hat, dass jede Grösse in sie multiplicirt gleiche Producte giebt. Rationale oder irrationale Zahlen sind aber schon gleich, wenn nur eine angebbare Grösse in sie multiplicirt gleiche Producte giebt. Sind nämlich a und b die beiden Zahlen, E eine angebbare Grösse, und ist $E.a = E.b$, so ist $E.a - E.b = E.(a-b) = 0$. $a - b$ ist aber ebenfalls einer rationalen oder irrationalen Zahl gleich und, da es nicht angebbar ist, nach §. 19. IV. $= 0$; also $a = b$.

Es ist ferner leicht zu zeigen, dass irrationale Zahlen gleich sind, wenn ihre angenäherten Werthe gleich sind.

§. 21. Ist $s = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots. a_n + \ldots.$ in inf., wo a_0, a_1, $a_2 \ldots. a_n \ldots.$ in inf. rationale oder irrationale Zahlen sind, ist ferner $\Delta_r = a_r + a_{r+1} + \ldots.$ in inf. und lässt sich endlich nachweisen, dass $\lim\limits^{r=\infty} \Delta_r = 0$, dass also $\Delta_r < \frac{1}{n}$ und $> -\frac{1}{n}$ sein kann, so ist es leicht zu beweisen, dass s einer irrationalen Zahl gleich ist, deren angenäherte Werthe a_0, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$ ...., in inf. sind. Umgekehrt lässt sich jede irrationale Zahl in eine Summe aus unendlich vielen Theilen verwandeln. Sind nämlich $a_0, a_1, a_2 \ldots.$ a_n in inf. die angenäherten Werthe von s, so ist $s = a_0 + (a_1 - a_0)$

$+ (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) \ldots$ in inf. oder auch $s = a_0 . \frac{a_1}{a_0} . \frac{a_2}{a_1} . \frac{a_3}{a_2} \ldots \frac{a_{n+1}}{a_n} \ldots$ in inf.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass, wenn $x = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ in inf., $y = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$ in inf. ist, und wenn x und y irrationalen Zahlen gleich sind (die Reihen convergiren), auch $x \pm y = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots$ in inf., $x . m = a_0 . m + a_1 . m + a_2 . m \ldots$ in inf., $x : m = a_0 : m + a_1 : m + a_2 : m \ldots$ in inf. ist, wenn m eine Zahl und im letzten Falle angebbar ist.

§. 22. Ist B eine angebbare Grösse und A mit B einstimmig, so lässt sich immer eine rationale oder irrationale Zahl finden, mit welcher B multiplicirt ein Product $= A$ giebt. Man kann bekanntlich eine dieser Bedingung genügende rationale Zahl finden, wenn A und B ein gemeinschaftliches Maass besitzen. Ist dieses nicht der Fall, so giebt es ein Vielfaches von B, welches grösser ist als $A . n$. Da kein Vielfaches von $B = A . n$ sein kann, so muss $A . n$ zwischen zwei auf einander folgenden Vielfachen von B, dem $r$fachen und $(r+1)$fachen liegen. Man hat dann:

$$B . r < A . n < B . (r+1) \text{ oder } A < B . \frac{r}{n} + B . \frac{1}{n},\ A > B . \frac{r}{n}.$$

Es ist dann erlaubt $A = B . \frac{r}{n} + \Delta$ zu setzen, wo $\Delta < B . \frac{1}{n}$ ist. Ebenso kann man setzen:

$$\Delta = B . \frac{r_1}{n^2} + \Delta_1, \text{ wo } r_1 < n,\ \Delta_1 < \frac{B}{n^2} \text{ ist}$$

$$\Delta_1 = B . \frac{r_2}{n^3} + \Delta_2, \text{ wo } r_2 < n,\ \Delta_2 < \frac{B}{n^3} \text{ ist}$$

$$\Delta_2 = B . \frac{r_3}{n^4} + \Delta_3, \text{ wo } r_3 < n,\ \Delta_3 < \frac{B}{n^4} \text{ ist}$$

in inf.

und erhält dann

$$A - B\left(\frac{r}{n} + \frac{r_1}{n^2} + \frac{r_2}{n^3} + \ldots \frac{r_\nu}{n^{\nu+1}}\right) = \Delta_\nu < \frac{B}{n^{\nu+1}},$$

also

$$A = B . \lim^{\nu = \infty}\left(\frac{r}{n} + \frac{r_1}{n^2} + \frac{r_2}{n^3} + \ldots \frac{r_\nu}{n^{\nu+1}}\right) = B . \left(\frac{r}{n} + \frac{r_1}{n^2} + \frac{r_2}{n^3} + \ldots \text{in inf.}\right)$$

Bezeichnet man die letzte Summe aus unendlich vielen Theilen mit s und die grösste der Zahlen r_1, r_2, r_3, in inf. mit ϱ, so ist $s > \frac{r}{n}$ und $s < \frac{r}{n} + \varrho\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \ldots \text{ in inf.}\right) = \frac{r}{n} + \frac{\varrho}{n . (n-1)}$. Da hier ϱ höchstens $n - 1$ sein kann, so ist $s > \frac{r}{n}$ und $s - \frac{r}{n} \leqq \frac{1}{n}$, mithin $\frac{r}{n}$ ein bis auf $\frac{1}{n}$ angenäherter Werth von s. Da man aber

Digitized by Google

n beliebig gross annehmen kann, so ist s eine Irrationalzahl. Wie dieser Satz auf positive und negative Grössen ausgedehnt werden kann, ist klar.

Sind a und b zwei rationale oder irrationale absolute Zahlen, so ist, wenn a nicht gleich b, eine von beiden Zahlen grösser als die andere. Denn bezeichnet E eine bestimmte positive Grösse, so sind auch $E.a$ und $E.b$ solche Grössen. Beide Grössen sind also entweder gleich oder eine von beiden ist grösser als die andere. Ist $E.a = E.b$, so ist auch $a = b$, es muss also eine von beiden grösser als die andere sein. Ist z. B. $E.a > E.b$, so ist $E.a - E.b = E.(a-b) =$ einer angebbaren positiven Grösse. Man kann also nach dem vorigen Satze $E.(a-b) = E.\delta$ setzen, wo δ eine absolute, angebbare rationale oder irrationale Zahl ist. Dann ist aber nach §. 20. $a - b = \delta$, also $a > b$.

E. Begriff der Potenz.

§. 23. Ist a irgend ein Behandlungszeichen, und n eine absolute ganze Zahl, so bezeichnet a^n bekanntlich ein Product aus n Factoren, welche sämmtlich $= a$ sind. a^n ist also ein Behandlungszeichen, welches anzeigt, dass mit einer Grösse n mal hinter einander die durch a angezeigte Behandlung vorgenommen werden soll.

Ist a ein angebbares Behandlungszeichen und $x+y-z$ einer absoluten Zahl gleich, so ist $a^{x+y-z} = a^x . a^y : a^z$. Für den Fall, dass $x+y-z$ Null oder einer negativen Zahl gleich ist, soll diese Gleichung als Definition der Potenz dienen, so dass also, vorläufig wenn x, y, z beliebige ganze Zahlen sind, $a^{x+y-z} = a^x . a^y : a^z$ ist.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass aus $a = b$, $\pm x \pm y \pm z = \pm x' \pm y' \pm z'$ folgt $a^{\pm x \pm y \pm z} = b^{\pm x' \pm y' \pm z'}$, wenn a angebbar ist.

§. 24. Ist a eine absolute, rationale oder irrationale Zahl und r eine ganze Zahl, so giebt es eine absolute, rationale oder irrationale Zahl w, welche der Bedingung $w^r = a$ genügt.

Beweis. Es sei n eine beliebige ganze Zahl; man bestimme die ganzen Zahlen $z, z_1, z_2 \ldots$ in inf. so, dass sie den Bedingungen:

$$z^r \leqq a < (z+1)^r$$

$$(z + \frac{z_1}{n})^r \leqq a < (z + \frac{z_1}{n} + \frac{1}{n})^r$$

$$(z + \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2})^r \leqq a < (z + \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \frac{1}{n^2})^r$$

$$(z + \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \frac{z_3}{n^3})^r \leqq a < (z + \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \frac{z_3}{n^3} + \frac{1}{n^3})^r$$

in inf.

genügen, so ist offenbar

$$(x+\frac{x_1}{n})^r < (x+1)^r \ldots\ldots x_1 < n$$

$$(x+\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n^2})^r < (x+\frac{x_1}{n}+\frac{1}{n})^r \ldots\ldots x_2 < n$$

$$(x+\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n^2}+\frac{x_3}{n^3})^r < (x+\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n^2}+\frac{1}{n^2})^r \ldots\ldots x_3 < n$$

in inf.

Setzt man

$$w_m = x+\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n^2}+\frac{x_3}{n^3}+\ldots\ldots\frac{x_m}{n^m},$$

so ist

$$w_m^r \leqq a < (w_m+\frac{1}{n^m})^r.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} a - w_m^r &< (w_m+\frac{1}{n^m})^r - w_m^r \\ &< (w_m+\frac{1}{n^m}-w_m)\cdot\frac{(w_m+\frac{1}{n^m})^r - w_m^r}{(w_m+\frac{1}{n})-w_m} \\ &< \frac{1}{n^m}\cdot\{(w_m+\frac{1}{n^m})^{r-1}+(w_m+\frac{1}{n^m})^{r-2}\cdot w_m \\ &\qquad + (w_m+\frac{1}{n^m})^{r-3}\cdot w^2_m+\ldots\ldots w_m^{r-1}\} \\ &< \frac{1}{n^m}\cdot r\cdot(w_m+\frac{1}{n^m})^{r-1} \ldots\ldots (\text{da } w_m < w_m+\frac{1}{n^m}) \\ &< \frac{r}{n^m}(x+1)^{r-1}\ldots\ldots(\text{da } w_m+\frac{1}{n^m} < x+1. \end{aligned}$$

Da $n > 1$, so folgt hieraus:

$$\lim^{m=\infty}(a - w_m^r) = 0$$

oder

$$a = \lim^{m=\infty}(w_m^r) = (\lim^{m=\infty} w_m)^r = w_\infty^r.$$

Um also die Richtigkeit des oben ausgesagten Satzes nachzuweisen, braucht nur noch gezeigt zu werden, dass $w_\infty =$ einer rationalen oder irrationalen Zahl sein muss. Es ist aber:

$$w_\infty = z + \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \ldots + \frac{z_m}{n^m} + \ldots \text{ in inf.}$$

$$\geqq z + \frac{z_1}{n}$$

$$\leqq z + \frac{z_1}{n} + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n^3} + \ldots \frac{n-1}{n^m} + \text{ in inf.} \ldots$$

(da $z_m < n$, also höchstens $= n - 1$)

$$\leqq z + \frac{z_1}{n} + \frac{n-1}{n^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

$$\leqq z + \frac{z_1}{n} + \frac{1}{n},$$

also $z + \frac{z_1}{n}$ ein bis auf $\frac{1}{n}$ angenäherter Werth von w. Da nun n eine beliebig grosse Zahl sein kann, so ist w_∞ eine irrationale und offenbar auch eine absolute Zahl.

Der z. B. von Ohm in seinem „Geist der Analysis" gegebene Beweis dieses Satzes scheint mir bei der hier eingeschlagenen Betrachtungsweise nicht vollkommen streng zu sein. Er stützt sich nämlich auf den Satz, dass $a < \sqrt[r]{b}$, wenn $a^r < b$, vorausgesetzt dass a und $\sqrt[r]{b}$ absolute Zahlen sind. Bei dem Beweise dieses Satzes muss man aber voraussetzen, dass $\sqrt[r]{b}$ entweder $>$, oder $=$ oder $< a$ ist, was hier nicht ohne Weiteres geschehen durfte. Ich glaubte deshalb obigem, freilich weitläuftigern Beweis den Vorzug geben zu müssen.

Bezeichnet a eine rationale oder irrationale absolute Zahl, so soll $\sqrt[r]{a}$ eine ähnliche Zahl bezeichnen, bestimmt durch die Bedingung $(\sqrt[r]{a})^r = a$. Ein anderes Behandlungszeichen als eine rationale oder irrationale absolute Zahl, welches dieser Bedingung genügt, soll durch $\sqrt[r]{\!\sqrt{a}}$ bezeichnet werden. Ist dann die rationale oder irrationale absolute Zahl $a = b$, so ist auch $\sqrt[r]{a} = \sqrt[r]{b}$.

Denn da $\sqrt[r]{a}$ und $\sqrt[r]{b}$ rationale oder irrationale absolute Zahlen sind, so ist nach §. 22., wenn $\sqrt[r]{a}$ nicht $= \sqrt[r]{b}$ ist, $\sqrt[r]{a} \gtrless \sqrt[r]{b}$. Daraus würde aber folgen $(\sqrt[r]{a})^r \gtrless (\sqrt[r]{b})^r$ oder $a \gtrless b$, gegen die Voraussetzung.

Es ist also $\sqrt[r]{a}$ ein eindeutiges Behandlungszeichen. Die übrigen Eigenschaften dieses Zeichens ergeben sich aus der Eigenschaft desselben eine rationale oder irrationale absolute Zahl zu sein.

Ist a ein anderes Behandlungszeichen als eine absolute, rationale oder irrationale Zahl, so soll $\sqrt[r]{a}$ ein Behandlungszeichen sein, welches der Bedingung $(\sqrt[r]{a})^r = a$ genügt. $\sqrt[r]{a}$ zeigt also eine solche Behandlung der Grösse X an, durch deren $r$malige

Wiederholung die Grösse $X . a$ entsteht. Gieht es mehrere Behandlungen, welche dieser Bedingung genügen, so soll $\sqrt[r]{a}$ nur eine dieser Behandlungen bezeichnen, so dass $\sqrt[r]{a}$ immer ein eindeutiges Behandlungszeichen ist.

§. 25. Ist $x . y : z =$ einer ganzen Zahl, so ist $a^{x . y : z} = \sqrt[z]{(a^x)^y}$. Für den Fall, dass $x . y : z$ keiner ganzen Zahl, sondern einem Bruch gleich ist, soll diese Gleichung zur Definition der Potenz mit gebrochenen Exponenten dienen. Ist a eine rationale oder irrationale, absolute Zahl, so ist $a^{x . y : z}$ einer ähnlichen gleich. Unter derselben Voraussetzung, und wenn man die oben gegebene Bedeutung des Zeichens $\sqrt{}$ festhält, ergieht sich auch, dass $a^{x . y : z} = b^{x' . y' : z'}$, wenn $a = b$, $x . y : z = x' . y' : z'$ ist. Dass überhaupt die gewöhnlichen Sätze über Potenzen für solche Potenzen ganz allgemein gelten, leuchtet leicht ein.

§. 26. Ist x eine irrationale Zahl, so kann nach dem Frühern $x = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots . m_n + \ldots .$ in inf. gesetzt werden. Ist alsdann x auch einer rationalen Zahl gleich, so ist

$$a^x = a^{m_0} . a^{m_1} . a^{m_2} . a^{m_3} \ldots . a^{m_n} \ldots . \text{ in inf.}$$
$$= \lim_{n=\infty} (a^{m_0} . a^{m_1} . a^{m_2} \ldots . a^{m_n})$$

wenn a eine absolute, rationale oder irrationale Zahl ist.

Der Beweis kann hier übergangen werden, da später noch ein Beweis vorkommt, der dem Beweise dieses Satzes ganz ähnlich ist. Für den Fall, dass x keiner rationalen Zahl gleich ist, soll obige Gleichung als die Definition der Potenz a^x gelten.

Ist a eine absolute, rationale oder irrationale, angebbare Zahl, so ist auch a^x eine absolute, rationale oder irrationale Zahl.

Beweis. Es sei $m_0 + m_1 + m_2 + \ldots . m_n = x_n$, $m_{n+1} + m_{n+2} + \ldots .$ in inf. $= \Delta_n$, und um einen bestimmten Fall vor sich zu haben, sei $a > 1$; dann ist $a^x = a^{x_n} . a^{\Delta_n}$, also $a^x - a^{x_n} = a^{x_n}(a^{\Delta_n} - 1)$. Da x_n ein angenäherter Werth von x und $x - x_n = \Delta_n$ ist, so kann man n so gross nehmen, dass val. abs. $\Delta_n < \frac{1}{r}$, wo r eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Dann ist $\frac{1}{a^{\frac{1}{r}}} < a^{\Delta_n} < a^{\frac{1}{r}}$. Da $a^{\frac{1}{r}} > 1$ ist, so kann man $a^{\frac{1}{r}} = 1 + \delta$ setzen, wo δ eine positive Zahl bezeichnet. Es ist dann $a = (1 + \delta)^r > 1 + r\delta$, also $\delta < \frac{a-1}{r}$. Nimmt man also r gross genug, so kann δ kleiner sein, als jede angebbare absolute Zahl. Ferner ist $\frac{1}{a^{\frac{1}{r}}} = \frac{1}{1+\delta} = 1 - \frac{\delta}{1+\delta} = 1 - \delta'$, wo die positive Zahl δ' ebenfalls kleiner sein kann, als jede angebbare positive Zahl. Es ist dann also $1 - \delta' < a^{\Delta_n} < 1 + \delta$ oder $- \delta' < a^{\Delta_n} - 1 < + \delta$; mithin val. abs. $(a^x - a^{x_n}) < a^{x_n}\delta$. Hieraus geht hervor, dass a^{x_n} ein beliebig nah angenäherter Werth von a^x sein kann, und da man a^{x_n} be-

Digitized by Google

liebig nahe in einer rationalen Zahl ausdrücken kann, so gilt dasselbe für a^x.

Ist $a < 1$, so ist $\frac{1}{a} > 1$ und $a^x = 1 : \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Da nun $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ eine irrationale Zahl ist, so gilt dasselbe für $1 : \left(\frac{1}{a}\right)^x$ oder für a^x.

Ist die irrationale Zahl $x = y$, oder sind x und y verschiedene Reihenentwickelungen einer und derselben irrationalen Zahl und ist die angebbare, absolute, rationale oder irrationale Zahl $a = b$, so ist $a^x = b^x$.

Beweis. Sind x_n, y_n zwei bis auf $\frac{1}{n}$ angenäherte Werthe von x und y und zwar z. B. kleiner als diese, so ist $x_n < x < x_n + \frac{1}{n}$, $y_n < y < y_n + \frac{1}{n}$, also, da $y = x$, $x_n - y_n - \frac{1}{n} < 0$, $x_n - y_n + \frac{1}{n} > 0$; mithin val. abs. $(x_n - y_n) < \frac{1}{n}$. Ferner ist $a^{x_n} - a^{y_n} = a^{y_n}(a^{x_n - y_n} - 1)$. Da nun $x_n - y_n$ dem absoluten Werthe nach kleiner sein kann als jede angebbare Zahl, so lässt sich auf ähnliche Weise wie in dem vorigen Beweise zeigen, dass dasselbe von $a^{x_n - y_n} - 1$, also auch von $a^{x_n} - a^{y_n}$ gilt. Man kann also setzen, da $a^{y_n} = b^{y_n}$:

$$-\frac{1}{r} < a^{x_n} - b^{y_n} < +\frac{1}{r}$$

und ebenso:

$$-\frac{1}{r} < a^x - a^{x_n} < +\frac{1}{r}$$

$$-\frac{1}{r} < b^{y_n} - b^y < +\frac{1}{r},$$

also

$$-\frac{3}{r} < a^x - b^y < +\frac{3}{r},$$

woraus unmittelbar die Gleichheit von a^x und b^y folgt.

Die bekannten Sätze über Potenzen lassen sich dann auch leicht auf Potenzen mit irrationalen Exponenten ausdehnen. Ist z. B. $x = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots$ in inf., $y = n_0 + n_1 + n_2 + \ldots$ in inf., so ist

$$a^x . a^y = a^{m_0} . a^{m_1} . a^{m_2} + \ldots \text{ in inf. } a^{n_0} . a^{n_1} . a^{n_2} \ldots \text{ in inf.}$$

$$= a^{m_0 + n_0 + m_1 + n_1 + m_2 + n_2 \ldots \text{ in inf.}}$$

$$= a^{x+y},$$

$$(a^x)^y = (a^x)^{n_0 + n_1 + n_2 \ldots \text{ in inf.}} = (a^x)^{n_0} . (a^x)^{n_1} . (a^x)^{n_2} . \text{ in inf.}$$

$$= a^{x(n_0 + n_1 + n_2 \ldots \text{ in inf.})} = a^{x \cdot y}$$

etc. etc.

und es ist einleuchtend, dass diese Sätze streng allgemein gelten, so lange man das oben über die Bedeutung dieser Potenzen Gesagte genau festhält.

Digitized by Google

F. Imaginäre Grössen und Zahlen.

§. 27. In dem Frühern wurde keine besondere Art von Grössen betrachtet, sondern die Untersuchungen gelten für alle Dinge, welche den früher angegebenen Grundsätzen genügten. So bald aber von einer solchen Behandlung der Einheit die Rede ist, die nur auf eine besondere Art von Grössen Anwendung findet oder bis jetzt gefunden hat, wird es auch erlaubt sein, die Betrachtung auf diese Art von Grössen einzuschränken. Dieses ist aber bei der durch imaginäre Zahlen vorgeschriebenen Behandlung der Einheit der Fall, die nur bei einer besondern Art von räumlichen Grössen ausführbar ist.

§. 28. Soll die Lage eines Punktes A auf einer unbegränzt gedachten, geraden oder krummen Linie bestimmt werden, so dass man den Punkt A mit Bestimmtheit von allen andern Punkten dieser Linie unterscheiden kann, so muss man die Lage eines andern Punktes O dieser Linie als bekannt voraussetzen. Ist dann die geradlinige oder krummlinige Entfernung OA gegeben, so kann die Lage des Punktes A im Allgemeinen noch eine zweifache sein. Um diese Zweideutigkeit aufzuheben, denke man sich noch einen zweiten Punkt M der Linie gegeben, der eine grössere Entfernung von O als A hat. Um nun den Punkt A zu erhalten, muss man von O aus die Entfernung OA entweder so abtragen, dass sie die Entfernung MO vergrössert oder dass sie dieselbe verkleinert. Im ersten Falle kann man alsdann die Entfernung als eine positive, im zweiten als eine negative Grösse betrachten. Bekanntlich nennt man diese, positiv oder negativ gedachte Entfernung die Coordinate des Punktes A. Eine Linie, deren Punkte man sich durch Coordinaten bestimmt denkt, heisst eine Coordinaten-Achse und man unterscheidet in ihr die positive und die negative Halbachse.

Sind X, X' die Coordinaten der Punkte A und A', so ist ganz allgemein $MA = MO + X$, $MA' = MO + X'$; daher $AA' =$ val. abs. $(MA - MA') =$ val. abs. $(X - X')$.

Es seien O und O' zwei Anfangspunkte der Coordinaten auf derselben Achse, X und X' die Coordinaten von A in Bezug auf O und O', und es sei X_0 die Coordinate von O' in Bezug auf den Anfangspunkt O. Setzt man voraus, dass in beiden Systemen das Zeichen der Coordinaten mit Hülfe desselben Punktes M bestimmt sei, der also nicht zwischen den Punkten O, O'. A liegen darf, so ist streng allgemein $MA = MO + X$, $MA = MO' + X' = MO + X_0 + X'$; also $X = X_0 + X'$.

Um die Lage eines Punktes A in einer Ebene zu bestimmen, setzt man bekanntlich die Lage zweier sich in demselben Anfangspunkte O rechtwinklig schneidenden Coordinatenachsen als bekannt voraus. Denkt man sich alsdann durch A zwei Parallelen zu den beiden Achsen gezogen, so ist die Lage derselben, also auch die Lage ihres Durchschnittspunktes A vollkommen gegeben und bestimmt, wenn man die Coordinaten der Durchschnitte dieser Parallelen mit den beiden Achsen kennt. Diese beiden Coordinaten X und Y nennt man bekanntlich auch die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes A.

Es seien X, Y; (X), (Y);. X', Y' die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf drei Coordinatensysteme mit parallelen und gleich gerichteten Halbachsen, deren Anfangspunkte O, (O), O' sind.

(O) liege auf der Achse der X und seine Coordinate in Bezug auf O sei X_0; O' liege auf der Achse der (Y) und seine Coordinate in Bezug auf (O) sei Y_0, so sind X_0, Y_0 die Coordinaten von O' in Bezug auf O. Es ist dann

$$X = X_0 + (X), \quad (X) = X'$$
$$Y = (Y) \qquad (Y) = Y_0 + Y'$$

daher

$$X = X_0 + X', \quad Y = Y_0 + Y'.$$

§. 29. Begränzte Gerade, die man sich von einem und demselben Anfangspunkte aus in derselben Ebene nach verschiedenen Richtungen gezogen denkt, sollen Strahlen genannt werden. Verschiedene Strahlen können sich durch ihre verschiedene absolute Länge und auch durch ihre verschiedene Richtung unterscheiden. Sieht man den Anfangspunkt der Strahlen auch als Anfangspunkt der Coordinaten an, so ist der Strahl vollkommen bestimmt und gegeben, wenn die Coordinaten seines Endpunktes gegeben sind.

Sind die Coordinaten des Endpunktes eines Strahls in Bezug auf den Anfangspunkt A und B, zieht man durch einen Punkt M, dessen Coordinaten X_0, Y_0 sind, eine Gerade MN, welche mit dem gegebenen Strahl gleiche Richtung und Länge hat, so sind die Coordinaten des Punktes N in Bezug auf ein durch M gelegtes, dem anfänglichen paralleles Achsensystem ebenfalls A und B. In Bezug auf das anfängliche Achsensystem selbst sind daher die Coordinaten des Punktes N $X_0 + A$, $Y_0 + B$.

Für solche Strahlen sollen folgende Definitionen gelten:

I) Zwei Strahlen sind gleich, wenn sie gleiche Längen haben und von demselben Anfangspunkt nach derselben Richtung laufen, wenn sie also i entisch sind.

II) Es seien OA_1 und OA_2 zwei Strahlen. Zieht man von A_1 eine Gerade A_1A_3, welche mit dem Strahl OA_2 gleiche Richtung und Länge hat, so nennt man den Strahl OA_3 die Summe der Strahlen OA_1 und OA_2 (Str. OA_3 = Str. OA_1 + Str. OA_2). Zieht man von A_1 eine Gerade A_1A_4, welche mit dem Strahl OA_2 gleiche Länge, aber die entgegengesetzte Richtung hat, so nennt man den Strahl OA_4 die Differenz der Strahlen OA_1 und OA_2 (Str. OA_4 = Str. OA_1 − Str. OA_2).

Um die Summe zweier Strahlen zu construiren braucht man daher nur aus diesen beiden Strahlen das Parallelogramm zu construiren; die durch O gehende Diagonale desselben ist die Summe. Um die Differenz zu finden, muss man ein Parallelogramm aus OA_1 und dem Entgegengesetzten von OA_2 construiren; die durch O gehende Diagonale desselben ist alsdann die Differenz.

Es muss nun noch gezeigt werden, dass Strahlen den in §. 2. aufgestellten Grundsätzen genügen, dass sie also als Grössen betrachtet werden dürfen. Die Richtigkeit von I) und II) ergiebt sich unmittelbar und die Beweise der übrigen Sätze sind einander ganz ähnlich. Um z. B. zu zeigen, dass

$$\text{St. } OA_1 + (\text{Str. } OA_2 \pm \text{Str. } OA_3) = \text{Str. } OA_1 + \text{Str. } OA_2 \pm \text{Str. } OA_3,$$

bezeichne man die Coordinaten von A_1, A_2, A_3 mit X_1, Y_1; X_2,

Y_2; X_1, Y_1. Die Coordinaten des Endpunktes des dem Strahle OA_1 entgegengesetzten Strahles sind dann $-X_1$, $-Y_1$. Aus der Erklärung der Summe und Differenz zweier Strahlen in Verbindung mit dem im Anfange dieses Paragraphen bewiesenen Satze folgt dann, dass der Endpunkt von

$$\text{Str. } OA_1 + (\text{Str. } OA_2 \pm \text{Str. } OA_3)$$
$$\text{Str. } OA_1 + \text{Str. } OA_2 \pm \text{Str. } OA_3$$

respective

die Coordinaten $X_1 + (X_2 \pm X_3)$, $Y_1 + (Y_2 \pm Y_3)$
die Coordinaten $X_1 + X_2 \pm X_3$, $Y_1 + Y_2 \pm Y_3$

hat. Die Endpunkte der, durch die beiden in Rede stehenden Ausdrücke bezeichneten Strahlen haben also gleiche Coordinaten oder fallen zusammen; die Strahlen selbst sind also gleich.

Strahlen, welche verschiedene Richtung haben, können natürlich nicht mehr als einstimmige Grössen betrachtet werden (§. 10.). Strahlen, welche dieselbe Richtung haben, genügen indessen, wie leicht zu ersehen, den in §. 10. aufgestellten Grundsätzen und dürfen daher als einstimmige Grössen betrachtet werden.

§. 30. Wird ein Strahl mit einem absoluten Behandlungszeichen multiplicirt, so ist das Product ein Strahl, welcher mit dem Multiplicanden dieselbe Richtung hat. Dieses findet also namentlich statt, wenn der Multiplicator eine absolute rationale oder eine irrationale Zahl ist, deren angenäherte Werthe absolute Zahlen sind. Wird ein Strahl mit einer negativen Zahl multiplicirt, so ist, wie leicht zu ersehen, das Product ein Strahl in der entgegengesetzten Richtung des Multiplicanden. Es muss nun zunächst der Begriff solcher Behandlungszeichen entwickelt werden, mit welchen multiplicirt der Strahl eine andere Richtung erhält.

Man denke sich um den Anfangspunkt der Strahlen mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis beschrieben, dessen Umfang von der Richtung eines Strahls R in einem bestimmten Punkt A_0 geschnitten wird. Den Punkt A_0 kann man als den Anfangspunkt der Bogencoordinaten auf dem Umfange des Kreises ansehen und willkührlich feststellen, nach welcher Seite die positiven Coordinaten genommen werden sollen. Wird aber durch O zugleich ein rechtwinkliges Achsensystem gelegt, so sollen die positiven Bogencoordinaten nach der Seite liegen, nach welcher man die positive Halbachse der X drehen muss, um auf dem kürzesten Wege nach der positiven Halbachse der Y zu gelangen.

Die Richtung eines andern Strahls ist alsdann vollkommen bestimmt, wenn man die Bogencoordinate des Punktes A kennt, in welchem der in Rede stehende Kreisumfang von der Richtung des Strahls geschnitten wird. Die Coordinate des Punktes A in Bezug auf A_0 ist aber gleich dem Producte des Halbmessers in eine positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl φ. Diese Zahl φ soll in dem Folgenden der beschriebene Winkel der Richtung OA in Bezug auf OA_0 genannt werden. Es ist klar, dass der beschriebene Winkel einer Richtung in Bezug auf eine andere unendlich viele von einander verschiedene Werthe haben kann.

Das Behandlungszeichen ε soll anzeigen, dass ein Strahl bei unveränderter Länge nach der positiven Seite der Bogencoordi-

Digitized by Google

naten um einen Winkel gedreht werden soll, dessen Bogen dem Halbmesser gleich ist. Bezeichnet R einen beliebigen Strahl, so bezeichnet $R.\varepsilon$ einen Strahl von gleicher Länge, welcher mit R den beschriebenen Winkel $+1$ bildet. Ist n eine absolute ganze Zahl, so schreibt nach der Erklärung der Potenz ε^n eine $n$malige Wiederholung der durch ε angezeigten Behandlung, also eine Drehung des Strahls um den beschriebenen Winkel $+n$ vor. $\varepsilon^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{\varepsilon}$ schreibt eine Behandlung der Einheit vor, durch deren $r$malige Wiederholung eine Drehung des Strahls um den Winkel $+1$ entsteht. Dieser Bedingung genügt unter andern die Drehung des Strahls um den beschriebenen Winkel $+\frac{1}{r}$ und da einer frühern Bemerkung zu Folge das Zeichen $\sqrt[r]{\varepsilon}$ oder $\varepsilon^{\frac{1}{r}}$ immer eine bestimmte Bedeutung haben soll, so soll gerade diese Drehung des Strahls um den beschriebenen Winkel $+\frac{1}{r}$ durch das Zeichen $\varepsilon^{\frac{1}{r}}$ oder $\sqrt[r]{\varepsilon}$ angezeigt werden. Nach der Definition der Potenz schreibt alsdann $\varepsilon^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{\varepsilon^n}$ eine Drehung des Strahls um den beschriebenen Winkel $+\frac{n}{r}$ vor. Ist φ eine irrationale positive Zahl und $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$ in inf., so ist nach einer frühern Definition $\varepsilon^{\varphi} = \varepsilon^{\varphi_0} . \varepsilon^{\varphi_1} . \varepsilon^{\varphi_2} +$ in inf. ε^{φ} schreibt also eine Drehung des Strahls um den Winkel $\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$ in inf. $= \varphi$ vor. Das Zeichen $\varepsilon^{\varphi-\psi}$, wo φ und ψ rationale oder irrationale positive Zahlen sind und $\varphi - \psi$ positiv, 0 oder negativ sein kann, muss alsdann eine Drehung des Strahls um den beschriebenen Winkel $\varphi - \psi$ anzeigen. Denn bezeichnet x eine solche Drehung um $\varphi - \psi$, so ist offenbar $x . \varepsilon^{\psi} = \varepsilon^{\varphi}$, also, da ε^{ψ} angebbar, $\varepsilon = \varepsilon^{\varphi} : \varepsilon^{\psi} = \varepsilon^{\varphi-\psi}$.

Ist also x eine beliebige positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl, so ist ε^x ein Behandlungszeichen, welches eine Drehung eines Strahls um den beschriebenen Winkel x vorschreibt.

Aus der Lehre von den Potenzen, oder auch unmittelbar aus dem eben hergeleiteten Satze ergiebt sich dann leicht die Richtigkeit folgender Sätze:

$$\text{I) } \varepsilon^x . \varepsilon^y = \varepsilon^{x+y}, \quad \text{II) } \varepsilon^x : \varepsilon^y = \varepsilon^{x-y}, \quad \text{III) } (\varepsilon^x)^y = \varepsilon^{x \cdot y}.$$

§. 31. In Bezug auf die §. 5. angegebene Eintheilung der Behandlungszeichen ergeben sich für ε^x folgende Bestimmungen.

I) ε^x ist ein eindeutiges Behandlungszeichen.

Denn ist der Strahl $R = R_1$, fallen also beide Strahlen zusammen, so fallen diese Strahlen auch noch zusammen, wenn man beide um den Winkel x dreht. Die durch $R . \varepsilon^x$ und $R_1 . \varepsilon^x$ dargestellten Strahlen fallen also zusammen oder sind gleich.

II) ε^x ist eine Zahl.

$R + R_1$ ist die Diagonale des aus den Strahlen R und R_1 construirten Parallelogramms. $(R + R_1) . \varepsilon^x$ erhält man, wenn man diese Diagonale um den Winkel x dreht. Denkt man sich das ganze Parallelogramm mitgedreht, so erscheint $(R + R_1) . \varepsilon^x$ als

Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten durch $R.\varepsilon^x$, $R_1.\varepsilon^x$ dargestellt werden können. Man hat also offenbar $(R+R_1).\varepsilon^x = R.\varepsilon^x + R_1.\varepsilon^x$, woraus sich dann auch leicht $(R-R_1).\varepsilon^x = R.\varepsilon^x - R_1.\varepsilon^x$ ergiebt.

III) ε^x ist mit allen positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen Zahlen und auch mit ε^y gleichartig.

Ist R irgend ein Strahl und a eine positive, rationale oder irrationale Zahl, so haben $R.a.\varepsilon^x$ und $R.\varepsilon^x.a$ gleiche Länge. Sie haben aber auch dieselbe Richtung, da die Richtung beider aus der von R durch Drehung um den Winkel x entsteht. Es ist also $R.a.\varepsilon^x = R.\varepsilon^x.a$.

$R.\varepsilon^x.(-a)$ und $R.(-a).\varepsilon^x$ sind die entgegengesetzten Strahlen von $R.\varepsilon^x.a$ und $R.a.\varepsilon^x$. Da letztere gleich sind, so müssen auch erstere gleich sein.

$R.\varepsilon^x.\varepsilon^y = R.\varepsilon^{x+y}$, $R.\varepsilon^y.\varepsilon^x = R.\varepsilon^{y+x}$. Da nun $x+y = y+x$ ist, so ist auch $R.\varepsilon^x.\varepsilon^y = R.\varepsilon^y.\varepsilon^x$.

IV) ε^x ist immer angebbar.

Denn jeder angebbare Strahl bleibt angebbar, wenn er auch um einen gewissen Winkel gedreht wird.

§. 32. Bezeichnet n eine positive oder eine negative ganze Zahl, so ist $R.\varepsilon^{2n\pi} = R = R.1$, also, da dieses für jeden Werth von R gilt, $\varepsilon^{2n\pi} = 1$. Ferner ist $\varepsilon^{2n\pi+x} = \varepsilon^{2n\pi}.\varepsilon^x = \varepsilon^x$. Da $R.\varepsilon^\pi = R.-1$ ist, so ist auch $\varepsilon^\pi = -1$, also auch $\varepsilon^{(2n+1).\pi} = \varepsilon^{2n\pi+\pi} = -1$. Bezeichnet man $\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$, d. h. die Drehung um einen rechten Winkel nach der positiven Seite mit i, so ist auch $\varepsilon^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}} = i$ und $\varepsilon^{(2n+1).\pi+\frac{\pi}{2}} = -i$. Endlich ist $i^2 = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}}.\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} = \varepsilon^{+\pi} = -1$, $(-i)^2 = \varepsilon^{\frac{3\pi}{2}}.\varepsilon^{\frac{3\pi}{2}} = \varepsilon^{3\pi} = -1$.

Bezeichnet A einen beliebigen Strahl, so kann man jeden andern von demselben Anfangspunkte ausgehenden Strahl durch ein Product von der Form $A.r.\varepsilon^\varphi$ bezeichnen, wo r eine absolute, rationale oder irrationale Zahl und φ ein positiver oder negativer beschriebener Winkel ist. Die Zahlen $r.\varepsilon^\varphi$ und $r'.\varepsilon^{\varphi'}$ sind immer, aber auch nur dann einander gleich, wenn $r = r'$ und $\varphi - \varphi' = 2n\pi$ ist, wo n eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 bezeichnet. Denn immer, aber auch nur unter dieser Voraussetzung, haben die durch $A.r.\varepsilon^\varphi$ und $A.r'.\varepsilon^{\varphi'}$ bezeichneten Strahlen gleiche absolute Länge ($A.r$ und $A.r'$) und gleiche Richtung. Eine Zahl von der Form $r.\varepsilon^\varphi$ heisst eine imaginäre Zahl, sie wird eine reelle, wenn $\varphi = n.\pi$, wo n eine ganze Zahl oder 0 ist. r heisst bekanntlich der Modulus von $r.\varepsilon^\varphi$.

§. 33. Da r und ε^φ gleichartige Zahlen und ε^φ eine Potenz ist, so kann man mit imaginären Zahlen gerade so rechnen, wie mit andern Ausdrücken von ähnlicher Gestalt. Man hat daher

$$r.\varepsilon^\varphi \times r'.\varepsilon^{\varphi'} \times r''.\varepsilon^{\varphi''} \ldots = rr'r'' \ldots \varepsilon^{\varphi+\varphi'+\varphi''} \ldots,$$

$$r\varepsilon^\varphi : (r'\varepsilon^{\varphi'}) = \frac{r}{r'}.\varepsilon^{\varphi-\varphi'},$$

wenn r' angebbar etc. etc.

Die bekannten Sätze über die vielförmigen Wurzeln lassen

sich mit Leichtigkeit aus den aufgestellten Begriffen entwickeln.

$x = \sqrt[n]{(r \,.\, \varepsilon^{\varphi})}$ bezeichnet bekanntlich irgend eine der reellen oder imaginären Zahlen, bestimmt durch die Gleichung $x^n = r \,.\, \varepsilon^{\varphi}$. Da x eine reelle oder imaginäre Zahl sein kann, so muss $x = \varrho \,.\, \varepsilon^{\psi}$ sein. Es wird dann aus obiger Gleichung $\varrho^n \,.\, \varepsilon^{n\psi} = r \,.\, \varepsilon^{\varphi}$. Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn $\varrho^n = r$, $n\psi - \varphi = 2\nu\pi$ ist, woraus $\varrho = \sqrt[n]{r}$, $\psi = \frac{2\nu\pi + \varphi}{n}$ folgt. Hieraus ergiebt sich $\sqrt[n]{(r\varepsilon^{\varphi})} = \sqrt[n]{r} \,.\, \varepsilon^{\frac{2\nu\pi + \varphi}{n}}$, welcher Ausdruck, da man für ν jede positive oder negative ganze Zahl, so wie auch 0 setzen kann, bekanntlich n von einander verschiedene Werthe haben kann.

§. 34. Die imaginären Zahlen lassen sich auch unter einer andern, bemerkenswerthen Form darstellen. Es sei A derjenige Strahl, welcher als Einheit aller andern von demselben Anfangspunkte ausgehenden betrachtet werden soll. Man lasse die positive Halbachse der X mit der Richtung dieses Strahls zusammenfallen und bestimme die Richtung der positiven Halbachse der Y nach der in §. 30. gemachten Bemerkung. Ist nun $R = A \,.\, r\varepsilon^{\varphi}$ irgend ein anderer Strahl, so kann man die Coordinaten des Endpunktes desselben oder die Projectionen desselben auf die Achse der X und Y durch $A \,.\, x$ und $A \,.\, y$ bezeichnen, wo x und y positive oder negative, rationale oder irrationale Zahlen sind. Diese Projectionen kann man aber ebenfalls als Strahlen betrachten und als Producte von A in imaginäre Zahlen darstellen. Es ist einleuchtend, dass ganz allgemein die Projection auf die Achse der $X = A \,.\, x$; die auf die Achse der $Y = A \,.\, y \,.\, \varepsilon^{\frac{\pi}{2}} = A \,.\, y \,.\, i$ sein muss. Da aber R die Summe seiner als Strahlen gedachten Projectionen sein muss, so ist $A \,.\, r\varepsilon^{\varphi} = A \,.\, x + A \,.\, yi = A \,.\, (x + y \,.\, i)$.

Ist nun A angebbar, so folgt hieraus $r\varepsilon^{\varphi} = x + y \,.\, i$. Denn da $x + y \,.\, i$ als Summe zweier imaginären Zahlen, wie leicht zu beweisen, wieder eine imaginäre Zahl $r' \,.\, \varepsilon^{\varphi'}$ sein muss, so kann man obige Gleichung auch schreiben $A \,.\, r\varepsilon^{\varphi} = A \,.\, r'\varepsilon^{\varphi'}$. Dieses ist aber nur dann möglich, wenn $A \,.\, r = A \,.\, r'$, also $r = r'$ und $\varphi - \varphi' = 2\nu\pi$ oder $\varepsilon^{\varphi} = \varepsilon^{\varphi'}$, daher $r\varepsilon^{\varphi} = r'\varepsilon^{\varphi'}$ ist.

Da dem Frühern gemäss $i^2 = -1$ ist, so kann man auch $i = \sqrt{-1}$ setzen, wenn man bestimmt, dass $\sqrt{-1}$ gerade die Zahl $i = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$ und nicht $-i = \varepsilon^{-\frac{\pi}{2}} = \varepsilon^{\frac{3\pi}{2}}$ bedeuten soll.

Bekanntlich sind diejenigen positiven und negativen, rationalen oder irrationalen Zahlen, mit denen man die absolute Länge eines Strahls multipliciren muss, um seine Projectionen auf die Achse der X und Y zu erhalten, unabhängig von der Länge des Strahls und allein abhängig von seinem beschriebenen Winkel φ. Man bezeichnet sie deshalb mit Cos φ und Sin φ. Man hat also

$$A \,.\, x = (\text{val. abs. } R) \,.\, \text{Cos}\, \varphi \qquad A \,.\, y = (\text{val. abs. } R) \,.\, \text{Sin}\, \varphi$$

$$= A \,.\, r \,.\, \text{Cos}\, \varphi \qquad\qquad = A \,.\, r\ \text{Sin}\, \varphi$$

oder

$$x = r \,.\, \text{Cos}\, \varphi \qquad\qquad y = r \,.\, \text{Sin}\, \varphi.$$

Digitized by Google

Es ist daher

$$r\varepsilon^{\varphi} = r(\text{Cos } \varphi + i \text{ Sin } \varphi).$$

Mit diesen Ausdrücken kann man, wie aus dem Frühern erhellet, ebenso rechnen, als wenn i irgend eine reelle Zahl wäre, nur muss man der Bedeutung von i gemäss $i^2 = -1$ setzen.

Aus der Gleichung $x + i . y = x' + i . y'$ folgt, wenn A irgend einen Strahl bezeichnet, $A . (x + i . y) = A . (x' + i . y')$. Die durch diese Ausdrücke bezeichneten Strahlen sind aber nur dann gleich, wenn die Coordinaten ihrer Endpunkte gleich sind, d. h. wenn $A . x = A . x'$, $A . y = A . y'$ oder $x = x'$, $y = y'$ ist. Es ist hierbei vorausgesetzt, dass x, x', y, y' reelle Zahlen sind, indem sonst nicht $A . x$, $A . x'$, $A . y$, $A . y'$ die Bedeutung von Coordinaten haben könnten. Es ist also namentlich, wenn $(x + y . i) = r . (\text{Cos } \varphi + i \text{ Sin } \varphi)$, auch $x = r \text{ Cos } \varphi$, $y = r \text{ Sin } \varphi$.

§. 35. Von den vielfachen Anwendungen der obigen Betrachtungen möge hier nur die allgemeine Herleitung der Formeln für $\text{Cos}(\varphi + \varphi')$ und $\text{Sin}(\varphi + \varphi')$ eine Stelle finden. Es seien A, R, R' drei Strahlen von gleicher absoluter Länge; der beschriebene Winkel von R in Bezug auf A sei φ, der von R' in Bezug auf R sei φ' und der von R' in Bezug auf A sei ψ. Es ist dann nach der in §. 28. hergeleiteten Formel $\psi = \varphi + \varphi'$. Aus den früher entwickelten Begriffen ergiebt sich aber

$$R = A . \varepsilon^{\varphi},\ R' = A . \varepsilon^{\psi},\ R' = R . \varepsilon^{\varphi'} = A . \varepsilon^{\varphi} . \varepsilon^{\varphi'},$$

also

$$A . \varepsilon^{\psi} = A . \varepsilon^{\varphi} . \varepsilon^{\varphi'}$$

oder

$$\varepsilon^{\psi} = \varepsilon^{\varphi} . \varepsilon^{\varphi'}.$$

Nun ist aber

$$\varepsilon^{\psi} = \text{Cos } \psi + i \text{ Sin } \psi$$
$$\varepsilon^{\varphi} = \text{Cos } \varphi + i \text{ Sin } \varphi$$
$$\varepsilon^{\varphi'} = \text{Cos } \varphi' + i \text{ Sin } \varphi'.$$

Daher

$$\text{Cos } \psi + i \text{ Sin } \psi = (\text{Cos } \varphi + i \text{ Sin } \varphi) . (\text{Cos } \varphi' + i \text{ Sin } \varphi')$$
$$= \text{Cos}\varphi . \text{Cos}\varphi' - \text{Sin}\varphi . \text{Sin}\varphi' + i . (\text{Sin}\varphi \text{ Cos}\varphi' + \text{Sin}\varphi' \text{ Cos}\varphi)$$

also

$$\text{Cos } \psi = \text{Cos}(\varphi + \varphi') = \text{Cos } \varphi . \text{Cos } \varphi' - \text{Sin } \varphi . \text{Sin } \varphi'$$
$$\text{Sin } \psi = \text{Sin}(\varphi + \varphi') = \text{Sin } \varphi . \text{Cos } \varphi' + \text{Sin } \varphi' . \text{Cos } \varphi.$$

Digitized by Google

XX.

Ueber gewisse merkwürdige Reihen.

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel

in Marburg.

§. 1.

Es giebt eine Art von Reihen, welche die merkwürdige Eigenschaft haben, die folgende Zusammenstellung veranschaulicht:

I) Berücksichtigte Reihe	.... A, B, C, D, E, F ....
II) Reihe der ersten Differenzen *)	.... a, b, c, d, e ....
III) Reihe der zweiten Differenzen **)	.... B, C, D, E ....
IV) Reihe der dritten Differenzen	.... b, c, d ....
u. s. w.	u. s. w.

d. h. es stimmen die Reihen I, III, V, VII .... $(2P-1)$ .... hinsichtlich ihrer sämmtlichen Glieder A, B, C, D, E.... mit einander überein, während eine ebensolche Uebereinstimmung stattfindet bei den Reihen II, IV, VI .... $(2P)$ .... hinsichtlich der sämmtlichen Glieder a, b, c, d ....; indem, wenn man allgemein die Differenz zwischen dem zweiten und ersten Gliede der Qten Reihe als erstes Glied der $(Q+1)$ten Reihe ansieht, das $n$te Glied der Qten Reihe dem $(n+1)$ten Gliede der $(Q-2)$ten Reihe gleich ist, so, dass in obiger Darstellung einerseits die gleichen Glieder der Reihen I, III, V .... $(2P-1)$ und andererseits ebenso die gleichen Glieder der Reihen II, IV, VI .... $(2P)$ lothrecht unter einander stehen.

§. 2.

Bezeichnet man das $n$te Glied der Isten Reihe mit $\left(\begin{smallmatrix} I \\ a \\ n \end{smallmatrix}\right)$ und ebenso das $n$te Glied der IIten Reihe mit $\left(\begin{smallmatrix} II \\ a \\ n \end{smallmatrix}\right)$, und das $n$te Glied der Qten Reihe mit $\left(\begin{smallmatrix} Q \\ a \\ n \end{smallmatrix}\right)$, und die Summe der Glieder der Isten Reihe

*) $B-A=a$, $C-B=b$, $D-C=c$ u. s. w.

**) $b-a=B$, $c-b=C$, $d-c=D$ u. s. w.

vom 1sten bis zum *n*ten Gliede einschliesslich mit $\left(\overset{I}{\underset{n}{\Sigma}}\right)$, und ebenso die Summe der Glieder der IIten Reihe vom 1sten bis zum *n*ten einschliesslich mit $\left(\overset{II}{\underset{n}{\Sigma}}\right)$, so ist:

$$1)\quad \left(\overset{I}{\underset{n}{a}}\right) - \left(\overset{I}{\underset{n-1}{a}}\right) = \left(\overset{II}{\underset{n-1}{a}}\right)$$

$$2)\quad \left(\overset{II}{\underset{n}{a}}\right) - \left(\overset{II}{\underset{n-1}{a}}\right) = \left(\overset{I}{\underset{n}{a}}\right)$$

$$3)\quad \left(\overset{I}{\underset{1}{a}}\right) + \left(\overset{II}{\underset{n}{\Sigma}}\right) = \left(\overset{I}{\underset{n+1}{a}}\right)$$

$$4)\quad \overset{I}{\underset{n}{\Sigma}} + \left(\overset{II}{\underset{1}{a}} - \overset{I}{\underset{1}{a}}\right) = \overset{II}{\underset{n}{a}}.$$

Sucht man aus 2) die Grösse $\left(\overset{II}{\underset{n-1}{a}}\right)$ und setzt ihren Werth in 1), so hat man

$$\overset{I}{\underset{n}{a}} - \overset{I}{\underset{n-1}{a}} = \overset{II}{\underset{n}{a}} - \overset{I}{\underset{n}{a}},$$

also

$$5)\quad \left(\overset{II}{\underset{n}{a}}\right) = 2\overset{I}{\underset{n}{a}} - \overset{I}{\underset{n-1}{a}}$$

und da aus 1), wenn man statt n setzt $n+1$, gefunden wird:

$$\overset{II}{\underset{n}{a}} = \overset{I}{\underset{n+1}{a}} - \overset{I}{\underset{n}{a}},$$

so ist, wenn dieser Werth in 5) gesetzt wird:

$$2\overset{I}{\underset{n}{a}} - \overset{I}{\underset{n-1}{a}} = \overset{I}{\underset{n+1}{a}} - \overset{I}{\underset{n}{a}},$$

so dass

$$3\overset{I}{\underset{n}{a}} = \overset{I}{\underset{n+1}{a}} + \overset{I}{\underset{n-1}{a}}$$

oder

$$6)\quad \overset{I}{\underset{n}{a}} = \tfrac{1}{3}\left(\overset{I}{\underset{n-1}{a}} + \overset{I}{\underset{n+1}{a}}\right)$$

oder

$$\overset{I}{\underset{n-1}{a}} = 3\overset{I}{\underset{n}{a}} - \overset{I}{\underset{n+1}{a}} \quad \text{und} \quad \overset{I}{\underset{n+1}{a}} = 3\overset{I}{\underset{n}{a}} - \overset{I}{\underset{n-1}{a}},$$

d. h.

$$7)\quad \alpha^{I}_{n} = 3\alpha^{I}_{n+1} - \alpha^{I}_{n+2} \quad \text{und} \quad 8)\quad \alpha^{I}_{n} = 3\alpha^{I}_{n-1} - \alpha^{I}_{n-2}.$$

Sucht man ebenso aus 1) die Grösse $\left(\alpha^{I}_{n}\right)$ und setzt den Werth in 2), so hat man:

$$\alpha^{II}_{n} - \alpha^{II}_{n-1} = \alpha^{II}_{n-1} + \alpha^{I}_{n-1}$$

oder

$$9)\quad \alpha^{I}_{n-1} = \alpha^{II}_{n} - 2\alpha^{II}_{n-1},$$

und da aus 2), wenn man statt n setzt $n-1$, gefunden wird:

$$\alpha^{I}_{n-1} = \alpha^{II}_{n-1} - \alpha^{II}_{n-2},$$

so ist, wenn dieser Werth in 9) gesetzt wird:

$$\alpha^{II}_{n-1} - \alpha^{II}_{n-2} = \alpha^{II}_{n} - 2\alpha^{II}_{n-1},$$

also

$$10)\quad \alpha^{II}_{n} = 3\alpha^{II}_{n-1} - \alpha^{II}_{n-2}$$

und

$$\alpha^{II}_{n-2} = 3\alpha^{II}_{n-1} - \alpha^{II}_{n} \quad \text{oder} \quad 11)\quad \alpha^{II}_{n} = 3\alpha^{II}_{n+1} - \alpha^{II}_{n+2}$$

und

$$\alpha^{II}_{n-1} = \tfrac{1}{3}\left(\alpha^{II}_{n} + \alpha^{II}_{n-2}\right) \quad \text{oder} \quad 12)\quad \alpha^{II}_{n} = \tfrac{1}{3}\left(\alpha^{II}_{n+1} + \alpha^{II}_{n-1}\right).$$

Es ist sonach, gemäss 6) und 12), sowohl für I. als II. jedes Glied einer derartigen Reihe der dritte Theil der Summe aus dem nächstvorhergehenden und dem nächstfolgenden Gliede:

$$\alpha_{n} = \tfrac{1}{3}\left(\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1}\right),$$

oder man findet, gemäss 7) und 8) oder 10) und 11), für jede solche Reihe, jedes beliebige Glied aus den beiden ihm vorhergehenden oder aus den beiden ihm folgenden Gliedern dadurch, dass man von dem 3fachen des näheren dieser beiden Glieder das ferner liegende subtrahirt, d. h. man mag in einer solchen Reihe die Glieder vorwärts oder rückwärts zählen, so ist

$$\left.\begin{array}{r}\text{in I.}\\ \text{und in II.}\end{array}\right\}\ \alpha_{n} = 3\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} = 3\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}.$$

§. 3.

Wenn also in irgend einer der Reihen I. oder II. zwei unmittelbar nach einander folgende Glieder gegeben sind, so findet man das nächste höhere Glied dadurch, dass man von dem Dreifachen des grösseren gegebenen Gliedes das kleinere gegebene Glied abzieht, während man das nächste niedrigere Glied findet, wenn man von dem Dreifachen des kleineren gegebenen Gliedes das grössere gegebene Glied subtrahirt.

Man kann also sehr leicht die Glieder jeder solchen Reihe der Ordnung nach bilden, sowohl wenn man vorwärts, als wenn man rückwärts in der Reihe fortschreiten will.

§. 4.

Noch bequemer aber ist es, die Glieder der zusammengehörigen Reihen I. und II. abwechselnd zu entwickeln, indem man die Gleichungen 1) und 2) abwechselnd benutzt. Sind also z. B. $\overset{I}{\alpha}_1$ und $\overset{I}{\alpha}_2$ gegeben, so ist:

aus 1) $\overset{II}{\alpha}_1 = \overset{I}{\alpha}_2 - \overset{I}{\alpha}_1$ aus 2) $\overset{II}{\alpha}_2 = \overset{II}{\alpha}_1 + \overset{I}{\alpha}_2$	daraus hat man
	aus 1) $\overset{I}{\alpha}_3 = \overset{I}{\alpha}_2 + \overset{II}{\alpha}_2$
aus 2) $\overset{II}{\alpha}_3 = \overset{II}{\alpha}_2 + \overset{I}{\alpha}_3$	
	aus 1) $\overset{I}{\alpha}_4 = \overset{I}{\alpha}_3 + \overset{II}{\alpha}_3$
aus 2) $\overset{II}{\alpha}_4 = \overset{II}{\alpha}_3 + \overset{I}{\alpha}_4$ u. s. w.	u. s. w.

Digitized by Google

Ebenso hat man allgemein

$\overset{II}{a}_{n-1} = \overset{II}{a}_{n-2} + \overset{I}{a}_{n-1}$	
	$\overset{I}{a}_{n} = \overset{I}{a}_{n-1} + \overset{II}{a}_{n-1}$
$\overset{II}{a}_{n} = \overset{II}{a}_{n-1} + \overset{I}{a}_{n}$	
	$\overset{I}{a}_{n+1} = \overset{I}{a}_{n} + \overset{II}{a}_{n}$
$\overset{II}{a}_{n+1} = \overset{II}{a}_{n} + \overset{I}{a}_{n+1}$ u. s. w.	u. s. w.

§. 5.

Als Beispiel möge folgende Zusammenstellung von Reihen I., II., III. dienen, wobei in I. und II. jedem Gliede unten die ihm gebührende Ordnungszahl n beigefügt ist, die der getroffenen Wahl des ersten Gliedes in I. entspricht.

I.	22_{-2}	9_{-1}	5_{0}	6_{1}	13_{2}	33_{3}	86_{4}	225_{5}	589_{6}	....
II.	-13_{-2}	-4_{-1}	1_{0}	7_{1}	20_{2}	53_{3}	139_{4}	364_{5}	953_{6}	....
III.	22	9	5	6	13	33	86	225	589	....

Hier ist

nach Gleichung

1\. .... $589 - 225 = 364$

2\. .... $953 - 364 = 589$

3\. .... $6 + [7 + 20 + 53 + 139 + 364] = 589$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{wenn } 22 = \left(\overset{I}{a}_{1}\right) \text{ gesetzt wird, hat man ebenso} \\ 22 + [-13 - 4 + 1 + 7 + 20] = 33\end{array}\right\}$$

4\. .... $[6 + 13 + 33 + 86 + 225] - 6 + 7 = 364$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{wenn } 9 = \left(\overset{I}{a}_{1}\right) \text{ gesetzt wird, hat man ebenso} \\ [9 + 5 + 6 + 13 + 33 + 86] - 9 + (-4) = 139\end{array}\right\}$$

Digitized by Google

§. 6.

Was die allgemeine Form solcher Reihen wie I. und II. anlangt, so hat man, wenn der Kürze wegen $\left(\begin{smallmatrix} I \\ a \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = A$ und $\left(\begin{smallmatrix} II \\ a \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = a$ gesetzt und jedem Gliede die Ordnungszahl (n) unten beigefügt wird, folgende Zusammenstellung:

$$\text{I.}\quad \underset{1}{A}\quad \underset{2}{(A+a)}\quad \underset{3}{(2A+3a)}\quad \underset{4}{(5A+8a)}\quad \underset{5}{(13A+21a)}\ \ldots\ldots$$

$$\text{II.}\quad \underset{1}{a}\quad \underset{2}{(A+2a)}\quad \underset{3}{(3A+5a)}\quad \underset{4}{(8A+13a)}\ \ldots\ldots$$

Bei der Verlängerung nach rückwärts erhält man ebenso:

$$\ldots\,\underset{-3}{(34A-21a)}\quad \underset{-2}{(13A-8a)}\quad \underset{-1}{(5A-3a)}\quad \underset{0}{(2A-a)} \diagdown \underset{1}{A}\ \ldots\ \text{I.}$$

$$\ldots\,\underset{-3}{(13a-21A)}\quad \underset{-2}{(5a-8A)}\quad \underset{-1}{(2a-3A)}\quad \underset{0}{(a-A)} \diagdown \underset{1}{a}\ \ldots\ \text{II.}$$

§. 7.

Setzt man in dieser allgemeinen Form $\left(\begin{smallmatrix} I \\ a \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ oder $A = 1$ und $\left(\begin{smallmatrix} II \\ a \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ oder $a = 0$, so hat man

Reihe I.	 5	2	1	1	2	5	13	34	89	
Ordnungszahl	—1	0	1	2	3	4	5	6	7	
Reihe II.	.... —3	—1	0	1	3	8	21	55		
Ordnungszahl	—1	0	1	2	3	4	5	6		

und es bietet die Reihe I. die Coefficienten für A in §. 6. I. und die Reihe II. jene für a in §. 6. I. dar.

§. 8.

Umgekehrt, wenn man in §. 6. $A = 0$ und $a = 1$ setzt, so hat man:

I.	.... —8	—3	—1	0	1	3	8	21	55 ....
	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6
II.	 5	2	1	1	2	5	13	34	
	—2	—1	0	1	2	3	4	5	

und es bietet die Reihe I. die Coefficienten dar für A in §. 6. II., und die Reihe II. ist jene der Coefficienten für a in §. 6. II.

Digitized by Google

§. 9.

Setzt man $A = 1$ und $a = 3$, so hat man nach §. 6. folgende wichtige Reihen, von welchen wir später Gebrauch machen werden.

I.	....	-11	-4	-1 \	1	4	11	29	76	199	521 ....
		-2	-1	0 \	1	2	3	4	5	6	7
II.	....	7	3	2 \	3	7	18	47	123	322	
		-2	-1	0 \	1	2	3	4	5	6	

§. 10.

Obgleich in §. 2., §. 3. und §. 4. die Bildung der Glieder einer solchen Reihe der Ordnung nach gezeigt wurde, so ist es doch nöthig, einen Ausdruck für das allgemeine ($n$te) Glied einer solchen Reihe zu haben. Dieser ist gefunden, sobald man für die in §. 7. (und §. 8.) dargestellten Reihen der Coefficienten für I. und II. in §. 6. die Ausdrücke für das $n$te Glied gefunden hat. Die Reihen §. 7. (und §. 8.) stimmen aber überein mit Reihen, die man in folgender Art findet.

§. 11.

Es ist bekannt, dass die für die Lehre vom regelmässigen Fünfeck und für die davon abhängenden Körperformen wichtige Grösse $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$ folgende Reihe von Potenzen darbietet:

Ordnungszahl	1	2	3	4
Potenz	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$,	$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$,	$\frac{1}{2}(2\sqrt{5}-4)$,	$\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})$,
Ordnungszahl	5	6	7	8
Potenz	$\frac{1}{2}(5\sqrt{5}-11)$,	$\frac{1}{2}(18-8\sqrt{5})$,	$\frac{1}{2}(13\sqrt{5}-29)$,	$\frac{1}{2}(47-21\sqrt{5})$,

Ordnungszahl	9	10
Potenz	$\frac{1}{2}(34\sqrt{5}-56)$,	$\frac{1}{2}(123-55\sqrt{5})$;

und dass, wenn man diese Reihe von Potenzen nach rückwärts, über die erste hinaus, fortsetzt, man folgende Glieder erhält:

Ordnungszahl	0	-1	-2	-3
Potenz	$\frac{1}{2}(2 \pm 0\sqrt{5})$,	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$,	$\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$,	$\frac{1}{2}(2\sqrt{5}+4)$,

Ordnungszahl	-4
Potenz	$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$;

Digitized by Google

so dass alle Potenzen von $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, welche ungerade Exponenten haben, die Form $\frac{1}{2}(x\sqrt{5}-y)$, und alle, welche gerade Exponenten haben, die Form $\frac{1}{2}(u-v\sqrt{5})$ darbieten.

Betrachten wir die Reihen der Werthe von x und v, welches die Coefficienten von $\sqrt{5}$ in vorstehender Entwickelung sind, so finden wir:

Werthe von x	....	34	13	5	2	1	1	2	5	13	34	89	....	I.
Exponent der Potenz	....	-11	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	....	
Werthe von v	....	-21	-8	-3	-1	0	1	3	8	21	55	....		II.
Exponent der Potenz	....	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10			

Ebenso findet man für y und für u folgende Reihen:

Werthe von y	....	-29	-11	-4	-1	1	4	11	29	56	199	....	I.
Exponent der Potenz	....	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	....	
Werthe von u	....	18	7	3	2	3	7	18	47	123	....		II.
Exponent der Potenz	....	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	....		

§. 12.

Setzen wir $\sqrt{5}=q$, so haben wir, wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet und p irgend eine andere ganze Zahl ist, die zwischen 1 und n liegt:

$$
(q-1)^{2n-1} = \left.\begin{array}{l}
q^{2n-2} \\
+\frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2}q^{2n-4} \\
+\frac{(2n-1)\dots(2n-4)}{1\dots4}q^{2n-6} \\
\quad\vdots \\
+\frac{(2n-1)\dots(2n-2p)}{1\dots2p}q^{2n-(2p+2)} \\
\quad\vdots \\
+\frac{(2n-1)\dots(2n-(2n-2))}{1\dots(2n-2)}q^{2n-2n}
\end{array}\right\} . q - \begin{array}{l}
(2n-1)q^{2n-2} \\
-\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3}.q^{2n-4} \\
-\frac{(2n-1)\dots(2n-5)}{1\dots5}.q^{2n-6} \\
\quad\vdots \\
-\frac{(2n-1)\dots(2n-(2p+1))}{1\dots(2p+1)}.q^{2n-(2p+2)} \\
\quad\vdots \\
-\frac{(2n-1)\dots(2n-(2n-1))}{1\dots(2n-1)}.q^{2n-2n}
\end{array}
$$

Digitized by Google

Es wird also, wenn man berücksichtigt, dass

$$q^{2(n-(p+1))} = 5^{n-(p+1)},$$

und wenn man die Werthe von x, welche zur 1, 3, 5 .... $(2n-1)$ten Potenz gehören, mit x_1, x_2, x_3 .... x_n bezeichnet, der allgemeine Werth für x gefunden, als:

$$13)\quad x_n = [5^{n-1} + \frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2} 5^{n-2} + \frac{(2n-1)....(2n-4)}{1....4} 5^{n-3} ....$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-2)....(2n-2p)}{1.2....2p} . 5^{n-(p+1)}$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-2)....(2n-(2n-2))}{1.2....(2n-2)} . 5^{n-n}] : 2^{2n-2}.$$

so dass, wenn man den Coefficienten $\left[\frac{n(n-1)(n-2)....(n-(m-1))}{1.2.3....m}\right]$ der $n$ten Potenz eines Binomiums durch den Ausdruck $\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)$ bezeichnet, die Gleichung gilt:

$$14)\quad x_n = [5^{n-1} + \overset{2n-1}{\underset{2}{C}} . 5^{n-2}$$
$$+ \overset{2n-1}{\underset{4}{C}} . 5^{n-3} .. + \overset{2n-1}{\underset{2p}{C}} . 5^{n-(p+1)} .. + \overset{2n-1}{\underset{2(n-1)}{C}} . 5^{n-n}] : 2^{2n-2}.$$

Zugleich ergiebt sich:

$$15)\quad y_n = [\overset{2n-1}{\underset{1}{C}} . 5^{n-1} + \overset{2n-1}{\underset{3}{C}} . 5^{n-2} + \overset{2n-1}{\underset{5}{C}} . 5^{n-3} ....$$
$$+ \overset{2n-1}{\underset{2p+1}{C}} . 5^{n-(p+1)} .... + \overset{2n-1}{\underset{2n-1}{C}} . 5^{n-n}] : 2^{2n-2}.$$

§. 13.

Andererseits ist

$$(q-1)^{2n} = q^{2n} - 2n . q^{2n-2} . q$$
$$+ \frac{2n(2n-1)}{1.2} q^{2n-2} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3} q^{2n-4} . q$$
$$+ \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4} . q^{2n-4} - \frac{2n(2n-1)....(2n-4)}{1.2....5} q^{2n-6} . q$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-(2p-1))}{1.2\ldots.2p}q^{2n-2p}-\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2p)}{1.2\ldots.(2p+1)}.q^{2n-(2p+2)}.q$$

$$\vdots$$

$$+\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-(2n-3))}{1.2\ldots.(2n-2)}q^{2n-(2n-2)}-\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-(2n-2))}{1.2\ldots.(2n-1)}q^{2n-2n}.q$$

$$+\frac{2n(2n-1)\ldots.(2n-(2n-1))}{1.2\ldots.2n}q^{2n-2n}.$$

Bezeichnet also v_n den Werth von v, welcher zur $2n$ten Potenz von $\sqrt{5}-1$ gehört, so ist

$$16)\quad v_n=[\overset{2n}{\underset{1}{C}}.5^{n-1}+\overset{2n}{\underset{3}{C}}.5^{n-2}+\overset{2n}{\underset{5}{C}}.5^{n-3}\ldots.$$
$$+\overset{2n}{\underset{2p+1}{C}}.5^{n-(p+1)}\ldots.+\overset{2n}{\underset{2n-1}{C}}.5^{n-n}]:2^{2n-1}.$$

Während, wenn u_n den Werth von u bezeichnet, der zur $2n$ten Potenz gehört, dieser Werth gefunden wird als

$$17)\quad u_n=[5^n+\overset{2n}{\underset{2}{C}}.5^{n-1}+\overset{2n}{\underset{4}{C}}.5^{n-2}+\overset{2n}{\underset{6}{C}}.5^{n-3}\ldots.$$
$$+\overset{2n}{\underset{2p}{C}}.5^{n-p}\ldots.+\overset{2n}{\underset{2n}{C}}.5^{n-n}]:2^{2n-1}.$$

§. 14.

Sollen nun wirklich die Reihen der Werthe von x und von v (in §. 11.) den Reihen der Coefficienten von A und von a in §. 6. entsprechen und nicht etwa bloss zufällig innerhalb gewisser Gränzen damit übereinstimmen, so muss allgemein nach 1) $x_{n+1}-x_n=v_n$ und nach 2) $v_{n+1}-v_n=x_n$ sein. (Vergleiche oben in §. 2. die Gleichungen 1. und 2.).

Es ist aber, wenn

$$\left(\frac{q-1}{2}\right)^{2n-1}=\tfrac{1}{2}(x_nq-y_n)$$

ist, auch

$$\left(\frac{q-1}{2}\right)^{2n+1}=\tfrac{1}{2}(x_nq-y_n)\left(\frac{q^2-2q+1}{4}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}[(\tfrac{1}{4}x_nq^2+\tfrac{1}{2}y_n+\tfrac{1}{4}x_n)q-(\tfrac{1}{4}q^2y_n+\tfrac{1}{2}q^2x_n+\tfrac{1}{4}y_n)]$$

so dass

$$x_{n+1}=\tfrac{1}{4}x_nq^2+\tfrac{1}{4}x_n+\tfrac{1}{2}y_n=\tfrac{5}{4}x_n+\tfrac{1}{4}x_n+\tfrac{1}{2}y_n$$
$$=\tfrac{3}{2}x_n+\tfrac{1}{2}y_n,$$

weshalb

$$x_{n+1} - x_n = (\tfrac{1}{2}x_n + \tfrac{1}{2}y_n) - x_n = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n),$$

d. h.

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^{2n-2}}\right)\left\{\begin{array}{l} 5^{n-1} + \overset{2n-1}{\underset{2}{C}} . 5^{n-2} + \overset{2n-1}{\underset{4}{C}} . 5^{n-3} \ldots . \\ \qquad\qquad + \overset{2n-1}{\underset{2p}{C}} . 5^{n-(p+1)} \ldots . + \overset{2n-1}{\underset{2n-2}{C}} . 5^{n-n} \\ + \overset{2n-1}{\underset{1}{C}} . 5^{n-1} + \overset{2n-1}{\underset{3}{C}} . 5^{n-2} + \overset{2n-1}{\underset{5}{C}} . 5^{n-3} \ldots . \\ \qquad\qquad + \overset{2n-1}{\underset{2p+1}{C}} . 5^{n-(p+1)} \ldots . + \overset{2n-1}{\underset{2n-1}{C}} . 5^{n-n} \end{array}\right\}$$

so dass aus der allgemein bekannten Eigenschaft der Binomial-Coefficienten, gemäss welcher $\overset{2n-1}{\underset{2p}{C}} + \overset{2n-1}{\underset{2p+1}{C}} = \overset{2n}{\underset{2p+1}{C}}$ ist, folgt:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2^{2n-1}}\{\overset{2n}{\underset{1}{C}} . 5^{n-1} + \overset{2n}{\underset{3}{C}} . 5^{n-2} + \overset{2n}{\underset{5}{C}} . 5^{n-3} \ldots . + \overset{2n}{\underset{2p+1}{C}} . 5^{n-(p+1)} + \overset{2n}{\underset{2n-1}{C}} . 5^{n-n}\},$$

und es ist hiernach bewiesen, dass allgemein

$$x_{n+1} - x_n = v_n$$

ist. Ebenso lässt sich der Beweis führen, dass allgemein gültig

$$v_{n+1} - v_n = x_n$$

ist.

§. 15.

Da nun, wenn wir für die Coefficienten von A und a die Zählungsweise der Glieder von §. 6. und §. 7. beibehalten,

$$18)\quad x_n = \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} \text{ (in §. 7.) also } \overset{I}{\underset{n}{\alpha}} = x_{n-1}$$

und

$$19)\quad v_n = \overset{II}{\underset{n+1}{\alpha}} \text{ (in §. 7.) also } \overset{II}{\underset{n}{\alpha}} = v_{n-1},$$

so ist das $n$te Glied in der Reihe §. 6. I., welches $\overset{I}{N}$ heissen möge:

$$20)\quad \overset{I}{N} = x_{n-1} . A + v_{n-1} . a,$$

während ebenso das $n$te Glied in der Reihe §. 6. II., welches durch $\overset{II}{N}$ bezeichnet werden möge:

$$21)\quad \overset{II}{N} = v_{n-1} \,.\, A + x_n \,.\, a,$$

ist; mithin

$$22)\quad \overset{I}{N} = A[5^{n-2} + \overset{2n-3}{\underset{2}{C}} \,.\, 5^{n-3} + \overset{2n-3}{\underset{4}{C}} \,.\, 5^{n-4} \ldots\ldots$$
$$+ \overset{2n-3}{\underset{2p}{C}} \,.\, 5^{n-(p+2)} \ldots\ldots + \overset{2n-3}{\underset{2n-4}{C}} \,.\, 5^{n-n}] : 2^{2n-4}$$
$$+ a[\overset{2(n-1)}{\underset{1}{C}} \,.\, 5^{n-2} + \overset{2(n-1)}{\underset{3}{C}} \,.\, 5^{n-3} + \overset{2(n-1)}{\underset{5}{C}} \,.\, 5^{n-4} \ldots\ldots$$
$$+ \overset{2(n-1)}{\underset{2p+1}{C}} \,.\, 5^{n-(p+2)} \ldots\ldots + \overset{2(n-1)}{\underset{2n-3}{C}} \,.\, 5^{n-n}] : 2^{2n-2}$$

$$23)\quad \overset{II}{N} = A[\overset{2(n-1)}{\underset{1}{C}} \,.\, 5^{n-2} + \overset{2(n-1)}{\underset{3}{C}} \,.\, 5^{n-3} + \overset{2(n-1)}{\underset{5}{C}} \,.\, 5^{n-4} \ldots\ldots$$
$$+ \overset{2(n-1)}{\underset{2p+1}{C}} \,.\, 5^{n-(p+2)} \ldots\ldots + \overset{2(n-1)}{\underset{2n-3}{C}} \,.\, 5^{n-n}] : 2^{2n-2}$$
$$+ a[5^{n-1} + \overset{2n-1}{\underset{2}{C}} \,.\, 5^{n-2} + \overset{2n-1}{\underset{4}{C}} \,.\, 5^{n-3} \ldots\ldots$$
$$+ \overset{2n-1}{\underset{2p}{C}} \,.\, 5^{n-(p+1)} \ldots\ldots + \overset{2n-1}{\underset{2n-1}{C}} \,.\, 5^{n-n}] : 2^{2n-2}$$

Es sind sonach die allgemeinen Glieder in der gemeinschaftlichen Form (§. 6.) der fraglichen Reihen I. und II. gefunden.

§. 16.

Aus den Gleichungen 4) und 3) folgt:

$$24)\quad \overset{I}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{II}{\underset{n}{\alpha}} - \left(\overset{II}{\underset{1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{1}{\alpha}}\right)$$

$$25)\quad \overset{II}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{1}{\alpha}},$$

so dass, wenn $\overset{II}{\underset{1}{\alpha}} = \overset{I}{\underset{1}{\alpha}}$ ist, sich ergiebt:

$$24,1)\quad \overset{I}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{II}{\underset{n}{\alpha}} \quad \text{und} \quad 25,1)\quad \overset{II}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{1}{\alpha}},$$

oder wenn der Werth $\overset{I}{\underset{1}{\alpha}} = 0$ ist:

Digitized by Google

$$24,2)\quad \overset{I}{\Sigma}_{n} = \overset{II}{\alpha}_{n} - \overset{II}{\alpha}_{1} \quad \text{und} \quad 25,2)\quad \overset{II}{\Sigma}_{n} = \overset{I}{\alpha}_{n+1}.$$

So ist z. B. für die Reihen

I) 1 2 5 13 34
II) 1 3 8 21

nach

$$24,1)\quad 1 + 2 + 5 + 13 = 21$$

nach

$$25,1)\quad 1 + 3 + 8 + 21 = 34 - 1 = 33$$

und bei den Reihen

I) 0 1 3 8 21 55 144
II) 1 2 5 13 34 89

ist nach

$$24,2)\quad 0 + 1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 89 - 1$$

und nach

$$25,2)\quad 1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 = 144.$$

§. 17.

Nach der Gleichung 3) ist:

$$\overset{I}{\alpha}_{n} = \overset{I}{\alpha}_{1} + \overset{II}{\Sigma}_{n-1}$$
$$\overset{I}{\alpha}_{n-1} = \overset{I}{\alpha}_{1} + \overset{II}{\Sigma}_{n-2}$$
$$\overset{I}{\alpha}_{n-2} = \overset{I}{\alpha}_{1} + \overset{II}{\Sigma}_{n-3}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\overset{I}{\alpha}_{n-(n-2)} = \overset{I}{\alpha}_{1} + \overset{II}{\Sigma}_{n-(n-1)}$$
$$\overset{I}{\alpha}_{n-(n-1)} = \overset{I}{\alpha}_{1}$$

Hieraus folgt durch Addition, da $\overset{I}{\alpha}_{n} + \overset{I}{\alpha}_{n-1} + \overset{I}{\alpha}_{n-2} \ldots\ldots \overset{I}{\alpha}_{n-(n-1)} = \overset{I}{\Sigma}_{n}$ ist, für $\overset{I}{\Sigma}_{n}$ der folgende Werth:

$$26)\quad \overset{I}{\Sigma}_{n} = n \,.\, \overset{I}{\alpha}_{1} + \left[\overset{II}{\Sigma}_{1} + \overset{II}{\Sigma}_{2} + \overset{II}{\Sigma}_{3} \ldots\ldots + \overset{II}{\Sigma}_{n-1}\right]$$

Digitized by Google

und auf ähnliche Weise erhält man durch Anwendung der Gleichung 4) den Werth

$$27)\quad \underset{n}{\overset{II}{\Sigma}} = n\left(\underset{1}{\overset{II}{\alpha}} - \underset{1}{\overset{I}{\alpha}}\right) + \left[\underset{1}{\overset{I}{\Sigma}} + \underset{2}{\overset{I}{\Sigma}} + \underset{3}{\overset{I}{\Sigma}} \ldots\ldots + \underset{n}{\overset{I}{\Sigma}}\right]$$

§. 18.

Aus 26) folgt, wenn man gemäss 4) setzt $\underset{n}{\overset{I}{\Sigma}} = \underset{n}{\overset{II}{\alpha}} - \left(\underset{1}{\overset{II}{\alpha}} - \underset{1}{\overset{I}{\alpha}}\right)$:

$$28)\quad \underset{n}{\overset{II}{\alpha}} - \underset{1}{\overset{II}{\alpha}} = (n-1)\underset{1}{\overset{I}{\alpha}} + \left[\underset{1}{\overset{II}{\Sigma}} + \underset{2}{\overset{II}{\Sigma}} + \underset{3}{\overset{II}{\Sigma}} \ldots\ldots + \underset{n-1}{\overset{II}{\Sigma}}\right]$$

oder

$$\underset{n+1}{\overset{II}{\alpha}} - \underset{1}{\overset{II}{\alpha}} = n \,.\, \underset{1}{\overset{I}{\alpha}} + \left[\underset{1}{\overset{II}{\Sigma}} + \underset{2}{\overset{II}{\Sigma}} + \underset{3}{\overset{II}{\Sigma}} \ldots\ldots + \underset{n}{\overset{II}{\Sigma}}\right]$$

und ebenso folgt aus 27), wenn man gemäss 4) setzt $\underset{n}{\overset{II}{\Sigma}} = \underset{n+1}{\overset{I}{\alpha}} - \underset{1}{\overset{I}{\alpha}}$:

$$29)\quad \underset{n+1}{\overset{I}{\alpha}} - \underset{1}{\overset{I}{\alpha}} = n\left(\underset{1}{\overset{II}{\alpha}} - \underset{1}{\overset{I}{\alpha}}\right) + \left[\underset{1}{\overset{I}{\Sigma}} + \underset{2}{\overset{I}{\Sigma}} + \underset{3}{\overset{I}{\Sigma}} \ldots\ldots + \underset{n}{\overset{I}{\Sigma}}\right]$$

Es gilt daher z. B. für die in §. 8. dargestellten Reihen, für welche $\underset{1}{\overset{I}{\alpha}} = 0$ und $\underset{1}{\overset{II}{\alpha}} = 1$ ist, die merkwürdige Eigenschaft:

$$\underset{n+1}{\overset{II}{\alpha}} = 1 + \left[\underset{1}{\overset{II}{\Sigma}} + \underset{2}{\overset{II}{\Sigma}} + \underset{3}{\overset{II}{\Sigma}} \ldots\ldots + \underset{n}{\overset{II}{\Sigma}}\right]$$

$$\underset{n+1}{\overset{I}{\alpha}} = n + \left[\underset{1}{\overset{I}{\Sigma}} + \underset{2}{\overset{I}{\Sigma}} + \underset{3}{\overset{I}{\Sigma}} \ldots\ldots + \underset{n}{\overset{I}{\Sigma}}\right]$$

§. 19.

Aus §. 1. wissen wir, dass, wenn man überhaupt eine Reihe von Reihen, deren jede die Reihe der ersten Differenzen für die ihr vorhergehende ist, mit I, II, III ,IV, ... Q numerirt, die wichtigste Eigenschaft der bisher betrachteten Reihen von Reihen darin besteht, dass bei ihnen die Gleichung gilt:

$$30)\quad \left(\underset{n}{\overset{Q}{\alpha}}\right) = \left(\underset{n+1}{\overset{Q-2}{\alpha}}\right).$$

Diese Gleichung ist aber nur ein specieller Fall der allgemeineren Gleichung, welche für gewisse Reihen von Reihen gilt und die Form hat:

$$31)\quad \left(\underset{n}{\overset{Q}{\alpha}}\right) = \delta\left(\underset{n+1}{\overset{Q-2}{\alpha}}\right)$$

Digitized by Google

und worin δ eine beliebige constante Zahl ist, n und Q aber die bisherigen Bedeutungen haben.

§. 20.

Ein Beispiel für das im vorigen Paragraphen erwähnte allgemeinere Gesetz (31.) bietet folgende Reihe von Reihen, für welche $\delta = 4$ und $\overset{I}{\underset{1}{\alpha}} = 0$ und $\overset{II}{\underset{1}{\alpha}} = 1$ ist, dar.

$$
\begin{array}{ll}
\text{I)} & \ldots - 204 - 35 - 6 - 1 \quad 0 + 1 + 6 + 35 + 204 + 1189 + 6930 \ldots \\
\text{II)} & \ldots + 169 + 29 + 5 + 1 + 1 + 5 + 29 + 169 + 985 + 5741 \ldots \\
\text{III)} & \ldots - 140 - 24 - 4 \quad 0 + 4 + 24 + 140 + 816 + 4756 \ldots \\
\text{IV)} & \ldots + 116 + 20 + 4 + 4 + 20 + 116 + 676 + 3940 \ldots \\
\text{V)} & \ldots - 96 - 16 \quad 0 + 16 + 96 + 560 + 3264 \ldots \\
\text{VI)} & \ldots + 80 + 16 + 16 + 80 + 464 + 2704 \ldots \\
\text{VII)} & \ldots - 64 \quad 0 + 64 + 384 + 2240 \ldots
\end{array}
$$

u. s. w. u. s. w.

Hier ist nämlich:

$$\begin{array}{ll}
\text{I)} & \ldots - 204 - 35 - 6 - 1 \mp 0 + 1 + 6 + 35 + 204 + 1189 + 6930 \ldots \\
\text{II)} & \ldots + 169 + 29 + 5 + 1 + 1 + 5 + 29 + 169 + 985 + 5741 \ldots \\
\text{III)} & \ldots - 4.35 - 4.6 - 4.1 \mp 4.0 + 4.1 + 4.6 + 4.35 + 4.204 + 4.1189 \ldots \\
\text{IV)} & \ldots + 4.29 + 4.5 + 4.1 + 4.1 + 4.5 + 4.29 + 4.169 + 4.985 \ldots \\
\text{V)} & \ldots - 4^2.6 - 4^2.1 \mp 4^2.0 + 4^2.1 + 4^2.6 + 4^2.35 + 4^2.204 \ldots \\
\text{VI)} & \ldots + 4^2.5 + 4^2.1 + 4^2.1 + 4^2.5 + 4^2.29 + 4^2.169 \ldots \\
\text{VII)} & \ldots - 4^3.1 \mp 4^3.0 + 4^3.1 + 4^3.6 + 4^3.35 \ldots
\end{array}$$

u. s. w. u. s. w.

Es entsteht also in diesem Beispiele jede Qte Reihe aus der $(Q-2)$ten Reihe durch Multiplication aller Glieder mit der Zahl $4 (= \delta)$, so dass, nach der Gleichung 31), hier

$$\overset{Q}{\underset{n}{a}} = 4\begin{pmatrix} Q-2 \\ a \\ n+1 \end{pmatrix}$$

ist. Es entsteht also die $(2P+1)$te Reihe aus der Iten Reihe durch Multiplication aller Glieder derselben mit 4^P (oder allgemeiner mit δ^P) und ebenso entsteht die $(2P+2)$te Reihe aus der IIten Reihe durch Multiplication aller Glieder mit 4^P $(= \delta^P)$, so dass

$$\begin{pmatrix} 2P+1 \\ a \\ n \end{pmatrix} = \delta^P . \begin{pmatrix} I \\ a \\ n+P \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2P+2 \\ a \\ n \end{pmatrix} = \delta^P . \begin{pmatrix} II \\ a \\ n+P \end{pmatrix}.$$

§. 21.

Ein zweites Beispiel für das allgemeinere Gesetz (31) bietet folgende Reihe von Reihen dar, in welcher gleichfalls $\delta = 4$, aber $\begin{pmatrix} {}^{\prime} \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ und $\begin{pmatrix} {}^{\prime\prime} \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 6$ ist.

I) .... − 41 − 7 − 1 + 1 + 7 + 41 + 239 + 1393 + 8119 ....

II) .... + 34 + 6 + 2 + 6 + 34 + 198 + 1154 + 6726 ....

III) .... − 28 − 4 + 4 + 28 + 164 + 956 + 5572 ....

IV) .... + 24 + 8 + 24 + 136 + 792 + 4616 ....

V) .... − 16 + 16 + 112 + 656 + 3824 ....

VI) .... + 32 + 96 + 544 + 3168 ....

VII) .... + 64 + 448 + 2624 ....

u. s. w.

Digitized by Google

Es ist hier nämlich:

$$\text{I)} \quad \ldots\ldots - 239 - 41 - 7 - 1 + 1 + 7 + 41 + 239 + 1393 + 8119 \ldots\ldots$$

$$\text{II)} \quad \ldots\ldots + 198 + 34 + 6 + 2 + 6 + 34 + 198 + 1154 + 6726 \ldots\ldots$$

$$\text{III)} \quad \ldots\ldots - 4.41 - 4.7 - 4.1 + 4.1 + 4.7 + 4.41 + 4.239 + 4.1393 \ldots\ldots$$

$$\text{IV)} \quad \ldots\ldots + 4.34 + 4.6 + 4.2 + 4.6 + 4.34 + 4.198 + 4.1154 \ldots\ldots$$

$$\text{V)} \quad \ldots\ldots - 4^2.7 - 4^2.1 + 4^2.1 + 4^2.7 + 4^2.41 + 4^2.239 \ldots\ldots$$

$$\text{VI)} \quad \ldots\ldots + 4^2.6 + 4^2.2 + 4^2.6 + 4^2.34 + 4^2.198 \ldots\ldots$$

$$\text{VII)} \quad \ldots\ldots - 4^3.1 + 4^3.1 + 4^3.7 + 4^3.41 \ldots\ldots$$

u. s. w.

§. 22.

Wenn man die Potenzen der Grösse $(\sqrt{2}-1)$ der Ordnung nach entwickelt und sie so darstellt, dass sie, je nachdem der Exponent ungerad oder gerad ist, die Form haben:

$$(\sqrt{2}-1)^{2n+1} = (x_n\sqrt{2} - y_n)$$

$$(\sqrt{2}-1)^{2n} = (\tfrac{1}{2}u_n - 2 \,.\, v_n \,.\, \sqrt{2}),$$

so ist die Reihe der Werthe von x_n übereinstimmend mit I. in §. 20. und jene der Werthe von v_n mit II. in §. 20., während die Reihe der Werthe von y_n die Reihe I. in §. 21. und jene der Werthe von u_n die Reihe II. in §. 21. giebt.

§. 23.

Die in §. 20. und §. 21. aufgeführten Beispiele solcher Reihen von Reihen, für welche das in der Gleichung 31. ausgesprochene allgemeinere Gesetz gilt (von welchem das in der Gleichung 30. ausgesprochene Gesetz für die von uns specieller betrachteten Reihen nur ein besonderer Fall ist), mögen genügen, und es soll hier nur noch an die Aehnlichkeit des Gesetzes 31. mit einem, bei mehr allgemein bekannten anderen Reihen von Reihen geltenden erinnert werden, nach welchen bei diesen anderen Reihen von Reihen, wenn wir die im §. 1. angenommene Bezeichnungsweise auch hier beibehalten:

$$\overset{Q}{\underset{n}{\alpha}} = D\left(\overset{Q-1}{\underset{n}{\alpha}}\right), \text{ also auch } \overset{Q}{\underset{n}{\alpha}} = D^2 . \left(\overset{Q-2}{\underset{n}{\alpha}}\right),$$

mithin

$$\left(\overset{Q}{\underset{n}{\alpha}}\right) = \delta . \left(\overset{Q-2}{\underset{n}{\alpha}}\right)$$

ist.

Man erhält solche Reihen von Reihen bekanntlich, wenn man für die Reihe der Potenzen irgend einer constanten Zahl, als Reihe I., die dazu gehörigen Reihen II., III., IV. u. s. w. Q ihrer 1sten, 2ten, 3ten u. s. w. Qten Differenzen bildet.

So hat man z. B. für die Potenzen der Zahl 5 folgende Reihe von Reihen:

I) .... 5^{-3} 5^{-2} 5^{-1} 5^{0} 5^{1} 5^{2} 5^{3} 5^{4} 5^{5} ....
II) .... 4.5^{-3} 4.5^{-2} 4.5^{-1} 4.5^{0} 4.5^{1} 4.5^{2} 4.5^{3} 4.5^{4} ....
III) .... $4^2.5^{-3}$ $4^2.5^{-2}$ $4^2.5^{-1}$ $4^2.5^{0}$ $4^2.5^{1}$ $4^2.5^{2}$ $4^2.5^{3}$ ....
IV) .... $4^3.5^{-3}$ $4^3.5^{-2}$ $4^3.5^{-1}$ $4^3.5^{0}$ $4^3.5^{1}$ $4^3.5^{2}$ ....

u. s. w.

und überhaupt für die Potenzen einer beliebigen constanten Zahl z das Gesetz:

$$\left(\overset{Q}{\underset{n}{\alpha}}\right) = (z-1)\left(\overset{Q-1}{\underset{n}{\alpha}}\right) = (z-1)^2 . \left(\overset{Q-2}{\underset{n}{\alpha}}\right) \text{ u. s. w.,}$$

so dass

$$\left(\overset{Q}{\underset{n}{\alpha}}\right) = (z-1)^{Q-1} . \left(\overset{1}{\underset{n}{\alpha}}\right) = (z-1)^{Q-1} . z^n,$$

so dass in den Ausdrücken

$$\left(\overset{Q}{\underset{n}{\alpha}}\right) = D\left(\overset{Q-1}{\underset{n}{\alpha}}\right) \text{ und } \overset{Q}{\underset{n}{\alpha}} = \delta\left(\overset{Q-2}{\underset{n}{\alpha}}\right)$$

$D = z - 1$ und $\delta = (z-1)^2$ ist.

Ebenso wie oben die Gleichung 30. jenem speciellen Falle von 31. entsprach, wo $\delta = 1$ war, so ist auch hier der Fall möglich, wo $\delta = 1$ wird. Die Werthe D und δ und deren Potenzen haben aber hier natürlich nur dann den Werth $= 1$, d. h. es ist nur dann jede der Reihen II., III. .... Q der Hauptreihe I. gleich, wenn $x = 2$ ist, so dass für die Reihe der Potenzen der Zahl 2 $\overset{I}{\underset{n}{\alpha}} = \overset{II}{\underset{n}{\alpha}} = \overset{III}{\underset{n}{\alpha}} \ldots\ldots = \overset{Q}{\underset{n}{\alpha}}$ ist.

I) .... 1 2 4 8 16 32 ....
II) .... 1 2 4 8 16 ....
III) .... 1 2 4 8 ....
u. s. w.

XXI.

Ueber die naturphilosophischen Principien der Bewegungslehre.

Von dem
Herrn Doctor Barfuss
zu Weimar.

---

§. 1.

1) Da jeder Körper einen Raum einnimmt, so kann von einer bestimmten Gestalt der Bahn, welche er während seiner Bewegung beschreibt, nicht anders die Rede sein, als wenn wir die Bewegung auf bestimmte Punkte desselben beziehen. Der Anfang aller Bewegungslehre beginnt also mit der Bewegung von Punkten in abstracto, deren Bahnen entweder gerade oder krumme Linien sind.

2) Durch die Vergleichung des Weges mit der Zeit, in welcher jener beschrieben wurde, gestaltet sich uns der Begriff von Geschwindigkeit. Wenn der Körper A in derselben Zeit einen weiteren Weg gegangen ist, als ein anderer B, so sagen wir, A habe sich geschwinder bewegt als B. Doch giebt dieses nur eine durchschnittliche Vergleichung, aus welcher noch nichts für die Zwischenzeiten geschlossen werden kann. Denken wir uns aber daneben, dass in gleichen Zeiträumen auch gleiche Wege zurückgelegt

worden sind, so haben wir die **gleichförmige** Bewegung und verstehen dann unter **Geschwindigkeit** den in der Zeiteinheit durchlaufenen Raum. Ist nun s der in der Zeit t mit der Geschwindigkeit c zurückgelegte Weg, so ist $s = ct$.

3) Wenn in gleichen Zeiten nicht gleiche Wege zurückgelegt werden, so heisst die Bewegung **ungleichförmig** oder **verändert**. Logisch genommen kann nun die Bewegung nach einem allgemeinen Gesetz stetig veränderlich sein oder die Veränderung kann ohne Regel erfolgen. Der zweite Fall ist kein Gegenstand mathematischer Betrachtung, im ersten aber muss der zurückgelegte Weg s irgend eine Function der Zeit t sein. Ist nun $s = f(t)$ und wird $t + \Delta t$ aus t, so wird $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} + \frac{d^2 s}{dt^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} + \ldots$. Je kleiner nun Δt und folglich auch Δs wird, desto mehr nähert sich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ dem $\frac{ds}{dt}$, und wenn wir uns eine gleichförmige Bewegung denken, für welche die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ ist, so ist in derselben genau $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$. Die veränderliche Bewegung lässt sich also mit der gleichförmigen, deren Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ ist, um so mehr vergleichen, je kleiner die Zeitintervalle sind, innerhalb welcher die Vergleichung angestellt wird. Man nennt daher auch den Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit der veränderten Bewegung und sagt, dass die letztere in ihren Differentialen gleichförmig sei.

Setzen wir also die veränderliche Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = v$, so wird $ds = vdt$ und $s = \int vdt$.

4) Bei der veränderten Bewegung ist nun der einfachste Fall der, wo die Aenderungen der Geschwindigkeit der Zeit proportional sind, also die Geschwindigkeit selbst durch $a + bt$ ausgedrückt werden kann. Hier nennt man die Bewegung eine **gleichförmig beschleunigte**, wenn b positiv ist und die Geschwindigkeit daher mit der Zeit wächst; die constante Grösse b aber heisst das **Maass der Beschleunigung**.

Hier ist also $v = a + bt$, also $ds = vdt = adt + btdt$, und folglich $s = at + \frac{1}{2}bt^2 + \text{Const.}$ Denken wir uns sowohl a als auch Const. $= 0$, so wird $s = \frac{1}{2}bt^2$ und wir haben dann den einfachsten Fall der gleichförmig beschleunigten Bewegung, bei welcher die Wege den Quadraten der Zeit proportional sind.

5) Wenn die Aenderungen der Geschwindigkeit nicht der Zeit proportional sind, so heisst die Bewegung ungleichförmig beschleunigt oder verzögert, je nachdem sie mit immer grösserer oder mit immer geringerer Geschwindigkeit vor sich geht. Wenn wir hier nach der Aenderung der Geschwindigkeit fragen, so haben wir, weil $v = \varphi(t)$ eine Function von t ist, $v + \Delta v = v + \frac{dv}{dt} \cdot \Delta t + \ldots$, also $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 v}{dt^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} + \ldots$. Je kleiner nun hier Δt und mithin auch Δv wird, desto mehr nähert sich $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ dem $\frac{dv}{dt}$ und desto genauer können wir also auch innerhalb des Zeitintervalles Δt die

Digitized by Google

ungleichförmig beschleunigte Bewegung mit einer gleichförmig beschleunigten vergleichen, deren constantes Beschleunigungsmaass $= \frac{dv}{dt}$ ist. Darum nennen wir den Differentialquotienten $\frac{dv}{dt}$ ebenfalls das Maass der Beschleunigung für die Bewegung mit ungleichförmig veränderter Geschwindigkeit.

Wenn nun $\frac{dv}{dt} = p$ gesetzt wird, so ist $dv = pdt$ und $v = \int pdt$. Weil aber $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so hat man auch $p = \frac{dds}{dt^2}$, oder $dds = p.dt^2$. Natürlich ist hierbei das Differential der Zeit constant genommen.

Hier ist also das Beschleunigungsmaass p ein veränderliches, aber der einfachste Fall wäre wieder der, wo die Aenderung von p der Zeit proportional wäre, also $p = b + \beta t$ gesetzt werden könnte. Dann hätte man $dv = pdt = b.dt + \beta t.dt$, also $v = bt + \frac{1}{2}\beta t^2 + k$, wo k eine Constante bedeutet. Ferner $ds = vdt = bt.dt + \frac{1}{2}\beta t^2.dt + k.dt$, und daher $s = kt + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{6}\beta t^3 + k'$. Nehmen wir aber für den einfachsten Fall $b = k = k' = 0$, so wird $s = \frac{1}{6}\beta t^3$, welches die einfachste Vergleichung zwischen Zeit und Weg bei einer Bewegung mit gleichförmig wachsendem Beschleunigungsmaasse gäbe.

6) Nun könnten wir aber wieder jenes β veränderlich setzen, und indem wir eine solche Bewegung mit derjenigen vergleichen, bei welcher β constant ist, würden wir für den Differentialquotienten $\frac{dp}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$ eine Bedeutung gewinnen. Doch geht unsere Zergliederung der Naturerscheinungen nicht so weit, dass wir für $\frac{d^3s}{dt^3}$ eine physikalische Analogie anzugeben wüssten.

7) Dieses bezieht sich zunächst nur auf die Bewegung von Punkten. Bewegt sich aber ein Körper, so ist der einfachste Fall der, wo alle seine Punkte identische Linien beschreiben, also jede, dieselben zwei Punkte verbindende Gerade in allen Lagen sich parallel bleibt. Diese Bewegung nennen wir die progressive, und es wird dieselbe vollständig erkannt, wenn die Bewegung irgend eines Punktes am Körper erkannt wird.

§. 2.

1) Jedwede Bewegung eines Punktes A ist **relativ**, d. h. sie wird bezogen und gilt nur in Bezug auf gewisse Punkte, welche sich in Ruhe befinden oder als ruhend gedacht werden. Wenn die Bewegung in derselben Ebene geschieht, was wir hier der Einfachheit wegen zuerst voraussetzen wollen, genügen bloss zwei Punkte LM zur Bestimmung der Lage von A, deren einer als Anfangspunkt der Abscissen, der andere zur Bestimmung der Lage der Abscissenlinie dient.

Die Punkte LM können sich jedoch, ohne ihre gegenseitige Lage zu ändern, selbst wieder bewegen, und man kann die Bewegung auf die als ruhend gedachten Punkte $L'M'$ beziehen. In Bezug auf diese wird die Bewegung von A im Allgemeinen ganz anders ausfallen, als in Bezug auf LM, d. h. A wird eine ganz andere Linie beschreiben, wenn man die Bewegung auf $L'M'$ bezieht, als wenn man sie auf LM bezieht. Die Bewegung des Punktes

Digitized by Google

A in Bezug auf $L'M'$ nennen wir nun **zusammengesetzt** aus seiner Bewegung in Bezug auf die Punkte LM und aus der, ihm in Folge der Bewegung von LM zukommenden Bewegung.

2) Für die Construction der zusammengesetzten Bewegung gilt der Grundsatz der **gegenseitigen Unabhängigkeit der einzelnen Bewegungen**. Sucht man den Ort von A in Bezug auf $L'M'$ zur Zeit t, so lasse man die Punkte LM vorerst ruhen und bestimme in Bezug auf sie den Ort A' von A nach der Zeit t in Folge der Bewegung, welche dem A in Bezug auf LM zukommt. Alsdann lasse man die Punkte LM die Zeit t hindurch sich so bewegen, wie es ihnen in Bezug auf $L'M'$ zukommt, ohne jedoch die Lage von A' gegen LM zu ändern. Hierdurch kommt A' in die Lage A'', welches der richtige Ort von A in Bezug auf $L'M'$ nach der Zeit t sein wird. Man kann aber auch zuerst LM sich bewegen und A ruhen, dann aber LM ruhen und A sich bewegen lassen, wenn nur jede Bewegung gleich lange dauert. Dieses ist geometrisch unmittelbar klar, da einerseits eine bestimmte Lage von LM gegen $L'M'$, anderseits aber auch eine bestimmte Lage von A gegen LM am Ende der Zeit t gefordert wird.

3) Einfacher wird die Sache, wenn die Bewegung von LM bloss eine progressive ist, so dass die Linie LM in allen Lagen sich parallel bleibt. Dann beschreibt jeder Punkt von LM und auch der gegen LM ruhend gedachte Punkt A dieselbe Linie, welcher Umstand es unnütz macht, dass man die Linie LM weiter betrachte. Denn die Linie, welche A in Folge seiner auf die Punkte LM bezogenen Bewegung beschreibt, erhalten wir eben so, wenn wir LM ruhend denken und die Bewegung auf $L'M'$ beziehen. Kennen wir nun noch die Linie, welche das gegen LM ruhende A in Folge der auf $L'M'$ bezogenen Bewegung von LM beschreibt, so ist der Ort von A zu jeder Zeit vollkommen bestimmt. Sind AA' und AA'' die Linien, welche A vermöge einer jeden Bewegung, wenn sie allein statt hätte, in der Zeit t beschreiben würde, so ziehe man durch A' eine mit AA'' parallele und identische Linie $A'A'''$, oder auch durch A'' eine mit AA' parallele und identische Linie $A''A'''$, so ist A''' der Ort von A zur Zeit t. Offenbar kann man aber auch mit den geraden Linien AA' und AA'' und ihrem Zwischenwinkel $A'AA''$ ein Parallelogramm $AA'A'''A''$ beschreiben, da dann A''' ebenfalls der richtige Ort von A zur Zeit t sein wird.

4) Hier haben wir nun die Vorstellung zweier Bewegungen eines und desselben Punktes erhalten, welche ihm beide zu gleicher Zeit zukommen. Er bewegt sich nämlich zwiefach so, als ob er in der Linie AA' fortrücke, diese selbst aber wieder eine progressive Bewegung nach der Linie AA'' habe, die also auch dem Punkte A zukommt. Dabei nennen wir nun die Linien AA' und AA'' die **Seitenbewegungen** oder **Componenten**, und die Construction, nach welcher der wahre Ort A''' für jede Zeit gefunden wird, heisst das **Parallelogramm der Bewegungen**.

Das Parallelogramm der Bewegungen wenden wir jedoch immer nur in dem Falle an, wo die Seitenbewegungen AA' und AA'' selbst geradlinig sind. Wir können darnach leicht die aus zwei gegebenen Seitenbewegungen entstehende mittlere Punkt für Punkt bestimmen, auch umgekehrt jede Bewegung in zwei gerade Seitenbewegungen zerlegen, von denen die eine ganz willkührlich ist.

Digitized by Google

5) Wenn die Seitenbewegungen AA' und AA'' beide gerade und einerlei Function der Zeit proportional sind, dass also zu jeder Zeit AA' und AA'' einerlei Verhältniss haben, so ist das Parallelogramm $AA'A'''A''$ nicht nur die Hülfsconstruction, um den Ort des Punktes A zur Zeit t zu finden, sondern derselbe hat in der Zeit t die Diagonale AA''' selbst durchlaufen, also dass die zusammengesetzte Bewegung selbst auch eine gerade ist.

Ist u die Function von t, welcher die Seitenbewegungen AA' und AA'' proportional sind, so hat man $AA' = s = au$, $AA'' = s' = bu$, wenn a und b zwei Constanten bedeuten. Ist ferner A der Winkel, den die Seitenbewegungen mit einander machen, so ist die Diagonale $AA''' = s'' = u\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos A}$, woraus folgt, dass auch die zusammengesetzte Bewegung derselben Function von t proportional ist. Die Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen sind $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{ds'}{dt}$, und die der zusammengesetzten Bewegung ist $\frac{ds''}{dt} = \frac{du}{dt}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos A} = \sqrt{\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{ds'^2}{dt^2} + 2 \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds'}{dt}\cos A}$, woraus folgt, dass die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung aus denen der Seitenbewegungen ebenfalls nach dem Parallelogramm zusammengesetzt ist.

Aber auch das Beschleunigungsmaass der zusammengesetzten Bewegung ist aus den Beschleunigungsmaassen der Seitenbewegungen nach dem Parallelogramm zusammengesetzt, denn man hat

$$\frac{d^2s''}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos A}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2s'}{dt^2}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\left(\frac{d^2s'}{dt^2}\right)\cos A.}$$

§. 3.

1) Alle diese Sätze sind zunächst nur von mathematischer Bedeutung; Anwendung auf die Natur erhalten sie zuerst durch das Gesetz der Trägheit. Nach diesem kann kein Körper seinen Zustand der Ruhe oder der Bewegung von selbst ändern, sondern hierzu gehört allemal eine Einwirkung von Aussen her, welche wir Kraft nennen. Um aber eine bestimmtere Sprache zu haben, wollen wir die Ursache, wodurch eine gleichförmige Bewegung erzeugt worden ist, einen Eindruck nennen. Diese einmal erhaltene gleichförmige Bewegung dauert nach dem Gesetze der Trägheit mit unveränderter Richtung und Geschwindigkeit so lange fort, bis durch einen neuen Eindruck dieser Zustand geändert wird. Den Eindruck haben wir ganz nach der erzeugten Bewegung zu beurtheilen; er ist also der Geschwindigkeit proportional und seine Richtung ist einerlei mit der Richtung der Bewegung. Er ist nur ein anderer Ausdruck für die Bewegung selbst, und die veränderlichen Zustände des Körpers, aus welchen zuletzt die gleichförmige geradlinige Bewegung hervorging, kommen hier nicht in Betrachtung.

2) Haben wir nun eine ungleichförmige aber stetige Bewegung,

Digitized by Google

die wir zunächst nur als geradlinig annehmen wollen, so ist dieselbe nicht anders zu denken, als durch eine ununterbrochen einwirkende Ursache oder Kraft. Denn sobald die Einwirkung aufgehört hat, ist auch der Eindruck vollendet und die Bewegung nun gleichförmig. Hieraus folgt aber sogleich, dass bei der ungleichförmigen Bewegung der Ausdruck $\frac{ds}{dt}$ diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher der Körper gleichförmig fortgehen würde, wenn am Ende der Zeit t die Einwirkung aufhörte und also der Eindruck vollendet wäre. Denn innerhalb des folgenden Zeittheiles Δt nähert sich auch bei fortdauernder Einwirkung die Bewegung um so mehr der gleichförmigen mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$, je kleiner Δt ist, d. h. je mehr wir alle fernere Einwirkung beschränken. Die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ ist also der durch die vorhergegangene Einwirkung hervorgebrachte Eindruck, und es dauert dieselbe unverändert fort, wenn alle fernere Einwirkung aufhört.

Aber wesentlich weiter kann das Gesetz der Trägheit, wie es oben ausgesprochen wurde, uns nicht führen, weil es nur sehr unbestimmte Auskunft für den Fall giebt, wo ein Körper mehrere Eindrücke zu gleicher Zeit oder auch nach einander erhält. Daher sind für die weitere Entwickelung noch andere Sätze nöthig, welche hauptsächlich, zu Folge der Darstellung aller Lehrbücher, auf folgende drei zurückkommen.

A) Wenn ein Körper gleichzeitig oder auch nach einander mehrere Eindrücke nach einerlei Richtung erhält, deren jeder ihn mit einer bestimmten Geschwindigkeit c, c', c'' u. s. w. bewegen würde, wenn er allein vorhanden wäre, so ist das Gesammtresultat aller Eindrücke eine Geschwindigkeit nach derselben Richtung, welche der Summe jener gleich ist.

B) Wenn ein Körper zwei Eindrücke nach entgegengesetzten Richtungen erhält, vermöge deren er sich mit den Geschwindigkeiten c oder c' bewegen würde, jenachdem der eine oder der andere Eindruck allein vorhanden wäre, so erfolgt die Bewegung nach der Richtung desjenigen Eindrucks, welchem die grössere Geschwindigkeit entspricht, und zwar mit einer solchen Geschwindigkeit, welche dem Unterschiede jener gleich ist.

C) Wenn ein Körper zwei Eindrücke nach verschiedenen Richtungen erhält, so dass er also nach der einen Richtung mit der Geschwindigkeit c, oder nach der anderen mit der Geschwindigkeit c' sich bewegen würde, je nachdem der eine oder der andere Eindruck allein vorhanden wäre, so erfolgt die Bewegung nach der Diagonale des aus den Geschwindigkeiten c und c' und ihrem Richtungsunterschiede construirten Parallelogramms, und zwar mit einer solchen Geschwindigkeit, welche durch eben diese Diagonale dargestellt wird.

§. 4.

Von den unter A, B, C aufgeführten Sätzen sind nun offenbar die beiden ersten schon im dritten enthalten, und sie müssen folglich alle drei das Ergebniss eines allgemeineren Grundsatzes sein. Diesen glaube ich nun so aussprechen zu können:

Digitized by Google

Wenn ein Körper gleichzeitig mehrere Eindrücke erhält, so erfolgt die Bewegung in der Weise, als ob jeder Eindruck mit unveränderter Richtung und Intensität fortbestände.

Eigentlich beweisen lässt sich dieser Satz nicht, wohl aber kann man ihn mehr erläutern und zunächst nur auf zwei Eindrücke beschränken. Gesetzt also, es habe ein Körper *A* gleichzeitig zwei Eindrücke nach den Richtungen *AB* und *AD* erhalten, so ist damit gemeint, dass der Körper *A* gleichförmig in einer bestimmten Zeit den Weg *AD* zurücklegen würde, wenn der Eindruck nach der Richtung *AB* nicht vorhanden wäre; oder aber es würde der Körper in derselben Zeit gleichförmig und geradlinig von *A* nach *B* gehen, wenn er den Eindruck nach der Richtung *AD* nicht erhalten hätte. Da nun nach obigem Grundsatze beide Eindrücke mit unveränderter Richtung und Geschwindigkeit fortbestehen, so folgt, dass der Körper *A* eine solche Bewegung machen muss, vermöge deren er sich gleichförmig aus der Linie *AD* nach der Richtung *AB* und ebenfalls gleichförmig aus der Linie *AB* nach der Richtung *AD* entfernt, und daher in der That die Diagonale des aus den gleichzeitigen Wegen *AB* und *AD* mit ihrem Richtungsunterschiede beschriebenen Parallelogramms durchläuft.

Es ist also klar, dass in dem obigen Grundsatze das Parallelogramm der Eindrücke, gewöhnlich der Kräfte genannt, unmittelbar enthalten ist. Um sich die Bedeutunng des obigen Grundsatzes noch auf andere Weise zu erläutern, denke man sich, ein Körper habe einen solchen Eindruck *P* erhalten, vermöge dessen er sich nach der Richtung *AB* gleichförmig bewegt, und es gehe derselbe in einer bestimmten Zeit von *A* bis *B*. In demselben Augenblicke, wo er in *A* ist, erhalte er einen zweiten Eindruck *Q*, so wird er sich dennoch nur gleichförmig und geradlinig bewegen können, weil der Voraussetzung zu Folge alle fernere Einwirkung sogleich aufhören soll. Er mag nun in derselben Zeit, in welcher er ohne Zuthun des zweiten Eindrucks von *A* nach *B* gegangen wäre, wirklich von *A* bis *C* gelangt sein. Hier kann man sich offenbar vorstellen, dass jener erste Eindruck *P* mit unveränderter Intensität und seiner anfänglichen Richtung beständig parallel fortbestanden, dass aber ein zweiter ebenfalls unveränderlicher und mit *BC* beständig paralleler Eindruck *R* den Körper aus der Linie *AB* weggerückt und so durch die Linie *AC* geführt habe. Dieser Eindruck *R* war in demselben Augenblicke, als der Eindruck *Q* zu *P* getreten war, also schon in *A* vorhanden, und die Behauptung kommt nun darauf zurück, dass *R* mit *Q* identisch sei, oder dass der Eindruck *R* den Körper in der Linie *AD*, die mit *BC* parallel ist, mit noch eben derselben Geschwindigkeit bewegt haben würde, wenn der Eindruck *P* nicht vorhanden gewesen wäre.

Auf diesen Grundsatz des ungestörten Fortbestehens aller Eindrücke nach Intensität und Richtung ist das Parallelogramm der Kräfte von mehreren Heroen in den mathematischen Wissenschaften, namentlich auch von Newton gestützt worden, und es folgt daraus unmittelbar durch die Zusammensetzung der Bewegungen, wofür die Regeln in §. 2. entwickelt worden sind. Dass wenigstens Newtons Meinung auf diesen Grundsatz zurückkomme, scheint mir aus seinen Worten unmittelbar hervorzugehen, welche also lauten:

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi sola M, ferretur ab A ad B, et vi sola N, ab A ad C, compleatur parallelogrammum $ABCD$, et vi utraque feretur id eodem tempore ab A ad D. Nam quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, haec vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD sive vis N imprimatur, sive non, atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa BD. Eodem argumento in fine temporis eiusdem reperietur alicubi in linea CD, et idcirco in utriusque lineae concursu D reperiri necesse est.

Die Worte: nam quoniam vis N agit u. s. w. bis genitam sprechen doch offenbar den obigen Grundsatz aus. Denselben könnte man vielleicht dem Gesetz der Trägheit noch zur Vervollständigung hinzufügen, wenigstens scheint er mit ihm nahe verwandt zu sein. Das Trägheitsgesetz, wie es oben ausgesprochen wurde, ist schon in dem allgemeineren der Naturnothwendigkeit enthalten; was es über die Bewegung lehrt, folgt aus dem letzteren unmittelbar mit Hülfe des Satzes vom zureichenden Grunde. Daher kann kein Körper durch sich selbst in Bewegung kommen, und die einmal entstandene Bewegung kann weder in Hinsicht auf Geschwindigkeit noch auf Richtung von selbst eine Aenderung erleiden. Weiter führt uns das Trägheitsgesetz auch keinen Schritt, wenn wir ihm nicht einen bestimmteren Gehalt geben. Dieses geschieht nun dadurch, dass wir es auf das gleichzeitige Zusammenwirken mehrerer Eindrücke ausdehnen. D e r K ö r p e r g e n ü g t j e d e m E i n d r u c k e g e r a d e d u r c h e b e n s o v i e l B e w e g u n g, w i e w e n n d i e s e r E i n d r u c k a l l e i n v o r h a n d e n w ä r e, und die R e g e l n f ü r d i e Z u s a m m e n s e t z u n g d e r B e w e g u n g g e b e n f o l g l i c h a u c h d i e N o r m e n f ü r d i e B e u r t h e i l u n g z u s a m m e n g e s e t z t e r E i n d r ü c k e.

§. 5.

In der neueren Zeit ist man jedoch meist von dieser Betrachtungsweise für das Kräfteparallelogramm abgekommen und hat dafür andere Demonstrationen ersonnen, die zum Theil weitläufig und sehr künstlich geordnet sind. Ich glaube nicht, dass man einen wirklichen Vortheil dadurch erreicht habe, um aber die Sache in ihr wahres Licht zu setzen, will ich mich beispielsweise auf Poissons Darstellung beziehen, zumal dieselbe nach einigen hier und da vorgekommenen Aeusserungen nicht richtig verstanden worden zu sein scheint, und Poisson allerdings verdient, gegen ungerechte Vorwürfe vertheidigt zu werden.

Poisson setzt zuerst zwei gleiche Seiteneindrücke P voraus, in welchem Falle durch den Satz des zureichenden Grundes leicht folgt, dass der Körper der Linie folgen muss, welche den Winkel der Seiteneindrücke halbirt. Macht also jeder Seiteneindruck mit der Resultante R den Winkel x, so kann man setzen $R = \varphi(P, x)$, und die erste Aufgabe ist nun, dass man zeige, es sei $\varphi(P, x) = P\varphi(x)$. Hierfür nimmt Poisson nicht, wie manche seiner Tadler, etwa bloss die Willkührlichkeit des Maasses von P, sondern mit mehr Tiefblick zugleich auch den Umstand in Anspruch,

Digitized by Google

dass in $\varphi(P,x)$ keine andere Grösse vorkommt, die mit P gleichartig ist. Da nämlich das Verhältniss $R:P$ bei jeder Maasseinheit doch dasselbe bleiben muss, so kann R nur $= P\varphi(x)$ sein. Wenn aber zur Bildung von $\varphi(P,x)$ noch eine mit P gleichartige Constante a nötbig sein sollte, so wäre auch der ganze Schluss verfehlt, und dieser Umstand ist es gerade, der hier als ein Axiom hingestellt werden muss; denn daraus, dass ich nicht wüsste, woher eine solche Constante in die Rechnung kommen sollte, kann ich doch nicht auf die Abwesenheit derselben schliessen. So könnte z. B. wohl $R = P(1 + \frac{P}{a}\varphi(x))f(x)$ sein, ohne dass das Verhältniss $P:R$ bei verschiedenen Maasseinheiten constant zu sein aufhörte. Daher kommt man auch durch diese Betrachtung nicht wesentlich weiter, als wenn man sogleich die Gleichung $R = P.\varphi(x)$ als ein Axiom annimmt.

Nun denkt sich Poisson jede Seitenkraft P als Resultante zweier gleichen Seitenkräfte Q, welche mit P den Winkel z machen und hat dann $P = Q\varphi(z)$. Von den vier Kräften Q fallen zwei zwischen P und R und machen mit R den Winkel $x - z$, geben also in der Resultante das Glied $Q\varphi(x-z)$; die beiden anderen Q machen mit R den Winkel $x + z$, geben also in R ein zweites Glied $Q\varphi(x+z)$, so dass $R = Q\varphi(x+z) + Q\varphi(x-z)$ sein muss. Weil aber auch $R = P\varphi(x) = Q\varphi(z)\varphi(x)$, so folgt augenblicklich

$$\varphi(z)\,\varphi(x) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z),$$

welche Gleichung nun zur Bestimmung der Form φ dient.

Hier stossen wir aber auf die beiden Axiome, welche den eigentlichen Nerv des Beweises ausmachen. Das erste ist das, welches ich oben in §. 3. unter A) aussprach, nach dem anderen bringt jedes Kräftepaar in der Resultante ein eben so grosses Glied hervor, wie wenn es allein wirkte. Sind denn aber diese Axiome so unmittelbar klar, dass man eine solche Demonstration der Newtonschen oder einer anderen ähnlichen vorziehen könnte? Allerdings muss zugegeben werden, dass der aus mehreren Eindrücken hervorgehende Gesammteindruck auf gleiche Weise gefunden wird, man mag die Combinationen zu je zwei machen, wie man will, aber hieraus ist doch noch nicht klar, dass man die Resultante jedes Paares als unabhängig von allen übrigen Eindrücken betrachten darf*). Muss ich aber dieses zugeben, so sehe ich nicht ab, wie ich dadurch gegen das Axiom in §. 4. in Vortheil kommen soll.

Statt der naturphilosophischen Begründung hat man aber die Analysis Poissons angegriffen, an welcher ich ganz und gar keinen Tadel aufzufinden weiss. Denn wenn auch die Functionen cos x

*) In diesen beiden Axiomen liegt auch zugleich der vollständige Grund für die Gleichung $\varphi(P,x) = P.\varphi(x)$. Denn wenn der Seiteneindruck p ist, so sei die Resultante pk. Erfolgt dann p gleichzeitig $n$mal, so entsteht der Eindruck np; aber in der Resultante wird auch der Eindruck pk, $n$mal erfolgen, und sie wird daher $np.k$, so dass also k von dem Seiteneindrucke unabhängig sein muss.

und $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ die syntaktische Eigenschaft, nach welcher $2\varphi(x)\varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z)$ ist, gemein haben, so sehe ich doch nicht ein, wie dadurch Poissons Demonstration umgestossen werden soll. Derselbe spricht ganz bestimmt die Voraussetzung aus, dass in $R = P\varphi(x)$, $\varphi(x)$ einerlei Functionsform für alle Werthe von x sei, und wenn man auch für diese Behauptung einen Beweis verlangen möchte, so muss man doch Poissons Demonstration nur aus diesem Gesichtspunkte beurtheilen. Darnach aber hat Poisson das Recht, die Ausdrücke $\varphi(x+z)$ und $\varphi(x-z)$ nach dem Taylorschen Lehrsatze aufzulösen und für die beiden daher entspringenden $\varphi(x)$, so wie auch für die beiden $\frac{d.\varphi(x)}{dx}$ u. s. w. $2\varphi(x)$, $2.\frac{d\varphi(x)}{dx}$ u. s. w. zu setzen, und die Gleichung

$$\varphi(x)\,\varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z)$$

giebt ihm dann

$$\varphi(z) = 2(1 + \frac{d^2.\varphi(x)}{\varphi(x).dx^2}\cdot\frac{z^2}{1.2} + \frac{d^4.\varphi(x)}{\varphi(x).dx^4}\cdot\frac{z^4}{1.2.3.4}\ldots).$$

Daraus geht denn hervor, dass die Quotienten $\frac{d^2\varphi(x)}{\varphi(x).dx^2}$ u. s. w. von x gar nicht mehr abhängen können. Wenn daher $\frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2} = -b^2\varphi(x)$ gesetzt wird, so folgt sogleich $\frac{d^4.\varphi(x)}{dx^4} = +b^4\varphi(x)$, $\frac{d^6.\varphi(x)}{dx^6} = -b^6\varphi(x)$ u. s. w., und mithin

$$\varphi(z) = 2(1 - \frac{b^2z^2}{1.2} + \frac{b^4z^4}{1.2.3.4}\ldots.)$$

Dieses darf nun immerhin $= 2\cos bz$ gesetzt werden, denn es bleibt ja die Freiheit, für b auch einen imaginären Werth $g\sqrt{-1}$ zu denken, so dass also in der Entwickelung von $\cos bz$ alle Glieder positiv werden und somit auch die Function $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ berücksichtigt wird. Weil aber für $z = \frac{\pi}{2}$ die Resultante R und daher auch $\varphi(z) = 0$ sein muss, so sieht man sogleich, dass $\varphi(z)$ durch die Function $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ nicht dargestellt werden kann; denn die Entwickelung derselben hat für reelle Werthe von x nur positive Glieder und kann daher, weil sie immer convergirt, für solche Werthe die 0 nicht vorstellen. Also muss in der Entwickelung von $\varphi(z)$ der Coefficient b reell sein. Nach bekannten analytischen Principien könnte nun $b = 1$, $b = 3$, $b = 5$ u. s. w. sein, allein wenn man $b > 1$ nehmen wollte, so würde man ein Gleichgewicht der Kräfte in solchen Fällen erhalten, wo es augenscheinlich nicht statt haben kann. Es ist also $\varphi(z) = 2\cos z$ und daher $R = 2P.\cos x$.

Herr Doctor Dippe hat in diesem Archive (Thl. III. S. 329.) den Beweis so geordnet, dass er von der Voraussetzung einer gleichen

Functionsform für alle Werthe des Winkels, welchen die Seitenkraft mit der Resultante macht, frei ist, wodurch seine Demonstration allerdings ein Uebergewicht über die von Poisson bekommt. Nur bin ich der Meinung, dass von den 6 Grundsätzen, welche Herr Dr. Dippe dem Beweise unterlegt, nur die beiden ersten und der fünfte nöthig sind, abgesehen von dem, was ich oben in Hinsicht auf Poissons Vortrag hervorhob. In der Gleichung

$$\varphi(x)\,\varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z)$$

sind bei Herrn Doctor Dippe die Ausdrücke $\varphi(x)$, $\varphi(z)$ u. s. w. nichts anderes, als eine Art unbestimmter Coefficienten, für welche eben jene Gleichung die Relation ausdrückt. Setzen wir $z = x$, so findet sich, da $\varphi(0) = 2$ sein muss, augenblicklich

$$\varphi(x) = \sqrt{2 - \varphi(2x)}.$$

Nun ist aber auch, wenn $x = 45°$, $\varphi(2x) = 0$, also $\varphi(45°) = \sqrt{2}$ $= 2\cos 45°$, daher dann $\varphi\left(\frac{45}{2}\right)° = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos 45°} = 2\cos\left(\frac{45}{2}\right)°$, und so folgt allgemein $\varphi\left(\frac{90}{2^m}\right)° = 2\cos\left(\frac{90}{2^m}\right)°$. Die Allgemeinheit der Gleichung $\varphi(x) = 2\cos x$ kann nun wohl auf eben die Weise dargethan werden, wie Herr Doctor Dippe es gezeigt hat.

§. 6.

Streng genommen würde uns nicht einmal das Parallelogramm zweier Eindrücke, auch wenn es noch so streng bewiesen wäre, zu einer vollständigen Begründung der Bewegungslehre führen, denn es giebt ja noch gar keine Ausführung für den Fall, wo mehr als zwei Eindrücke zusammenwirken, wenn man nicht annimmt, dass jedes beliebige Paar durch eben den Gesammteindruck sich ersetzen lasse, wenn es allein vorhanden wäre. Dieser Satz ist aber eine nothwendige Folge von dem in §. 4. aufgestellten Axiom, so dass also durch dieses die vollständige Entwickelung der Bewegungslehre vermittelt wird.

Die meisten Beweise für das Kräfteparallelogramm oder vielmehr alle, die von dem Poissonschen sich nur in der analytischen Behandlungsweise unterscheiden, machen jenen ersten Satz zur Voraussetzung. Hier meine ich aber diese Darstellungen vorzüglich desshalb tadeln zu müssen, dass sie gar keine Auskunft darüber geben, wie weit denn jener Grundsatz für die Demonstrationen des Kräfteparallegrammes ausreiche, und dass man nicht ins Klare darüber kommt, ob die zu Hülfe genommenen Axiome auch sämmtlich nothwendig waren. Der aus mehreren Eindrücken hervorgehende Gesammteindruck muss nach dem Gesetz der Naturnothwendigkeit vollkommen bestimmt sein, sowohl nach Intensität als auch nach der Richtung. Indem ich nun annehme, dass für zwei beliebige Eindrücke derjenige Gesammteindruck sich setzen lasse, den sie hervorbringen müssten, wenn sie allein wirkten, so genügt allerdings das Parallelogramm der Bedingung, dass bei jeder Combination derselbe Totaleindruck erhalten wird, aber es wäre ja auch

wohl möglich, dass nur das Parallelogramm dieser Bedingung genügte, und hierüber erhält man keine Auskunft.

Nun ist aber gleich klar, dass jenes Axiom nicht unmittelbar zum Kräfteparallelogramm führen kann, denn es wäre wohl möglich, dass nicht der Totaleindruck selbst, sondern eine gewisse Function desselben aus eben solchen Functionen der einzelnen Eindrücke nach dem Parallelogramm sich ableiten liesse, wie wenn man z. B. die $m$te Potenz der Resultante aus den $m$ten Potenzen der Componenten durch das Parallelogramm finden müsste. Wenn aber der Satz von der Summirung gleich gerichteter Eindrücke noch zu Hülfe genommen wird, so ist auch das Kräfteparallelogramm vollständig begründet. Man muss nämlich das Princip des §. 4. wenigstens für einen besondern Fall haben. Ich ordne nun den Beweis so:

1) Wenn mehr als zwei Eindrücke auf einen Körper wirken, so kann man, um den Gesammteindruck zu erhalten, für jede beliebige zwei denjenigen Totaleindruck setzen, den sie erzeugen würden, wenn sie allein wirkten.

2) Zwei gleiche entgegengesetzte Eindrücke heben sich vermöge des Satzes vom zureichenden Grunde auf, wenn sie allein wirken, also auch nach 1) in der Zusammenwirkung mit beliebigen anderen Eindrücken.

Wenn zwei Eindrücke einen Winkel mit einander machen, so folgt der Totaleindruck der Richtung keines von beiden, aber seine Richtung fällt immer in die Ebene der Seiteneindrücke.

Hieraus folgt mit Nothwendigkeit, dass wenn zwei Eindrücke auf einen Körper wirken, deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, die Richtung des Gesammteindruckes auch noch in diese Gerade fallen muss. Denn wenn die Eindrücke a, $-a$ und b nach derselben Geraden wirken, so ist der Gesammteindruck b und fällt in dieselbe Gerade, da a und $-a$ sich heben. Verbindet man nun erst b mit $-a$, so sei z der Totaleindruck und es mache derselbe mit der ersten Richtung den Winkel φ, wenn er mit ihr nicht zusammenfällt. Indem man nun wieder z mit a verbindet, entsteht nach 1) der Eindruck b, dessen Richtung mit der von a zusammenfällt. Daher kann auch nach 3) z mit a keinen Winkel machen, oder es ist $\varphi = 0$.

4) Wenn zwei gleiche Eindrücke unter einem beliebigen Winkel gegeben werden, so fällt die Richtung der Resultante allemal in die Linie, welche den Winkel der Componenten halbirt, entweder nach der einen oder nach der anderen Seite vom Scheitel. Dieses ist schon durch den Satz des zureichenden Grundes klar, obschon sich noch eine Art Beweis geben liesse.

5) Wenn zwei Eindrücke nach einerlei Richtung gegeben werden, so ist der Totaleindruck der Summe beider gleich und folgt derselben Richtung.

Daher muss nothwendig die Resultante zweier Eindrücke, die nach entgegengesetzten Richtungen gegeben werden, der Differenz beider gleich sein und der Richtung des Grösseren folgen. Denn hat man die Eindrücke b, a und $-a$, so ist b die Resultante. Verbindet man aber erst b und a, so entsteht $b+a$, und wenn noch $-a$ dazu kommt, so entsteht wieder b, d. h. $(b+a)-a$.

Nach dieser logischen Spielerei komme ich zur Demonstration des Parallelogrammes der Eindrücke. Man habe drei Eindrücke

a, b, c und es sei x der Winkel zwischen a und b, y der zwischen b und c. Welche Grösse und Richtung nun der aus a und b unter dem Winkel x entstehende Eindruck r auch haben mag, so lässt sich doch beides immer durch die Diagonale eines Parallelogrammes erhalten, wenn man nur die Componenten a und b gehörig abändert, ohne dass man desshalb auch statt des Winkels x einen andern zu setzen genöthigt ist. Gesetzt man müsse ma statt a und $m_1 b$ statt b setzen und es mache r mit b den Winkel l, so ist

$$6) \begin{cases} r \sin l = ma \sin x \\ r \cos l = ma \cos x + m_1 b. \end{cases}$$

Indem wir ferner r und c unter dem Winkel $l+y$ verbinden, um den Totaleindruck R für alle drei Componenten zu erhalten, müsse man, um nach dem Parallelogramm zu rechnen, $m_2 r$ statt r und $m_2 c$ statt c setzen. Macht R mit c den Winkel g, so hat man

$$R \sin g = m_2 r \sin(l+y)$$
$$R \cos g = m_2 r \cos(l+y) + m_2 c$$

oder wenn man $\sin(l+y)$ und $\cos(l+y)$ auflöst und statt $r \sin l$ und $r \cos l$ ihre Werthe aus 6) setzt:

$$7) \begin{cases} R \sin g = mm_2 a \sin(x+y) + m_1 m_2 b \sin y \\ R \cos g = mm_2 a \cos(x+y) + m_1 m_2 b \cos y + m_2 c. \end{cases}$$

Wir ändern nun die Ordnung der Verbindung. Indem c und b unter dem Winkel y verbunden werden, entstehe der Eindruck ϱ und es mache derselbe mit b den Winkel λ. Muss nun μc und $\mu_1 b$ statt c und b gesetzt werden, um nach dem Parallelogramm zu rechnen, so ist

$$8) \begin{cases} \varrho \sin \lambda = \mu c \sin y \\ \varrho \cos \lambda = \mu c \cos y + \mu_1 b, \end{cases}$$

und indem wir wieder ϱ und a unter dem Winkel $\lambda + x$ verbinden und, um nach dem Parallelogramm zu rechnen, $\mu_2 \varrho$ und $\mu_2 a$ statt ϱ und a setzen, erhalten wir, wenn R mit a den Winkel γ macht:

$$R \sin \gamma = \mu_2 \varrho \sin(\lambda + x)$$
$$R \cos \gamma = \mu_2 \varrho \cos(\lambda + x) + \mu_2 a,$$

woraus mit Hülfe von 8) folgt:

$$9) \begin{cases} R \sin \gamma = \mu\mu_2 c \,.\, \sin(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \sin x \\ R \cos \gamma = \mu\mu_2 c \,.\, \cos(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \cos x + \mu_2 a. \end{cases}$$

Weil aber $\gamma = x + y - g$, so findet man aus 9) nach dem bekannten Eliminationsverfahren:

$$10) \begin{cases} R \sin g = \mu_2 a \sin(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \sin y \\ R \cos g = \mu_2 a \cos(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \cos y + \mu\mu_2 c. \end{cases}$$

Digitized by Google

Aus 7) und 10) folgen nun die beiden Gleichungen, welche die Bedingung ausdrücken, dass nach beiden Combinationsfolgen doch einerlei Grösse und Richtung der Resultante herauskommen muss, nämlich:

$$11)\ \begin{cases} mm_2 a \sin(x+y) + m_1 m_2 b \sin y = \mu_2 a \sin(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \sin y \\ mm_2 a \cos(x+y) + m_1 m_2 b \sin y = \mu_2 a \sin(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \sin y \\ \qquad + m_2 c \qquad\qquad\qquad\qquad + \mu\mu_2 c. \end{cases}$$

Die weiteren Bestimmungen aber gehen aus der anderen Bedingung in Grundsatz 1. hervor, dass nämlich die Grösse und Richtung der Resultante zweier Eindrücke von allen noch gegebenen Eindrücken unabhängig sein soll. Dieser Bedingung wird nur dadurch genügt, wenn in den Gleichungen 11) die Coefficienten gleicher Sinus und Cosinus gleich sind, nämlich wenn $mm_2 = \mu_2$, $m_1 m_2 = \mu_1 \mu_2$ und $m_2 = \mu\mu_2$ ist. Um aber dieses zu beweisen, müssen wir noch einen vierten Eindruck d zugeben, welcher mit c den Winkel z machen mag*). Um für diesen Fall den Totaleindruck P zu erhalten, hat man R und d unter dem Winkel $z+g$ zu verbinden. Es mache P mit d den Winkel h und man müsse, um nach dem Parallelogramm zu rechnen, $m_4 R$ statt R und $m_4 d$ statt d setzen, so hat man

$$P \sin h = m_4 R \sin(z+g).$$

Löst man hier $\sin(z+g)$ auf und setzt statt $R \sin g$ und $R \cos g$ einmal die Werthe aus 7), dann aber auch aus 10), so findet sich:

$$P \sin h = m_4 (mm_2 a \sin(x+y+z) + m_1 m_2 b \sin(y+z) + m_2 c \sin z)$$

und

$$P \sin h = m_4 (\mu_2 a \sin(x+y+z) + \mu_1 \mu_2 b \sin(y+z) + \mu\mu_2 c \sin z).$$

Darum hat man aber

$$12)\ \begin{cases} mm_2 a \sin(x+y+z) + m_1 m_2 b \sin(y+z) + m_2 c \sin z \\ = \mu_2 a \sin(x+y+z) + \mu_1 \mu_2 b \sin(y+z) + \mu\mu_2 c \sin z \end{cases}$$

und diese Gleichung gilt für jeden Werth von z. Da aber kein m und μ nach Grundsatz 1. von z abhängt, so müssen die Coefficienten gleicher Sinus nothwendig gleich sein. Denn wenn man auch annehmen wollte. es wäre dem nicht so, so könnte man doch z so wählen, dass z. B.

$$\begin{aligned} & mm_2 a \sin(x+y+z) + m_1 m_2 b \sin(y+z) \\ = \; & \mu_2 a \sin(x+y+z) + \mu_1 \mu_2 b \sin(y+z) \end{aligned}$$

---

*) Es würde hinreichen, die erste der Gleichungen 7) mit $\cos z$, die andere mit $\sin z$ zu multipliciren und die Producte zu addiren und dasselbe Verfahren auch bei den Gleichungen 10) anzuwenden. Ich wählte statt dieses Calculs die obige Darstellung, um zugleich seine Beziehung zur Sache nachzuweisen.

Digitized by Google

würde; man brauchte nur

$$tgz = -\frac{(mm_2 - \mu_2)a \sin(x+y) + (m_1 m_2 - \mu_1\mu_2)b \sin y}{(mm_2 - \mu_2)a \cos(x+y) + (m_1 m_2 - \mu_1\mu_2)b \cos y}$$

zu nehmen. Aber dann würde doch $\mu\mu_2 = \mu_2$ werden, und da der Werth von z auf alle m und μ keinen Einfluss hat, so ist die Gleichung $\mu\mu_2 = m_2$ allgemein. Darum ist nun

$$13)\quad mm_2 = \mu_2,\ m_1 m_2 = \mu_1\mu_2,\ m_2 = \mu\mu_2$$

und dieses sind die Gleichungen, welche der Grundsatz 1. bedingt. Ich verlasse aber jetzt die allgemeine Betrachtung, weil es meine Absicht nicht ist, diesen Aufsatz mit weitläufigen Rechnungen zu füllen. Ich bringe vielmehr sogleich den Grundsatz 5. in Anwendung, und setze zu dem Behufe den Winkel $x = 0$, um b in die Rich- von a zu bringen. Alsdann ist $a + b$ die Resultante von a und b und es ist desshalb $m = m_1 = 1$, so dass die Gleichungen 13) in folgende übergehen:

$$14)\quad m_2 = \mu_2,\ m_2 = \mu_1\mu_2,\ m_2 = \mu\mu_2.$$

Darnach ist $\frac{m_2}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu}$. Nehme ich aber noch $c = b$, so wird nach Grundsatz 4. nothwendig $\mu_1 = \mu$ und daher $m_2 = m_2$. Davon ist der Sinn folgender: Bringt man an den beliebigen Eindrücken $a + b$ und b, die unter dem beliebigen Winkel y wirken, die Factoren m_2 und m_2 an, um die Resultante nach dem Parallelogramm zu berechnen, so ist allemal $m_2 = m_2$. Darum ist auch μ_1 in allen Fällen $= \mu$ und $\mu_2 = \mu_2$, und die Gleichungen 14) liefern folgende:

$$m_2 = \mu_2 \text{ und } m_2 = \mu\mu_2,$$

woraus $\mu_2 = m_2 = \mu = 1$ folgt. Hiermit ist aber das Parallelogramm der Eindrücke vollständig bewiesen.

Ich habe diesen Beweis nicht in der Meinung abgefasst, um damit meinen Vorgängern den Rang abzulaufen; meine Absicht geht vorzüglich nur auf die Erörterung der Principien der Wissenschaft. Für diessmal schliesse ich aber die Betrachtungen, um sie bei der nächsten Gelegenheit weiter fortzuführen.

Digitized by Google

XXII.
Lösung einer interessanten geometrischen Aufgabe.

Von dem

Herrn Professor Hessel

in Marburg.

Aufgabe.

Es ist gegeben ein Winkel A (Taf. IV. Fig. 3.) und ein Punkt a, der zwischen dessen Schenkeln irgendwo liegt; man soll die gerade Linie man ziehen, welche die kleinste der Linien ist, die durch den Punkt a so gezogen werden können, dass sie ihre Enden, wie m und n, in den Schenkeln von A haben.

Auflösung.

Es sei, in Taf. IV. Fig. 4., A der gegebene Winkel und a der gegebene Punkt, wie in Taf. IV. Fig. 3. Man ziehe zuerst durch a die $K'aK$ so, dass $\angle AK'a = AKa = k (= 90° - \frac{1}{2}A)$ ist. Hierdurch wird $AK' = AK$. Man ziehe ferner durch a die iap senkrecht zu aK und die laq senkrecht zu AK'. Der Winkel Kan, den die gesuchte Linie man mit $K'aK$ macht, heisse φ, und die Winkel Anm und Amn mögen mit n und m bezeichnet werden. Es ist dann $n = k + \varphi$ und $m = k - \varphi$, und man hat:

$$1)\quad am = \frac{aq}{\sin m} = \frac{aq}{\sin(k-\varphi)},$$

$$2)\quad an = \frac{ap}{\sin n} = \frac{ap}{\sin(k+\varphi)};$$

also

$$3)\quad mn = am + an = \frac{aq}{\sin(k-\varphi)} + \frac{ap}{\sin(k+\varphi)}.$$

Das Differenzial von mn, wenn φ veränderlich ist, wird also sein

$$4)\quad d.mn = \left(\frac{aq.\cos(k-\varphi)}{\sin(k-\varphi)^2} - \frac{ap.\cos(k+\varphi)}{\sin(k+\varphi)^2}\right)d\varphi.$$

Setzen wir den Differentialquotienten $\frac{d.mn}{d\varphi} = 0$, so ist

$$5)\quad \frac{aq\,.\cos m}{\sin m^2} = \frac{ap\,.\cos n}{\sin n^2}$$

oder

$$6)\quad \frac{aq}{\sin m}\,.\cot m = \frac{ap}{\sin n}\,.\cot n,$$

und man erhält, wenn man statt $\frac{aq}{\sin m}$ und statt $\frac{ap}{\sin n}$ deren Werthe aus 1. und 2. setzt (während man ohne diesen Kunstgriff zu verwickelten Ausdrücken kommt), die äusserst einfache Gleichung:

$$7)\quad am\,.\cot m = an\,.\cot n$$

oder

$$8)\quad am : an = \cot n : \cot m.$$

Wird nun As senkrecht zu mn angenommen, so ist $ms : ns = \cot m : \cot n$; es muss also

$$9)\quad ms : ns = an : am,$$

also

$$(ms + ns) : ns = (am + an) : am,$$

also, da $ms + ns = am + an = mn$ ist, auch

$$10)\quad am = ns,$$

mithin auch

$$an = ns$$

sein. Man hat sonach zur Bestimmung des Punktes s, mithin, da a gegeben ist, zur Bestimmung der Lage der gesuchten Linie $masn$, folgende zwei Bestimmungsstücke:

I) s liegt so, dass $\angle asA$ ein rechter Winkel ist;

II) s liegt in der durch a gehenden gesuchten Linie man so, dass $ns = am$ ist.

Der ersten Bedingung entsprechen die Punkte des Halbkreises $aspA$ über dem Durchmesser Aa.

Der zweiten Bedingung genügen die Punkte der Hyperbel $\sigma''as'\sigma''s\sigma\sigma'$ *), welche AK und AK' zu Asymptoten hat und durch den Punkt a geht; und diese ist gemäss der Gleichung $n's' = am'$, in welcher $n's'$ und am' die betreffenden Stücke jeder willkührlichen, durch a gelegten, die Hyperbel $as's$ in den zwei Punkten a und s' schneidenden Linie $m'n'$ bedeuten, sehr leicht zu construiren.

Der Punkt s in der gesuchten Linie $masn$ ist also der Durchschnittspunkt jenes Kreises mit dieser Hyperbel.

Da nun allgemein für jede durch a gehende Linie $m'n'$ nach den Gleichungen 1. und 2.

$$am' = \frac{aq}{\sin(k-\varphi')} \text{ und } an' = \frac{ap}{\sin(k+\varphi')},$$

*) Vergleiche Burg Artikel Hyperbel.

so ist der veränderliche Radius as' der hier erwähnten Hyperbel bestimmt durch die Gleichung

$$11)\quad as' = \frac{ap}{\sin(k+\varphi')} - \frac{aq}{\sin(k-\varphi')},$$

wo φ' den veränderlichen Winkel bedeutet, den as' mit der Basis KK' des gleichschenklichen Dreiecks $AK'K$ macht.

XXIII.

Zur Theorie der Kegelschnitte.

Von

Herrn C. Adams,

Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule zu Winterthur.

Herr Dr. Schlömilch zu Jena beweist im 3ten Bande des Archivs S. 386. einige Sätze von Sechsecken, welche in oder um einen Kegelschnitt beschrieben sind. Seine Beweise stützen sich auf die Theorie der projektivischen Gebilde, auf jene schönen Sätze, welche Steiner in seiner „Abhängigkeit geometrischer Gestalten" in strenger systematischer Folgerichtigkeit entwickelt hat. — Es dürfte nun für die Leser des Archivs nicht uninteressant sein, zur Vergleichung der verschiedenen Methoden in der Beweisführung dieselben Sätze auf andere Weise, nämlich mit Hülfe der Transversalen bewiesen zu sehen, sei es auch nur, um auf die Wichtigkeit dieser Lehre von Neuem aufmerksam zu werden. — Die Sätze, die ich als bekannt voraussetze, und deren Beweise in Carnot, Poncelet, Steiner, Plückers analytisch geometrischen Entwickelungen oder auch in meiner eigenen „Lehre von den Transversalen" nachgesehen werden können, sind folgende:

1) Wenn die Seiten eines Dreiecks oder auch ihre Verlängerungen von einer beliebigen geradlinigen Transversale geschnitten werden, so theilt diese Transversale jede Seite des Dreiecks in zwei solche Abschnitte, dass das Product aus drei nicht an einander liegenden Abschnitten gleich ist dem Producte der drei anderen.

2) Umgekehrt werden auf zwei Seiten eines Dreiecks und der Verlängerung der dritten Seite oder auch auf den Verlängerungen aller drei Seiten drei Punkte so angenommen, dass das Product aus drei nicht an einander liegenden Abschnitten der Seiten gleich

Digitized by Google

ist dem Producte der drei anderen, so liegen diese Punkte in gerader Linie.

3) Wenn zwei Dreiecke eine solche Lage haben, dass die Verbindungslinien ihrer Ecken je zwei und zwei in demselben Punkte zusammenlaufen, so liegen die Durchschnittspunkte ihrer entsprechenden Seiten in gerader Linie.

4) Umgekehrt, wenn zwei Dreiecke eine solche Lage haben, dass die Durchschnittspunkte von je zwei entsprechenden Seiten in gerader Linie liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken in einem und demselben Punkte.

5) Wenn die Seiten eines Dreiecks von einem beliebigen Kegelschnitte geschnitten werden, so entstehen auf jeder Seite vier Abschnitte, welche eine solche Beziehung zu einander haben, dass das Product der einen Hälfte gleich ist dem Producte der anderen Hälfte, vorausgesetzt, dass in einem und demselben Producte nicht solche Abschnitte vorkommen, welche einen Punkt des Kegelschnitts zum gemeinsamen Endpunkt haben.

6) Der Durchschnitt zweier Polaren in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt ist der Pol für die Verbindungslinie der Pole jener Polaren.

7) Liegen mehrere Punkte in gerader Linie, so schneiden sich ihre Polaren für irgend einen beliebigen Kegelschnitt in einem und demselben Punkte, dem Pol jener Geraden.

8) In jedem einem Kegelschnitte einbeschriebenen Sechsecke liegen die drei Durchschnittspunkte der gegenüber liegenden Seiten in gerader Linie.

9) In jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsecke schneiden sich die drei Diagonalen, welche die gegenüber liegenden Ecken verbinden, in einem und demselben Punkte.

Die Lehrsätze des Herrn Dr. Schlömilch sind nun folgende:

1) Wenn man in einem dem Kegelschnitte einbeschriebenen Sechsecke $ABCDEF$ die drei Hauptdiagonalen AD, BE, CF zieht, von welchen eine jede das Sechseck in zwei Vierecke theilt, und sodann in diesen Vierecken die der Hauptdiagonale des Sechsecks gegenüber liegende Seite bis zum Durchschnitt mit dieser Diagonale verlängert, so erhält man sechs Durchschnittspunkte M', N', P', M'', N'', P'', von denen sowohl die drei ersten als die drei letzten in gerader Linie liegen.

Beweis. Taf. IV. Fig. 5. Man betrachte drei nicht an einander anstossende Seiten AB, CD, EF einzeln als Transversalen des Dreiecks abc, so hat man nach Lehrsatz 1.:

$$aM' . bA . cB = aB . bM' . cA$$
$$aC . bD . cP' = aP' . bC . cD$$
$$aF . bN' . cE = aE . bF . cN'.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen in einander, so erhält man:

$$\text{(I)}\ aM' . bN' . cP' . aC \cdot aF . bA . bD . cB . cE$$
$$= aP' . bM' . cN' . aB . aE . bC . bF . cA . cD.$$

Nun ist aber nach Lehrsatz 5.:

$$\text{(II)}\ aC . aF . bA . bD . cB . cE = aB . aE . bC . bF . cA . cD.$$

Dividirt man (I) durch (II), so erhält man:

$$aM'.bN'.cP' = aP'.bM'.cN'.$$

Da nun die Punkte M', N', P' einzeln auf den Seiten des Dreiecks abc liegen, so sind dieselben nach Lehrsatz 2. in gerader Linie. Ebenso wird bewiesen, dass die Punkte M'', N'', P'' in gerader Linie liegen.

II) Die Gerade MN, welche nach Lehrsatz 6. die Durchschnittspunkte der drei Paare gegenüber liegender Seiten verbindet, geht zugleich durch den Durchschnitt der im vorigen Lehrsatze erwähnten Geraden $M'N'$ und $M''N''$.

Beweis. Bezeichnet man die Durchschnitte von BE und CF, AF und DE, AB und CD einzeln mit a, d, f, so sind wegen des einbeschriebenen Sechsecks $AFCDEB$ diese Punkte in gerader Linie (Lehrsatz 6.). In denselben drei Punkten a, d, f schneiden sich zugleich die Seiten der Dreiecke $M'M''M$ und $P'P''P$; mithin gehen nach Lehrsatz 4. die Verbindungslinien ihrer Ecken, d. h. die Geraden $M'P'$, $M''P''$, MP, durch einen und denselben Punkt. Denkt man sich durch die Ecken des Sechsecks $ABCDEF$ Tangenten an den Kegelschnitt gezogen, so erhält man ein umschriebenes Sechseck, das mit dem einbeschriebenen im Verhältniss der polaren Reciprocität steht; die Anwendung der Sätze 6. und 7. auf die beiden letzten Sätze führt demnach zu folgendem Satze:

III) Wenn man in einem dem Kegelschnitte umschriebenen Sechsecke die gegenüber liegenden Seiten verlängert, bis sie sich einzeln in drei Punkten durchschneiden, und man zieht von jedem dieser Durchschnittspunkte Gerade nach den beiden übrigen Ecken des Sechsecks, so schneiden sich von diesen sechs Geraden drei und drei in einem und demselben Punkte, und diese beiden neuen Punkte liegen mit dem Durchschnitte der drei Hauptdiagonalen des Sechsecks (Lehrsatz 9.) in einer und derselben Geraden.

IV) Verlängert man in einem dem Kegelschnitte einbeschriebenen Sechsecke diejenigen Diagonalen, welche von demselben ein Dreieck abschneiden, und bestimmt die Durchschnitte Q, R, S je zweier gegenüber liegenden Diagonalen dieser Art, so liegen je zwei dieser Durchschnitte mit einem der Durchschnitte M, N, P der Gegenseiten des Sechsecks in einer und derselben Geraden.

Beweis. Da die Durchschnitte g, a, h der Gegenseiten des Sechsecks $ACFDBE$ in gerader Linie liegen, so haben die Dreiecke EFh und BCg die in Lehrsatz 3. bezeichnete Lage; mithin liegen nach demselben Satze die Durchschnitte N, R, Q ihrer entsprechenden Seiten in gerader Linie. — Eben so wird bewiesen, dass die Punkte

$$M, \; Q, \; S$$
$$P, \; R, \; S$$

einzeln in gerader Linie liegen.

Die Anwendung der Sätze 6. und 7. auf IV) führt noch zu folgendem Satze:

V) Verlängert man in einem dem Kegelschnitte umschriebenen Sechsecke die erste, dritte und fünfte Seite, bis sie unter sich ein Dreieck bilden, eben so die zweite, vierte und sechste Seite, bis

Digitized by Google

auch diese ein Dreieck bilden, so schneiden sich die Verbindungslinien der gegenüber liegenden Ecken dieser Dreiecke je zwei und zwei auf den drei Diagonalen des Sechsecks.

Der Beweis dieses Satzes kann auch direkt aus dem Brianchon'schen Satze (Lehrsatz 9.) hergeleitet werden. Siehe meine Lehre der Transversalen, Lehrsatz LXXXIII.

XXIV.

Ueber die Reihen, welche den Cosinus und Sinus durch Potenzen des Bogens ausdrücken.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

In den Supplementen zu Klügels mathematischen Wörterbuche gründet der Herr Herausgeber des Archivs den Beweis der Reihen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

auf die folgenden rein goniometrischen Sätze:

$$\left.\begin{aligned}\cos n\Theta = n_0 &- n_2(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\cos\tfrac{2}{2}\Theta + n_4(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\cos\tfrac{4}{2}\Theta - \ldots\\ &- n_1(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\ \sin\tfrac{1}{2}\Theta + n_3(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\sin\tfrac{3}{2}\Theta - \ldots\end{aligned}\right\}\ (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin n\Theta = n_1(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\cos\tfrac{1}{2}\Theta &- n_3(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\cos\tfrac{3}{2}\Theta + \ldots\\ - n_2(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\sin\tfrac{2}{2}\Theta &+ n_4(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\sin\tfrac{4}{2}\Theta - \ldots\end{aligned}\right\}\ (2)$$

in welchen n eine positive ganze Zahl sein muss und n_0, n_1, n_2 u. s. w. die Binomialcoefficienten des Exponenten n bedeuten. Dieser Beweis der Cosinus- und Sinusreihen hat die grossen Vorzüge, ebensowohl von der Anwendung imaginärer Grössen, als von der Methode der unbestimmten Coefficienten frei zu sein, sobald man die Gültigkeit der Gleichungen (1) und (2) auf elementarem Wege

Digitized by Google

nachgewiesen hat. Diess geschieht a. a. O. mittelst des Schlusses von n auf $n+1$, welcher bei aller Evidenz doch das Unangenehme hat, dass man nicht weiss, wie man zu jenen Gleichungen gelangt ist.. Es dürfte daher nicht überflüssig sein, eine elementare Ableitung derselben mitzutheilen.

In einem früheren Aufsatze über die Binomialcoefficienten, Archiv I. Theil, S. 431. u. f. habe ich gezeigt, dass man auf elementarem Wege, durch ein Verfahren, welches mit dem der Differenzenrechnung Aehnlichkeit hat, zu folgenden Gleichungen gelangen kann:

$$(2\cos x)^m . \cos mx = m_0 \cos 2mx + m_1 \cos(2m-2)x + m_2 \cos(2m-4)x + \ldots .$$

oder, weil $m_0 = m_m$, $m_1 = m_{m-1}$, $m_2 = m_{m-2}$ u. s. w. ist:

$$(2\cos x)^m \cos mx = m_0 + m_1 \cos 2x + m_2 \cos 4x + \ldots . \quad (3)$$

und ebenso:

$$(2\cos x)^m \sin mx = m_1 \sin 2x + m_2 \sin 4x + m_3 \sin 6x + \ldots . \quad (4)$$

welche für $x = \frac{\pi - u}{2}$ in die folgenden übergehen:

$$(2\sin \frac{u}{2})^m \cos \frac{m(\pi-u)}{2} = m_0 - m_1 \cos u + m_2 \cos 2u - \ldots . \quad (5)$$

$$(2\sin \frac{u}{2})^m \sin \frac{m(\pi-u)}{2} = m_1 \sin u - m_2 \sin 2u + m_3 \sin 3u - \ldots . \quad (6)$$

In der Reihe (5) setzen wir nun m successive $= 0, 1, 2, 3 \ldots .$ bis zu einer beliebigen Zahl n und multipliciren die entstehenden Gleichungen mit $+n_0$, $-n_1$, $+n_2$, $-n_3$ u. s. w., so kommt:

$$\begin{aligned}
& n_0 = +n_0 \\
-\, & n_1(2\sin \tfrac{1}{2}u) \ \sin \tfrac{1}{2}u = -\, n_1(1_0 - 1_1 \cos u) \\
-\, & n_2(2\sin \tfrac{1}{2}u)^2 \cos \tfrac{2}{2}u = +\, n_2(2_0 - 2_1 \cos u + 2_2 \cos 2u) \\
+\, & n_3(2\sin \tfrac{1}{2}u)^3 \sin \tfrac{3}{2}u = -\, n_3(3_0 - 3_1 \cos u + 3_2 \cos 2u \\
& \qquad - 3_3 \cos 3u) \\
+\, & n_4(2\sin \tfrac{1}{2}u)^4 \cos \tfrac{4}{2}u = +\, n_4(4_0 - 4_1 \cos u + 4_2 \cos 2u \\
& \qquad - 4_3 \cos 3u + 4_4 \cos 4u) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm\, & n_n(2\sin \tfrac{1}{2}u)^n \cos \frac{n(\pi-u)}{2} = \pm\, n_n(n_0 - n_1 \cos u + n_2 \cos 2u \\
& \qquad - \ldots . \pm n_n \cos nu).
\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt Alles addiren und die Glieder auf der rechten Seite nach den Cosinus ordnen, so wird:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} n_0 - n_2(2\sin\tfrac{1}{2}u)^2\cos\tfrac{2}{2}u + n_4(2\sin\tfrac{1}{2}u)^4\cos\tfrac{4}{2}u - \ldots. \\ \quad - n_1(2\sin\tfrac{1}{2}u)\ \sin\tfrac{1}{2}u + n_3(2\sin\tfrac{1}{2}u)^3\sin\tfrac{3}{2}u - \ldots. \\ = n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \ldots. \\ \quad + \cos u(n_1.1_1 - n_2.2_1 + n_3.3_1 - n_4.4_1 + \ldots.) \\ \quad + \cos 2u(n_2.2_2 - n_3.3_2 + n_4.4_2 - n_5.5_2 + \ldots.) \\ \quad + \cos 3u(n_3.3_3 - n_4.4_3 + n_5.5_3 - n_6.6_3 + \ldots.) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \cos nu\,.\,n_n\,.\,n_n \end{array}\right\} \quad (7)$$

Der Coefficient eines Cosinus $\cos pu$, wo p eine positive ganze Zahl ist, würde sein

$$n_p\,.\,p_p - n_{p+1}(p+1)_p + n_{p+2}(p+2)_p - \ldots. \quad (8)$$

Die Summe dieser Reihe ist sehr leicht zu finden. Man bemerke zunächst, dass für ganze positive m und r immer $m_r = m_{m-r}$, mithin die obige Reihe auch gleich der folgenden ist:

$$n_p\,.\,p_0 - n_{p+1}(p+1)_1 + n_{p+2}(p+2)_2 - \ldots.$$

Drückt man hier n_{p+1}, n_{p+2} u. s. w. durch n_p aus und setzt für p_0, $(p+1)_1$, $(p+2)_2$ u. s. w. ihre Werthe, so ist unsere Reihe auch

$$= n_p[1 - \frac{n-p}{p+1}\cdot\frac{p+1}{1} + \frac{(n-p)(n-p-1)}{(p+1)(p+2)}\cdot\frac{(p+2)(p+1)}{1.2} - \ldots.]$$

$$= n_p[1 - \frac{n-p}{1} + \frac{(n-p)(n-p-1)}{1.2} - \ldots.]$$

Die Grössen innerhalb der Klammer sind aber nichts Anderes, als die successiven Binomialcoefficienten des Exponenten $n-p$. Das Aggregat derselben mit wechselnden Zeichen genommen ist Null, sobald $n > p$ ist. Wir haben daher auch in (8):

$$0 = n_p\,.\,p_p - n_{p+1}(p+1)_p + n_{p+2}(p+2)_p - \ldots.,\ n > p.$$

Substituiren wir diess Resultat in die Gleichung (7) für $p = 0$, $1, 2, 3, \ldots., n-1$, so findet sich, dass die Coefficienten von $\cos 0u$, $\cos u$, $\cos 2u$, ... $\cos(n-1)u$ sämmtlich $= 0$ sind. Der Coefficient des letzten Gliedes dagegen, worin $n = p$ ist, wird 1, und folglich geht die Gleichung (7) in die einfachere über:

$$\left.\begin{array}{l} n_0 - n_2(2\sin\tfrac{1}{2}u)^2\cos\tfrac{2}{2}u + n_4(2\sin\tfrac{1}{2}u)^4\cos\tfrac{4}{2}u - \ldots. \\ \quad - n_1(2\sin\tfrac{1}{2}u)\ \sin\tfrac{1}{2}u + n_3(2\sin\tfrac{1}{2}u)^3\sin\tfrac{3}{2}u - \ldots. \\ \qquad = \cos nu \end{array}\right\} \quad (9)$$

Behandelt man ebenso die Gleichung (6), so ergiebt sich:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} n_1(2\sin\tfrac{1}{2}u)\cos\tfrac{1}{2}u - n_3(2\sin\tfrac{1}{2}u)^3\cos\tfrac{3}{2}u - \ldots\ldots \\ -n_2(2\sin\tfrac{1}{2}u)^2\sin\tfrac{2}{2}u + n_4(2\sin\tfrac{1}{2}u)^4\sin\tfrac{4}{2}u - \ldots\ldots \\ = \sin nu \end{array}\right\} \quad (10)$$

Diese Gleichungen sind es, deren Ableitung gegeben werden sollte und welche für $n = \Theta$ in die a. u. O. gebrauchten übergehen.

Die Entwickelung der Cosinus und Sinusreihen aus denselben ist in kurzer Andeutung folgende. Man nehme in Formel (9) $nu = x$, also $n = \frac{x}{u}$, und setze diess in die Werthe von

$$n_1 = \frac{n}{1},\; n_2 = \frac{n(n-1)}{1.2},\; n_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\; \ldots\ldots$$

so wird:

$$\cos x = 1 - \frac{x(x-u)}{1.2}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)^2\cos\tfrac{2}{2}u + \frac{x(x-u)(x-2u)(x-3u)}{1.2.3.4}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)^4\cos\tfrac{4}{2}u - \ldots\ldots$$

$$- n_1\frac{x}{1}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)\sin\tfrac{1}{2}u + \frac{x(x-u)(x-2u)}{1.2.3}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)^3\sin\tfrac{3}{2}u - \ldots\ldots$$

Dabei sind x und u im Ganzen beliebig und nur der Bedingung unterworfen, dass $\frac{x}{u}$ eine ganze positive Zahl ist, welche aber von willkührlicher Grösse sein kann. Zugleich ist klar, dass die Reihe um so mehr Glieder haben wird, je kleiner u, d. h. je grösser $\frac{x}{u}$ ist. Die Reihe (9) hat nämlich $n + 1$ Glieder, folglich die obige $\frac{x}{u} + 1$ Glieder, eine Anzahl, die immer zunimmt, je kleiner u wird. Lassen wir endlich u zur Gränze 0 übergehen, so ist

$$\text{Lim}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u} = \text{Lim}\,\frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u} = 1,$$

folglich auch

$$\text{Lim}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)^m = 1;$$

ferner haben wir dann

$$\cos\tfrac{2}{2}u = \cos\tfrac{4}{2}u \text{ u. s. w. } \ldots\ldots = 1$$
$$\sin\tfrac{1}{2}u = \sin\tfrac{3}{2}u \text{ u. s. w. } \ldots\ldots = 0,$$

und wenn wir auch in den Coefficienten $u = 0$ nehmen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots \quad (11)$$

und diese Reihe ist jetzt eine unendliche, weil die Gliederanzahl $\frac{x}{u} + 1$ unendlich geworden ist.

Durch Anwendung des nämlichen Verfahrens auf die Gleichung (10) erhält man ebenso leicht:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \quad (12)$$

Im systematischen Vortrage der Analysis bietet die vorige Darstellung den Vortheil dar, dass sie den natürlichsten Uebergangspunkt in das Gebiet der imaginären Grössen bildet. Man kennt schon die Reihen

$$\frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} = 1 - \frac{\alpha^2 x^2}{1.2} + \frac{\alpha^4 x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

$$\frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2\alpha} = \frac{x}{1} - \frac{\alpha^2 x^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^4 x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

und braucht in denselben nur $\alpha = \sqrt{-1}$ zu nehmen, um sogleich zu den Formeln zu gelangen:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x, \quad \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x,$$

aus welchen man wieder die folgenden:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x, \quad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x$$

ableitet. Setzt man hierauf μx für μ, so ergiebt sich ganz allgemein für jedes μ die Gleichung:

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^{\mu} = \cos \mu x \pm \sqrt{-1} \sin \mu x,$$

von der man gewöhnlich auszugehen pflegt, um die Cosinus und Sinusreihe aufzufinden.

XXV.

Nachtrag zu der Abhandlung Thl. V. No. XVIII.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Nachdem die Abhandlung Th. V. No. XVIII. schon abgedruckt war, hat mir der Herr Verfasser dieser Abhandlung den folgenden, nach seiner eigenen Aeusserung „zwei wesentliche Verbesserungen" enthaltenden Nachtrag zu derselben gesandt, und rücksichtlich derselben die Bestimmung gegeben, dass die mit A. bezeichnete Verbesserung die Stelle von §. 6. 1 — 2 (exclus.), und die mit B. bezeichnete Verbesserung die Stelle der unmittelbar auf §. 7. 3. folgenden Betrachtung und der Sätze 4. und 5. einnehmen soll.

G.

A.

1. **Wenn in einer Ebene zwei Involutionen von Punkten und ausserdem ein beliebiger Punkt gegeben sind, einen Kegelschnitt zu finden, welcher durch diesen Punkt geht, und für welchen die zugeordneten Punktenpaare jener beiden Involutionen zugeordnete harmonische Pole sind.**

Auflösung. Sind die Gebilde beider Involutionen ungleichliegend, so suche man deren Hauptpunkte und sofort einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$, welcher durch diese vier und durch den gegebenen Punkt geht; so ist $\mathfrak{A}$ der verlangte. In jedem anderen Falle dagegen verbinde man den gegebenen Punkt B mit zwei zugeordneten Punktenpaaren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}'_1$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}'_1$, einer jeden der zwei gegebenen Involutionen

1. **Wenn in einer Ebene zwei Involutionen von Strahlen und ausserdem eine beliebige Gerade gegeben sind, einen Kegelschnitt zu finden, welcher diese Gerade berührt, und für welchen die zugeordneten Strahlenpaare jener beiden Involutionen zugeordnete harmonische Polaren sind.**

Auflösung. Sind die Gebilde beider Involutionen ungleichliegend, so suche man deren Hauptstrahlen und sofort einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$, welcher diese vier und die gegebene Gerade berührt; so ist $\mathfrak{A}$ der verlangte. In jedem anderen Falle dagegen suche man auf der gegebenen Geraden A das gemeinschaftliche Paar zugeordneter Punkte zweier Involutionen, welche durch die Durchschnitte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}'_1$;

Digitized by Google

durch die Geraden a, a'; b, b' und a_1, a'_1; b_1, b'_1 und suche das gemeinschaftliche Paar zugeordneter Strahlen e, e' zweier Involutionen, welche durch a, a'; b, b' und a_1, a'_1; b_1, b'_1 bestimmt werden; so sind diese Strahlen e, e' nach §. 3. 5. nothwendig vorhanden. Sodann suche man in den gegebenen Involutionen diejenigen Punkte $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1$, welche dem Durchschnitte p ihrer Richtungslinien S, S_1 zugeordnet sind, verbinde diese Punkte mit einander durch eine Gerade P und die Punkte B_1, B_2, wo P von e, e' geschnitten wird, mit je zwei zugeordneten Punktenpaaren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}'$.... irgend einer der gegebenen Involutionen durch die Geraden a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2....; so schneiden sich die letzteren paarweise auf dem Umfange des verlangten Kegelschnittes $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}'_1$ der Geraden A mit zwei zugeordneten Strahlenpaaren a, a'; b, b' und a_1, a'_1; b_1, b'_1 einer jeden der zwei gegebenen Involutionen bestimmt werden: so sind diese Punkte $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ nach §. 3. 5. nothwendig vorhanden. Sodann suche man in den gegebenen Involutionen diejenigen Strahlen q, q_1, welche der Verbindungslinie P ihrer Mittelpunkte s, s_1 zugeordnet sind, verbinde den Durchschnitt p dieser Strahlen q, q_1 mit den Punkten $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ durch die Geraden A_1, A_2 und endlich die Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1$.... $\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1$...., wo A_1 von deu Strahlen a, b, c, d.... a', b', c', d'.... irgend einer der gegebenen Involutionen geschnitten wird, mit den entsprechenden Punkten $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_2$.... $\mathfrak{a}'_2, \mathfrak{b}'_2, \mathfrak{c}'_2, \mathfrak{d}'_2$...., wo A_2 von deu zugeordneten Strahlen a', b', c', d'.. a, b, c, d.... derselben Involution geschnitten wird, durch gerade Linien, so sind diese die Tangenten des verlangten Kegelschnittes $\mathfrak{A}$.

Beweis (links). Da $B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \dots) \equiv S(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \dots) = S'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' \dots) \equiv B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \dots)$ ist, so ist

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \dots) = B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \dots),$$

also liegen die Punkte B_1, B_2 und die Durchschnitte von a_1, a_2; b_1, b_2 .... auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{A}$; und da auch die Geraden B_1B_2, B_2p; B_1p, B_2B_1; e, e' entsprechende Strahlenpaare von B_1, B_2 sind, so muss $\mathfrak{A}$ die Geraden B_2p und B_1p in den Punkten B_2, B_1 berühren und auch durch den Punkt B gehen. Bedient man sich zur Construction von $\mathfrak{A}$ der Punktenpaare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}'_1$; $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}'_1$; $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}'_1$; $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}'_1$, ..., so fällt der neue Kegelschnitt mit dem vorigen zusammen, indem beide den Punkt B, die Tangenten B_1p, B_2p und deren Berührungspunkte gemein haben. Da nun p der harmonische Pol von P für $\mathfrak{A}$ ist, also P durch die harmonischen Pole von S, S_1 für $\mathfrak{A}$ geht, so sind nach §. 4. 2. die Punktenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}'$.... und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}'_1$; $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}'_1$; $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}'_1$; $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}'_1$.... zugeordnete harmonische Pole für $\mathfrak{A}$.

Vertauscht man den Punkt B links und die Gerade A rechts nach und nach mit anderen Punkten und Geraden, ohne die gegebenen Involutionen zu ändern, so erhält man links ein System von Kegelschnitten mit zwei zugeordneten gemeinschaftlichen Sekanten S, S_1, und rechts eines mit zwei zugeordneten gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitten s, s_1, welche reell oder ideal sind, jenach-

dem die gegebenen Involutionen aus ungleichliegenden oder aus gleichliegenden Gebilden bestehen. Jeder Punkt oder jede Gerade in der Ebene eines solchen Systemes gehört einem der dazu gehöriges Kegelschnitte an; hieraus und aus §. 5. ergiebt sich:

2. 2.

B.

Eine beliebige Gerade A werde von der gemeinschaftlichen Sekante S der Kegelschnitte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ im Punkte $\mathfrak{s}$, und von den harmonischen Polaren $a', b', c', d' \ldots$ ihres gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes s in den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ geschnitten, wobei vorausgesetzt wird, dass $a', b', c', d' \ldots$ durch einerlei Punkt p gehen; es seien $a, b, c, d \ldots$ die harmonischen Polaren der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$, welche also sämmtlich durch s gehen müssen; und $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ seien die Strahlen, welche von s nach $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ gehen; endlich seien $a'', b'', c'', d'' \ldots$ die harmonischen Polaren des Punktes $\mathfrak{s}$ für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$, welche also sämmtlich durch einerlei Punkt B'' der gemeinschaftlichen Sekante S und einzeln durch die harmonischen Pole $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ von S für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ gehen müssen. Diess vorausgesetzt, so schneiden sich je zwei Strahlen $a, a''; b, b''; c, c''; d, d'' \ldots$ im harmonischen Pole der Geraden A für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ Aber die Strahlen $a, b, c, d \ldots$ bilden einen Strahlbüschel s oder B, welcher mit dem von $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ gebildeten Strahlbüschel B_1 involutorisch ist, indem je zwei Strahlen $a, a_1; b, b_1 \ldots$ zugeordnete harmonische Polaren von s für sämmtliche Kegelschnitte sind; der letztere wieder ist mit dem von $a', b', c', d' \ldots$ gebildeten, p oder B', perspectivisch, und dieser zufolge des vorigen Satzes mit dem von $a'', b'', c'', d'' \ldots$ gebildeten, B'', projectivisch; also ist auch $B(a, b, c, d \ldots) \equiv B''(a'', b'', c'', d'' \ldots)$. Bedenkt man nun noch, indem man die Durchschnitte von S und derjenigen Strahlen von B, welche den Strahlen $sp, s\mathfrak{s}$ des Strahlbüschels B_1 entsprechen, mit $q, \mathfrak{s}_1$ bezeichnet, dass in den Strahlbüscheln B, B_1, B', B'' der Reihe nach sich die Strahlen $sq, sp, sp, B''s$ und $s\mathfrak{s}_1, s\mathfrak{s}, p\mathfrak{s}, B''\mathfrak{s}$ entsprechen, so erhält man links, und ähnlicher Weise rechts, den Satz:

4. Hat eine Schaar von Kegelschnitten eine reelle oder ideale Sekante und einen reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein,

so liegen a) die harmonishen Pole einer beliebigen Geraden ihrer Ebene in Bezug auf alle diese Kegelschnitte auf den Umfängen zweier Kegelschnitte, welche die gemeinschaftliche Sekante in den nämlichen zwei Punkten schneiden, und welche beide durch den gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitt gehen. Der

so umhüllen a) die harmonischen Polaren eines beliebigen Punktes ihrer Ebene in Bezug auf alle diese Kegelschnitte zwei nene Kegelschnitte, welche die nämlichen zwei Strahlen des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes und beide die gemeinschaftliche Sekante berühren. Der eine von jenen zwei Strahlen ist die der Verbindungs-

Digitized by Google

eine von jenen zwei Punkten ist der dem Durchschnitte jener Geraden und der gemeinschaftlichen Sekante zugeordnete harmonische Pol; der andere liegt auf demjenigen Strahle des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes, dessen zugeordnete harmonische Polare nach jenem Durchschnitte geht. Der eine dieser beiden Kegelschnitte berührt im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte die eine, der andere die andere der beiden Geraden, welche die harmonischen Pole der gemeinschaftlichen Sekante für die betreffenden Gruppen von Kegelschnitten enthalten. Daher haben b) alle Kegelschnitte, welche den verschiedenen Geraden in der Ebene der ersten Schaar entsprechen, einen und denselben Punkt gemein und berühren in diesem Punkte die eine oder die andere von zwei festen Geraden. c) Unter diesen befinden sich auch zwei Kegelschnitte, welche, indem sie der unendlich - entfernten Geraden der Ebene entsprechen, die Mittelpunkte aller Kegelschnitte der ersten Schaar enthalten.

linie jenes Punktes und des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes zugeordnete harmonische Polare; der andere geht nach demjenigen Punkte der gemeinschaftlichen Sekante, dessen zugeordneter harmonischer Pol auf jener Verbindungslinie liegt. Der eine dieser beiden Kegelschnitte berührt die gemeinschaftliche Sekante in dem einen, der andere in dem anderen der beiden Punkte, in welchen die harmonischen Polaren des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes für die betreffenden Gruppen von Kegelschnitten convergiren. Daher haben b) alle Kegelschnitte, welche den verschiedenen Punkten in der Ebene der ersten Schaar entsprechen, eine und dieselbe Tangente gemein und berühren dieselbe in dem einen oder dem anderen von zwei festen Punkten. c) Unter diesen befinden sich auf solche, welche paarweise von den, einerlei Richtung zugeordneten Durchmessern aller Kegelschnitte der ersten Schaar umhüllt werden, indem sie den unendlich-entfernten Punkten der verschiedenen Geraden der Ebene entsprechen.

(Der nun folgende Satz 5. nebst der beigefügten Note ist wegzulassen.)

Digitized by Google

XXVI.
Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Doctor Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena.

1) Sei das gleichschenkliche Dreieck MNO (Taf. IV. Fig. 6.) das Profil eines geraden Kegels, AB das einer ihn schneidenden Ebene. Der Schnitt sei so geführt, dass die entstehende Durchschnittfigur eine Ellipse bildet, von welcher AB die grosse Achse darstellt. Die zur Construction der Ellipse noch nöthige kleine Achse findet man durch folgendes Verfahren: Man halbire AB in C und ziehe durch diesen Punkt eine Gerade parallel OP, und eine zweite parallel MN, welche letztere die Gerade OP in G und MO in H schneidet. Mit GH als Halbmesser beschreibe man aus G als Mittelpunkt einen Kreisbogen, der die durch C gezogene Senkrechte in K schneidet; CK ist dann die kleine Halbachse der Ellipse. Nimmt man also $CD = CE = CK$ senkrecht auf AB, so hat man in AB die grosse, in DE die kleine Achse der entstandenen Ellipse, die nun leicht gezeichnet werden kann.

Wie lässt sich die Richtigkeit dieses Verfahrens beweisen? Welche Modification tritt ein, wenn der Kegel ein schiefer ist?

2) In (Taf. IV. Fig. 7.) stelle die gezeichnete Curve eine gleichseitige Hyperbel dar; von einem Punkte P derselben sind nach den Endpunkten A und B der Achse die Geraden AP, BP gezogen. Errichtet man in einem beliebigen Punkte M der verlängerten Achse, welcher aber zwischen B und Q liegt, eine Senkrechte MN, welche von AP und BP in D und C geschnitten wird, so ist $\angle PCD = \angle PAB$ und folglich auch $\angle PDC = \angle PBA$. Wie lässt sich diess zeigen? (Beide Sätze sind sehr leicht zu beweisen, wenn man ihnen eine projectivische Bedeutung abgewinnt.)

Algebraische Sätze, welche zu beweisen sind.

Für jede ungerade Zahl > 1 ist

$$\tfrac{1}{2} - \frac{m^2 - 1^2}{2^2} \cdot \tfrac{1}{4} + \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \tfrac{1}{6} - \ldots = 0$$

Digitized by Google

und für jede gerade Zahl >0:

$$\frac{1}{3}-\frac{m^2-2^2}{3^2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{3^2.5^2}\cdot\frac{1}{7}-\ldots\ldots=\frac{1}{m^2-1}.$$

Beide Reihen werden so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbrechen.

Einige Berichtigungen zu Theil IV.

S. 187. Z. 1. statt $\cos\beta'$ s. m. $\cos\gamma'$.
S. 191. Z. 6. ,, Reflexion s. m. Refraction.

Berichtigungen zu der Abhandlung No. XXXII. von Herrn Dr. E. G. Björling.

S. 293. Z. 1. v. u. statt $U_{\prime\prime}$ und $V_{\prime\prime}$ s. m. $u_{\prime\prime}$ und $v_{\prime\prime}$.
,, 296. Z. 1. v. n. ,, $(1+4p_1q_1)^2$ s. m. $(1+4p_1q_1)^{\frac{1}{2}}$.
,, 298. Z. 5. v. o. ,, $\int(\alpha-\beta\psi'''(\beta)d\beta)$ s. m. $\int(\alpha-\beta)\psi'''(\beta)d\beta$.
,, 299. Z. 10. v. o. ,, $\frac{1}{4}\{1-4\alpha^2)\varphi''$ s. m. $\frac{1}{4}\{(1-4\alpha^2)\varphi''$.
,, ,, ,, 12. v. o. ,, $\frac{1}{4}\{1+4\alpha^2)\varphi''$ s. m. $\frac{1}{4}\{(1+4\alpha^2)\varphi''$.
,, 300. Z. 5. v. o. ,, da s. m. $d\alpha$.
,, ,, ,, 11. v. o. ,, 2ψ s. m. $2\psi'''$.
,, 301. Z. 7. v. u. ,, $f'_1\ f'f_2$ s. m. $f'_1-f'f_2$.
,, 304. Z. 13. v. o. ,, $=c_1$ s. m. $=0$,
,, 306. Z. 6. v. o. ,, $w=$ s. m. $w=-$.
,, 313. Z. 18. v. o. ,, (44) s. m. (42).
,, 314. Z. 4. v. u. ,, xy-plano s. m. xz-plano.

XXVII.

Ueber die Theorie des Dipleidoscops.

Von

Herrn Gustav Schmidt

zu Wien.

(Von Herrn Director C. L. v. Littrow in Wien dem Herausgeber zur Aufnahme in das Archiv mitgetheilt.)

Das von E. Dent in London (82, Strand) angegebene Dipleidoscop ist so einfach in seiner Anwendung und verspricht so genaue Resultate, dass man eine allgemeine Einführung dieses Mittels, die Zeit zu bestimmen, mit Zuversicht erwarten kann. Es besteht dasselbe bekanntlich in einem von drei plan-parallelen Glasplatten gebildeten gleichschenkligen Prisma, das wir hier der Einfachheit wegen zugleich als rechtwinklig annehmen wollen; es bilden sich so von jedem leuchtenden Punkte, der vor der Hypotenusen-Fläche sich befindet, zwei reflectirte Bilder, deren eines von dieser Hypotenusenfläche des Prisma's zurückgeworfen wird, und deren anderes durch doppelte Reflexion an den Kathetenflächen entsteht. Diese beiden Bilder werden, wie aus der Natur der Sache hervorgeht, sich bei einer gewissen Bewegung des leuchtenden Gegenstandes immer gegen einander bewegen oder sich von einander entfernen, und somit auch in einer gewissen Lage dieses Gegenstandes sich decken. Ist nun ein solches Prisma einmal z. B. in Bezug auf den Meridian richtig aufgestellt, so erfolgt die Deckung auch immer wieder zur Zeit des wahren Mittags. Da eine solche Deckung mit grosser Schärfe beobachtet werden kann, und selbst die Bewaffnung des Auges mit einem Fernrohre erlaubt, da ferner die Vorrichtung bei ihrer Kleinheit durchaus keinem schädlichen Einflusse der Temperatur unterliegt, so kommen dem Dipleidoscope die Vorzüge eines Gnomons in erhöhtem Maassstabe zu, ohne dass es deshalb seine Nachtheile besässe.

Digitized by Google

Unter diesen Umständen, glaubten wir, würde ein analytischer Beweis für die Theorie dieses Instrumentes, die sich übrigens auch auf elementarem Wege entwickeln lässt, nicht ohne Interesse sein. Es handelt sich aber hier um folgenden

Lehrsatz.

Bei einem geraden Prisma von gleichschenkliger rechtwinkliger Basis decken sich die beiden Sonnenbilder zur wahren Mittagszeit, unabhängig von der Höhe der Sonne, wenn die Hypotenusenfläche senkrecht auf dem Meridian steht, und die Seitenkanten parallel zu der Ebene desselben liegen.

Beweis.

Es sei (Taf. IV. Fig. 1.) die Ebene XZ parallel zum Meridian. Das Prisma, dessen Basis ABC sei, stehe senkrecht auf der Ebene XY, und so, dass die Vorderfläche $ABA'B$ mit der Ebene YZ, und die Kante AA' mit der Axe AZ zusammenfalle. Man hat nun aus Taf. IV. Fig. 2. die Gleichung

$$\text{der Ebene} \begin{cases} AB \ldots\ldots x=0 \\ BC \ldots\ldots x+y=a \\ AC \ldots\ldots x-y=0. \end{cases}$$

Die zur Ebene XZ parallelen Lichtstrahlen, welche die Sonne im Meridian auf das Prisma wirft, sollen unter dem Winkel α gegen die Halbaxe der positiven x geneigt sein. Führen wir einen derselben durch den willkührlichen Punkt $(\xi\eta\zeta)$, so sind seine Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y-\eta=0 \\ z-\zeta=(x-\xi)\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots 1).$$

Dieser Lichtstrahl 1) schneidet die Ebene $x=0$ in dem Punkte

$$x_1=0$$
$$y_1=\eta$$
$$z_1=\zeta-\xi\operatorname{tg}\alpha.$$

Die Linie 1) kann daher auch so ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{array}{l} y-y_1=0 \\ z-z_1=x\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots 1).$$

Es ist leicht einzusehen, dass dieser Lichtstrahl 1) in der Linie

$$\left.\begin{array}{l} y-y_1=0 \\ z-z_1=-x\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots 2)$$

von der Ebene YZ oder $x=0$ reflectirt werde; somit wird auch

ein zu 1) paralleler Lichtstrahl, der die Ebene $x=0$ im Punkte $(y'''z''')$ trifft, von dieser spiegelnden Fläche in der Linie

$$\left.\begin{array}{l} y-y'''=0 \\ z-z'''=-x\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{array}\right\} \ldots.\ 3)$$

reflectirt.

Es sind nun die folgenden allgemeinen Aufgaben einzuschalten.

I. Auf die durch den Punkt $(x'y'z')$ gelegte Ebene

$$M(x-x')+N(y-y')+P(z-z')=0$$

im Punkte $(x'y'z')$ ein Perpendikel zu errichten.

Man erhält leicht

$$y-y'=\frac{N}{M}(x-x'),$$
$$z-z'=\frac{P}{M}(x-x')$$

als Gleichungen des verlangten Lothes.

II. Den Neigungswinkel δ zweier sich im Punkte $(x'y'z')$ schneidender Geraden

$$\left.\begin{array}{l} y-y'=A(x-x') \\ z-z'=B(x-x') \end{array}\right\} \ldots.\ L)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} y-y'=A'(x-x') \\ z-z'=B'(x-x') \end{array}\right\} \ldots.\ L')$$

anzugeben.

Dieser wird gegeben durch

$$\cos\delta=\frac{1+AA'+BB'}{\sqrt{(1+A^2+B^2)(1+A'^2+B'^2)}}.$$

III. Durch zwei sich schneidende Gerade L und L' eine Ebene zu legen

Diese ist:

$$(AB'-A'B)(x-x')+(B-B')(y-y')=(A-A')(z-z').$$

Verfolgen wir nun den Lichtstrahl 1) weiter, so finden wir, dass er die Ebene $x+y=a$ trifft, wenn nur ξ, η, ζ schicklich gewählt sind, und zwar im Punkte:

$$x'=a-\eta,$$
$$y'=\eta,$$
$$z'=\zeta+(a-\xi-\eta)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Wir können die Gleichungen 1) und $x+y=a$ den Formeln I., II., III. besser anpassen, wenn wir ihnen die Gestalt geben:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} y-y'=0 \\ z-z'=(x-x')\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \ldots . \quad 1)$$

und der Ebene

$$(x-x')+(y-y')=0.$$

Im Durchschnittspunkte $(x'y'z')$ errichten wir ein Loth auf die Ebene BC. Dieses ist nach I.

$$\begin{array}{l} y-y'=x-x', \\ z-z'=0. \end{array}$$

Durch dieses Loth und die Linie 1) legen wir eine Ebene. Uns der Formel III. bedienend, erhalten wir als Gleichung derselben:

$$-(x-x')\operatorname{tg}\alpha+(y-y')\operatorname{tg}\alpha+(z-z')=0 \ldots . \quad 4)$$

Wir müssen nun noch den Neigungswinkel des Lothes gegen die Linie 1) kennen lernen. Dieser wird gemessen durch

$$\cos\delta=\frac{1}{\sqrt{2(1+\operatorname{tg}\alpha^2)}}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Man muss jetzt eine Linie durch $(x'y'z')$ in der Ebene 4) ziehen, welche mit dem Einfallslothe den Winkel $360^\circ-\delta$ einschliesst. Diese Linie sei:

$$\left.\begin{array}{l} y-y'=A(x-x') \\ z-z'=B(x-x') \end{array}\right\} \ldots . \quad 5).$$

Zur Bestimmung von A und B hat man

$$-\operatorname{tg}\alpha+A\operatorname{tg}\alpha+B=0$$

und

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}=\frac{1+A}{\sqrt{2(1+A^2+B^2)}},$$

woraus

$$B=(1-A)\operatorname{tg}\alpha$$

und

$$1+A^2-2A\sin\alpha^2=1+2A+A^2$$

folgt. Man hat also entweder

$$\left.\begin{array}{l} A=0 \\ B=\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} A=\infty \\ B=-A\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\}.$$

Die beiden ersten Werthe verwandeln 5) in 1), also gehören die letzteren dem ausfallenden Strahle an, und seine Gleichungen sind somit:

$$\left.\begin{aligned} y-y' &= A(x-x') \\ z-z' &= -A(x-x')\,\mathrm{tg}\,\alpha \\ A &= \infty \end{aligned}\right\} \ldots.\ 5)$$

mithin auch

$$z-z' = -(y-y')\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

und da $y-y'$ nicht ∞ ist, muss $x-x'=0$ sein. Die endlichen Gleichungen des von dem Spiegel BC reflectirten Strahls sind daher:

$$\left.\begin{aligned} x-x' &= 0 \\ z-z' &= -(y-y')\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{aligned}\right\} \ldots.\ 5)$$

Dieser Strahl 5) trifft die Ebene AC oder $x-y=0$ im Punkte:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x' \\ y'' &= x' \\ z'' &= z'-(x'-y')\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{aligned}\right\} \text{ oder } \begin{aligned} x'' &= a-\eta \\ y'' &= a-\eta \\ z'' &= \zeta-(\xi-\eta)\,\mathrm{tg}\,\alpha. \end{aligned}$$

Um anzuzeigen, dass dieser Punkt $(x''y''z'')$ der Linie 5) und der Ebene $x-y=0$ angehöre, geben wir den Gleichungen folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} x-x'' &= 0 \\ z-z'' &= -(y-y'')\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{aligned}\right\} \ldots.\ 5) \quad \text{und } AC \ldots.(x-x'')-(y-y'')=0.$$

Das Einfallsloth im Punkte $(x''y''z'')$ ist:

$$\left.\begin{aligned} x-x'' &= -(y-y'') \\ z-z'' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Legt man durch dieses Loth und die Linie 5) eine Ebene, so erhält man:

$$(x-x'')\,\mathrm{tg}\,\alpha+(y-y'')\,\mathrm{tg}\,\alpha+(z-z'')=0 \ldots.\ 6)$$

Der Neigungswinkel des Einfallsloths gegen 5) ist gegeben durch:

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mathrm{tg}\,\alpha^2)}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Es ist jetzt nur noch übrig, eine in der Ebene 6) liegende Gerade

$$\left.\begin{aligned} y-y'' &= A(x-x'') \\ z-z'' &= B(x-x'') \end{aligned}\right\} \ldots.\ 7)$$

zu ziehen, deren Winkel mit dem Lothe durch

$$\cos\delta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}$$

Digitized by Google

bestimmt ist. Man erhält

$$B = -(1 + A)\,\mathrm{tg}\,\alpha,\quad \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{1 - A}{\sqrt{2(1 + A^2 + B^2)}},$$

also

$$1 + A^2 + 2A\sin\alpha^2 = 1 - 2A + A^2,,$$

woraus zwei Auflösungen:

$$\left.\begin{array}{l} A = 0 \\ B = -\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{l} A = \infty \\ B = -A\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{array}\right\}$$

folgen, von welchen die zweite dem einfallenden, somit die erste dem ausfallenden Strahle angehört. Die Gleichungen des vom Spiegel AC das zweite Mal reflectirten Strahles sind daher:

$$\left.\begin{array}{l} y - y'' = 0 \\ z - z'' = -(x - x'')\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{array}\right\} \ldots.\ 7)$$

Dieser trifft die Glasfläche $x = 0$ im Punkte

$$\begin{array}{l} x''' = 0, \\ y''' = y'', \\ z''' = z'' + x''\,\mathrm{tg}\,\alpha. \end{array}$$

Führt man in 7) die Grössen x''', y''', z''' statt x'', y'', z'' ein, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} y - y''' = 0 \\ z - z''' = -x\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{array}\right\} \ldots.\ 7)$$

Dieser zweimal reflectirte Strahl 7) fällt daher mit dem einmal reflectirten Strahle 3):

$$\left.\begin{array}{l} y - y'' = 0 \\ z - z''' = -x\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{array}\right\}$$

genau zusammen, was zu beweisen war.

XXVIII.

Ueber die Theorie des Dipleidoscops.

Von

dem Herausgeber.

Die in der vorhergehenden Abhandlung *) gegebene sehr einfache Analysis hat mich zu einigen allgemeineren Betrachtungen über das Dipleidoscop veranlasst, welche ich, um zugleich dem Hrn. Verfasser dieser Abhandlung das Interesse zu beweisen, mit dem ich dieselbe gelesen habe, und denselben zu weiteren Mittheilungen zu ermuntern, in dem vorliegenden Aufsatze mittheilen werde.

I.

Wir wollen, allen unseren folgenden Untersuchungen ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz zum Grunde legend, zuerst einige allgemeine Betrachtungen über Strahlen anstellen, welche auf eine auf der Ebene der xy senkrecht stehende Ebene fallen und von derselben reflectirt werden.

Die Gleichung einer jeden auf der Ebene der xy senkrecht stehenden Ebene hat bekanntlich die Form

$$1)\quad Ax + By + C = 0.$$

Die Gleichungen eines diese Ebene in dem Punkte (pqr) treffenden Strahls, wo also

$$2)\quad Ap + Bq + C = 0$$

ist, seien

$$3)\quad \frac{x-p}{\cos\alpha} = \frac{y-q}{\cos\beta} = \frac{z-r}{\cos\gamma},$$

wo α, β, γ die 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnen sollen, welche der als von dem Punkte (pqr) ausgehend gedachte einfallende Strahl mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (pqr) gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst.

Die Gleichung der durch den einfallenden Strahl gelegten, also durch den Punkt (pqr) gehenden, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene sei

$$4)\quad A'(x-p) + B'(y-q) + C'(z-r) = 0.$$

---

*) Ohne diese Abhandlung vorher gelesen zu haben, wird die vorliegende nicht ganz verständlich sein.

Da in dieser Ebene der einfallende Strahl liegt, so ist wegen der Gleichungen 3) für jedes x

$$(A'\cos\alpha + B'\cos\beta + C'\cos\gamma)(x-p) = 0,$$

also

$$5)\quad A'\cos\alpha + B'\cos\beta + C'\cos\gamma = 0.$$

Da ferner die Ebene 4) auf der Ebene 1) senkrecht steht, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$6)\quad AA' + BB' = 0.$$

Um also die Gleichung der durch den einfallenden Strahl 3) gelegten, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene zu finden, muss man die Grössen A', B', C' aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned}&AA' + BB' = 0,\\&A'\cos\alpha + B'\cos\beta + C'\cos\gamma = 0,\\&A'(x-p) + B'(y-q) + C'(z-r) = 0\end{aligned}$$

eliminiren.

Multiplicirt man zu dem Ende diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\begin{aligned}&(y-q)\cos\alpha - (x-p)\cos\beta,\\&B(x-p) - A(y-q),\\&A\cos\beta - B\cos\alpha;\end{aligned}$$

und addirt dieselben dann zu einander, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned}&(B(x-p) - A(y-q))\cos\gamma\\&+ (A\cos\beta - B\cos\alpha)(z-r)\end{aligned}\right\} C' = 0,$$

und folglich, wenn nicht $C' = 0$ ist:

$$7)\quad \left\{\begin{aligned}&\{B(x-p) - A(y-q)\}\cos\gamma\\&+ (A\cos\beta - B\cos\alpha)(z-r)\end{aligned}\right\} = 0.$$

Wenn $C' = 0$ ist, so hat man nach dem Obigen die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}&AA' + BB' + 0,\\&A'\cos\alpha + B'\cos\beta = 0,\\&A'(x-p) + B'(y-q) = 0;\end{aligned}$$

aus denen man leicht die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}&(A\cos\beta - B\cos\alpha)A' = 0,\\&\{B(x-p) - A(y-q)\}A' = 0;\end{aligned}$$

so wie auch die beiden Gleichungen

$$(A \cos\beta - B \cos\alpha)B' = 0,$$
$$\{B(x-p) - A(y-q)\}\, B' = 0$$

erhält. Ist nun nicht zugleich $A' = 0$ und $B' = 0$, so ist

$$A \cos\beta - B \cos\alpha = 0,$$
$$B(x-p) - A(y-q) = 0;$$

also auch

$$8) \quad \left.\begin{array}{l} \{B(x-p) - A(y-q)\} \cos\gamma \\ + (A \cos\beta - B \cos\alpha)(z-r) \end{array}\right\} = 0,$$

welches daher wieder die Gleichung der durch den einfallenden Strahl 3) gelegten, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene ist.

Wäre zugleich $A' = 0$ und $B' = 0$, so hätte, da auch $C' = 0$ ist, die Gleichung der durch den einfallenden Strahl 3) gelegten, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene nach 4) die ganz unbestimmte Form $0 = 0$, welches offenbar nur dann der Fall sein könnte, wenn der einfallende Strahl 3) auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stände. In diesem Falle wäre, da die gegebene Ebene 1) auf der Ebene der xy senkrecht steht, wie sogleich erhellet, $\cos\gamma = 0$, und wegen der beiden Gleichungen

$$Ax + By + C = 0,$$
$$(x-p)\cos\beta = (y-q)\cos\alpha$$

wäre nach den Principien der analytischen Geometrie

$$A \cos\beta - B \cos\alpha = 0,$$

also wieder

$$9) \quad \left.\begin{array}{l} \{B(x-p) - A(y-q)\} \cos\gamma \\ + (A \cos\beta - B \cos\alpha)(z-r) \end{array}\right\} = 0$$

die Gleichung der durch den einfallenden Strahl 3) gelegten, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene.

Nach 7), 8), 9) ist daher immer

$$10) \quad \left.\begin{array}{l} \{B(x-p) - A(y-q)\} \cos\gamma \\ + (A \cos\beta - B \cos\alpha)(z-r) \end{array}\right\} = 0$$

die Gleichung der durch den einfallenden Strahl 3) gelegten, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene.

Die Gleichungen des von dem Punkte (pqr) ausgehenden reflectirten Strahls seien nun

$$11) \quad \frac{x-p}{\cos\varphi} = \frac{y-q}{\cos\psi} = \frac{z-r}{\cos\chi},$$

wo φ, ψ, χ die 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnen sollen, welche der reflectirte Strahl mit den positiven Theilen dreier

durch den Punkt (pqr) gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst.

Weil dieser Strahl ganz in der Ebene 10) liegt, so ist wegen der vorhergehenden Gleichungen für jedes x

$$\left.\begin{array}{r}(B\cos\varphi - A\cos\psi)\cos\gamma\,.\,(x-p)\\ +(A\cos\beta - B\cos\alpha)\cos\chi\,.\,(x-p)\end{array}\right\} = 0,$$

also

$$12)\quad (A\cos\beta - B\cos\alpha)\cos\chi - (A\cos\psi - B\cos\varphi)\cos\gamma = 0,$$

oder

$$13)\quad \frac{A\cos\beta - B\cos\alpha}{A\cos\psi - B\cos\varphi} = \frac{\cos\gamma}{\cos\chi};$$

oder

$$14)\quad A(\cos\beta\cos\chi - \cos\gamma\cos\psi) - B(\cos\alpha\cos\chi - \cos\gamma\cos\varphi) = 0,$$

oder

$$15)\quad \frac{\cos\alpha\cos\chi - \cos\gamma\cos\varphi}{\cos\beta\cos\chi - \cos\gamma\cos\psi} = \frac{A}{B};$$

oder auch

$$16)\quad B\cos\gamma\cos\varphi - A\cos\gamma\cos\psi + (A\cos\beta - B\cos\alpha)\cos\chi = 0.$$

Bezeichnen wir den Neigungswinkel des einfallenden Strahls 3) gegen die gegebene Ebene 1) durch i, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\sin i = \pm\frac{A\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + B\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}}{\sqrt{(A^2+B^2)\{1+(\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma})^2+(\frac{\cos\beta}{\cos\gamma})^2\}}},$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist:

$$17)\quad \sin i = \pm\frac{A\cos\alpha + B\cos\beta}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ganz eben so hat man, weil i auch der Neigungswinkel des reflectirten Strahls 11) gegen die gegebene Ebene 1) ist, ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$18)\quad \sin i = \pm\frac{A\cos\varphi + B\cos\psi}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

und aus 16), 17), 18) ergeben sich daher die beiden folgenden Gleichungen:

$$A\cos\varphi + B\cos\psi = \pm(A\cos\alpha + B\cos\beta),$$
$$B\cos\gamma\cos\varphi - A\cos\gamma\cos\psi = (B\cos\alpha - A\cos\beta)\cos\chi.$$

Daher haben wir jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$(A^2+B^2)\cos\gamma\cos\varphi = \pm A(A\cos\alpha + B\cos\beta)\cos\gamma + B(B\cos\alpha - A\cos\beta)\cos\chi,$$
$$(A^2+B^2)\cos\gamma\cos\psi = \pm B(A\cos\alpha + B\cos\beta)\cos\gamma - A(B\cos\alpha - A\cos\beta)\cos\chi,$$
$$(A^2+B^2)\cos\gamma\cos\chi = \quad (A^2+B^2)\cos\gamma\cos\chi.$$

Quadrirt man diese drei Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1$$

ist, die Gleichung

$$(A^2+B^2)\cos\gamma^2 = \quad (A\cos\alpha + B\cos\beta)^2\cos\gamma^2 + \{(A^2+B^2)\cos\gamma^2 + (B\cos\alpha - A\cos\beta)^2\}\cos\chi^2,$$

und folglich

$$\cos\chi^2 = \frac{A^2+B^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta)^2}{(A^2+B^2)\cos\gamma^2+(B\cos\alpha-A\cos\beta)^2}\cos\gamma^2,$$

also, weil

$$\cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1 - \cos\alpha^2 = \sin\alpha^2,$$
$$\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2 = 1 - \cos\beta^2 = \sin\beta^2$$

ist, wie man leicht findet:

$$\cos\chi^2 = \frac{A^2\sin\alpha^2 + B^2\sin\beta^2 - 2AB\cos\alpha\cos\beta}{A^2\sin\alpha^2 + B^2\sin\beta^2 - 2AB\cos\alpha\cos\beta}\cos\gamma^2,$$

d. i. $\cos\chi = \pm\cos\gamma$.

Setzt man nun mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\cos\chi = \pm\cos\gamma,$$
$$A\cos\varphi + B\cos\psi = \pm(A\cos\alpha + B\cos\beta),$$
$$B\cos\gamma\cos\varphi - A\cos\gamma\cos\psi = (B\cos\alpha - A\cos\beta)\cos\chi;$$

also

$$A\cos\varphi + B\cos\psi = \pm(A\cos\alpha + B\cos\beta),$$
$$B\cos\varphi - A\cos\psi = \pm(B\cos\alpha - A\cos\beta);$$

so ist, wie man hieraus leicht findet, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$\cos\varphi = \pm\cos\alpha,\quad \cos\psi = \pm\cos\beta,\quad \cos\chi = \pm\cos\gamma;$$

Digitized by Google

und die Gleichungen des reflectirten Strahls wären also nach 11)

$$\frac{x-p}{\cos\alpha}=\frac{y-q}{\cos\beta}=\frac{z-r}{\cos\gamma},$$

d. h. der reflectirte Strahl fiele mit dem einfallenden Strahle 3) zusammen, was offenbar, wenigstens im Allgemeinen, ungereimt ist. Daher müssen wir mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\cos\chi=\mp\cos\gamma,$$
$$A\cos\varphi+B\cos\psi=\pm(A\cos\alpha+B\cos\beta),$$
$$B\cos\gamma\cos\varphi-A\cos\gamma\cos\psi=\quad(B\cos\alpha-A\cos\beta)\cos\chi;$$

d. i.

$$A\cos\varphi+B\cos\psi=\pm(A\cos\alpha+B\cos\beta),$$
$$B\cos\varphi-A\cos\psi=\mp(B\cos\alpha-A\cos\beta)$$

setzen, und erhalten hieraus ohne Schwierigkeit:

$$\cos\varphi=\pm\frac{(A^2-B^2)\cos\alpha+2AB\cos\beta}{A^2+B^2},$$
$$\cos\psi=\mp\frac{(A^2-B^2)\cos\beta-2AB\cos\alpha}{A^2+B^2},$$
$$\cos\chi=\mp\cos\gamma.$$

Weil aber nach der oben den Winkeln α, β, γ und φ, ψ, χ beigelegten Bedeutung offenbar nicht $\chi=\gamma$ sein kann, sondern $\chi=180^\circ-\gamma$ sein muss, so muss man in den vorhergehenden Gleichungen die obern Zeichen nehmen, und daher

$$19)\left\{\begin{aligned}\cos\varphi&=\quad\frac{(A^2-B^2)\cos\alpha-2AB\cos\beta}{A^2+B^2},\\ \cos\psi&=-\frac{(A^2-B^2)\cos\beta-2AB\cos\alpha}{A^2+B^2},\\ \cos\chi&=-\cos\gamma\end{aligned}\right.$$

setzen.

Setzt man

$$20)\quad \operatorname{tang}\omega=\frac{B}{A},$$

so ist, wie man leicht findet:

$$21)\left\{\begin{aligned}\cos\varphi&=\quad\cos\alpha\cos2\omega+\cos\beta\sin2\omega,\\ \cos\psi&=\quad\cos\alpha\sin2\omega-\cos\beta\cos2\omega,\\ \cos\chi&=-\cos\gamma;\end{aligned}\right.$$

und folglich, wenn man nun noch, was offenbar verstattet ist:

Digitized by Google

$$22)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \cos\lambda\,\cos\mu, \\ \cos\beta = \sin\lambda\,\cos\mu, \\ \cos\gamma = \sin\mu \end{cases}$$

setzt:

$$23)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \cos(2\omega-\lambda)\cos\mu, \\ \cos\psi = \sin(2\omega-\lambda)\cos\mu, \\ \cos\chi = -\sin\mu. \end{cases}$$

Also sind nach 11) die Gleichungen des reflectirten Strahls:

$$24)\quad \begin{cases} x-p = -(z-r)\,\cos(2\omega-\lambda)\cot\mu, \\ y-q = -(z-r)\,\sin(2\omega-\lambda)\cot\mu. \end{cases}$$

II.

Indem wir der eigentlichen Theorie des Dipleidoscopes jetzt näher treten, wollen wir, was offenbar verstattet ist, das System der xyz so annehmen, dass die Ebene der xy auf den drei Seitenflächen des Prismas senkrecht steht, und dieser Annahme zufolge die Gleichungen der drei Seitenflächen des Prismas, die wir nach der Ordnung, in welcher die drei folgenden Gleichungen geschrieben sind, die erste, zweite, dritte Seitenfläche nennen wollen, durch

$$25)\quad \begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

bezeichnen. Die Gleichungen des einfallenden, die erste Seitenfläche in dem Punkte (pqr) treffenden Strahls seien wie vorher

$$26)\quad \frac{x-p}{\cos\alpha} = \frac{y-q}{\cos\beta} = \frac{z-r}{\cos\gamma},$$

wo α, β, γ ganz dieselbe Bedeutung haben wie oben; so ist, wenn für den von der ersten Seitenfläche reflectirten Strahl auch φ, ψ, χ ganz dieselbe Bedeutung wie vorher behalten, und

$$27)\quad \tang\omega = \frac{B}{A},$$

so wie

$$28)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \cos\lambda\,\cos\mu, \\ \cos\beta = \sin\lambda\,\cos\mu, \\ \cos\gamma = \sin\mu \end{cases}$$

gesetzt wird, nach 23)

$$29)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \cos(2\omega-\lambda)\cos\mu, \\ \cos\psi = \sin(2\omega-\lambda)\cos\mu, \\ \cos\chi = -\sin\mu; \end{cases}$$

und die Gleichungen des von der ersten Seitenfläche reflectirten Strahls sind nach 24):

$$30)\quad \begin{cases} x-p=-(z-r)\cos(2\omega-\lambda)\cot\mu, \\ y-q=-(z-r)\sin(2\omega-\lambda)\cot\mu. \end{cases}$$

Die Gleichungen eines dem Strahle 26) parallelen, die erste Seitenfläche in dem Punkte $(p'q'r')$ treffenden Strahls sind

$$31)\quad \frac{x-p'}{\cos\alpha}=\frac{y-q'}{\cos\beta}=\frac{z-r'}{\cos\gamma}.$$

Trifft nun dieser Strahl die zweite Seitenfläche in dem Punkte $(p'_1q'_1r'_1)$, so hat man zur Bestimmung der Coordinaten p'_1, q'_1, r'_1 die Gleichungen

$$A_1p'_1+B_1q'_1+C_1=0,$$
$$\frac{p'_1-p'}{\cos\alpha}=\frac{q'_1-q'}{\cos\beta}=\frac{r'_1-r'}{\cos\gamma}$$

oder

$$A_1(p'_1-p')+B_1(q'_1-q')+A_1p'+B_1q'+C_1=0,$$
$$\frac{p'_1-p'}{\cos\alpha}=\frac{q'_1-q'}{\cos\beta}=\frac{r'_1-r'}{\cos\gamma};$$

aus denen sich

$$32)\quad \begin{cases} p'_1-p'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\alpha+B_1\cos\beta}\cos\alpha, \\ q'_1-q'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\alpha+B_1\cos\beta}\cos\beta, \\ r'_1-r'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\alpha+B_1\cos\beta}\cos\gamma; \end{cases}$$

oder

$$33)\quad \begin{cases} p'_1-p'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\lambda+B_1\sin\lambda}\cos\lambda, \\ q'_1-q'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\lambda+B_1\sin\lambda}\sin\lambda, \\ r'_1-r'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\lambda+B_1\sin\lambda}\operatorname{tang}\mu; \end{cases}$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$34)\quad k_1=\frac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\lambda+B_1\sin\lambda}$$

gesetzt wird,

$$35)\quad \begin{cases} p'_1=p'-k_1\cos\lambda, \\ q'_1=q'-k_1\sin\lambda, \\ r'_1=r'-k_1\operatorname{tang}\mu \end{cases}$$

ergiebt.

Digitized by Google

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von dem Punkte (p'_1, q'_1, r'_1) ausgehende, von der zweiten Seitenfläche reflectirte Strahl mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (p'_1, q'_1, r'_1) gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst, durch φ_1, ψ_1, χ_1; so ist, wenn

$$36)\quad \operatorname{tang}\omega_1 = \frac{B_1}{A_1}$$

gesetzt wird, nach 23)

$$37)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \cos(2\omega_1 - \lambda)\cos\mu, \\ \cos\psi_1 = \sin(2\omega_1 - \lambda)\cos\mu, \\ \cos\chi_1 = -\sin\mu; \end{cases}$$

und die Gleichungen dieses von der zweiten Seitenfläche reflectirten Strahls sind folglich

$$38)\quad \begin{cases} x - p'_1 = -(z - r'_1)\cos(2\omega_1 - \lambda)\cot\mu, \\ y - q'_1 = -(z - r'_1)\sin(2\omega_1 - \lambda)\cot\mu; \end{cases}$$

d. i. nach 35)

$$39)\quad \begin{cases} x - p' + k_1\cos\lambda = -(z - r' + k_1\operatorname{tang}\mu)\cos(2\omega_1 - \lambda)\cot\mu, \\ y - q' + k_1\sin\lambda = -(z - r' + k_1\operatorname{tang}\mu)\sin(2\omega_1 - \lambda)\cot\mu. \end{cases}$$

Ist nun $(p'_2 q'_2 r'_2)$ der Durchschnittspunkt dieses reflectirten Strahls mit der dritten Seitenfläche, so hat man zur Bestimmung der Coordinaten p'_2, q'_2, r'_2 die Gleichungen

$$A_2 p'_2 + B_2 q'_2 + C_2 = 0,$$
$$p'_2 - p' + k_1\cos\lambda = -(r'_2 - r' + k_1\operatorname{tang}\mu)\cos(2\omega_1 - \lambda)\cot\mu,$$
$$q'_2 - q' + k_1\sin\lambda = -(r'_2 - r' + k_1\operatorname{tang}\mu)\sin(2\omega_1 - \lambda)\cot\mu;$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} A_2(p'_2 - p' + k_1\cos\lambda) + B_2(q'_2 - q' + k_1\sin\lambda) \\ + A_2(p' - k_1\cos\lambda) + B_2(q' - k_1\sin\lambda) + C_2 \end{array}\right\} = 0,$$
$$p'_2 - p' + k_1\cos\lambda = -(r'_2 - r' + k_1\operatorname{tang}\mu)\cos(2\omega_1 - \lambda)\cot\mu,$$
$$q'_2 - q' + k_1\sin\lambda = -(r'_2 - r' + k_1\operatorname{tang}\mu)\sin(2\omega_1 - \lambda)\cot\mu;$$

aus denen sich leicht

$$40)\quad \begin{cases} p'_2 - p' + k_1\cos\lambda \\ = -\dfrac{A_2(p' - k_1\cos\lambda) + B_2(q' - k_1\sin\lambda) + C_2}{A_2\cos(2\omega_1 - \lambda) + B_2\sin(2\omega_1 - \lambda)}\cos(2\omega_1 - \lambda), \\ q'_2 - q' + k_1\sin\lambda \\ = -\dfrac{A_2(p' - k_1\cos\lambda) + B_2(q' - k_1\sin\lambda) + C_2}{A_2\cos(2\omega_1 - \lambda) + B_2\sin(2\omega_1 - \lambda)}\sin(2\omega_1 - \lambda), \\ r'_2 - r' + k_1\operatorname{tang}\mu \\ = \dfrac{A_2(p' - k_1\cos\lambda) + B_2(q' - k_1\sin\lambda) + C_2}{A_2\cos(2\omega_1 - \lambda) + B_2\sin(2\omega_1 - \lambda)}\operatorname{tang}\mu; \end{cases}$$

Digitized by Google

oder, wenn der Kürze wegen

$$41)\quad k_2=\frac{A_2(p'-k_1\ \cos\lambda)+B_2(q'-k_1\ \sin\lambda)+C_2}{A_2\cos(2\omega_1-\lambda)+B_2\sin(2\omega_1-\lambda)}$$

gesetzt wird:

$$42)\quad \begin{cases} p'_2=p'-k_1\ \cos\lambda-k_2\ \cos(2\omega_1-\lambda), \\ q'_2=q'-k_1\ \sin\lambda-k_2\ \sin(2\omega_1-\lambda), \\ r'_2=r'-(k_1-k_2)\ \operatorname{tang}\mu \end{cases}$$

ergieht.

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von der zweiten Seitenfläche reflectirte Strahl, wenn man sich denselben von seinem Durchschnittspunkte $(p'_2 q'_2 r'_2)$ mit der dritten Seitenfläche ausgehend denkt, mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt $(p'_2 q'_2 r'_2)$ gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst, sind offenbar $180^\circ-\varphi_1$, $180^\circ-\psi_1$, $180^\circ-\chi_1$; und nach 37) ist folglich

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ-\varphi_1)&=-\cos(2\omega_1-\lambda)\ \cos\mu, \\ \cos(180^\circ-\psi_1)&=-\sin(2\omega_1-\lambda)\ \cos\mu, \\ \cos(180^\circ-\chi_1)&=\sin\mu \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ-\varphi_1)&=\cos(180^\circ+2\omega_1-\lambda)\ \cos\mu, \\ \cos(180^\circ-\psi_1)&=\sin(180^\circ+2\omega_1-\lambda)\ \cos\mu, \\ \cos(180^\circ-\chi_1)&=\sin\mu. \end{aligned}$$

Bezeichnen nun φ_2, ψ_2, χ_2 die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von dem Punkte $(p'_2 q'_2 r'_2)$ ausgehende, von der dritten Seitenfläche reflectirte Strahl mit den positiven Theilen dreier, durch den Punkt $(p'_2 q'_2 r'_2)$ gelegter, den primitiven paralleler Axen einschliesst; so ist für

$$43)\quad \operatorname{tang}\omega_2=\frac{B_2}{A_2}$$

nach 23):

$$\begin{aligned} \cos\varphi_2&=\quad\cos(2\omega_2-2\omega_1+\lambda-180^\circ)\ \cos\mu, \\ \cos\psi_2&=\quad\sin(2\omega_2-2\omega_1+\lambda-180^\circ)\ \cos\mu, \\ \cos\chi_2&=-\sin\mu \end{aligned}$$

oder

$$44)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2=-\cos(2\omega_2-2\omega_1+\lambda)\ \cos\mu, \\ \cos\psi_2=-\sin(2\omega_2-2\omega_1+\lambda)\ \cos\mu, \\ \cos\chi_2=-\sin\mu; \end{cases}$$

und die Gleichungen des von der dritten Seitenfläche reflcetirten Strahls sind folglich

Digitized by Google

$$x - p'_2 = (z - r'_2) \cos(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) \cot \mu,$$
$$y - q'_2 = (z - r'_2) \sin(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) \cot \mu;$$

also, wenn man die aus 42) bekannten Ausdrücke der Coordinaten p'_2, q'_2, r'_2 einführt:

$$45) \left\{\begin{array}{l} x - p' + k_1 \cos \lambda + k_2 \cos(2\omega_1 - \lambda) \\ = \{z - r' + (k_1 - k_2) \tang \mu\} \cos(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) \cot \mu, \\ y - q' + k_1 \sin \lambda + k_2 \sin(2\omega_1 - \lambda) \\ = \{z - r' + (k_1 - k_2) \tang \mu\} \sin(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) \cot \mu. \end{array}\right.$$

Die Parallelität der von der ersten und dritten Seitenfläche reflectirten Strahlen wird vermöge der Gleichungen 30) und 45) dieser Strahlen vollständig durch die beiden Gleichungen

$$\cos(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) = -\cos(2\omega - \lambda),$$
$$\sin(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) = -\sin(2\omega - \lambda)$$

bedingt. Diese beiden Gleichungen bringt man leicht auf die Form

$$\{\cos 2(\omega_2 - \omega_1) + \cos 2\omega\} \cos \lambda$$
$$= \{\sin 2(\omega_2 - \omega_1) - \sin 2\omega\} \sin \lambda,$$
$$\{\sin 2(\omega_2 - \omega_1) + \sin 2\omega\} \cos \lambda$$
$$= -\{\cos 2(\omega_2 - \omega_1) - \cos 2\omega\} \sin \lambda;$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Verwandlung auf die Form

$$\cos(\omega_2 - \omega_1 + \omega) \cos(\omega_2 - \omega_1 - \omega) \cos \lambda$$
$$= \cos(\omega_2 - \omega_1 + \omega) \sin(\omega_2 - \omega_1 - \omega) \sin \lambda,$$
$$\sin(\omega_2 - \omega_1 + \omega) \cos(\omega_2 - \omega_1 - \omega) \cos \lambda$$
$$= \sin(\omega_2 - \omega_1 + \omega) \sin(\omega_2 - \omega_1 - \omega) \sin \lambda;$$

und unsere beiden Bedingungsgleichungen reduciren sich daher auf die eine Gleichung

$$\cos(\omega_2 - \omega_1 - \omega) \cos \lambda = \sin(\omega_2 - \omega_1 - \omega) \sin \lambda$$

oder

$$\cos(\omega + \omega_1 - \omega_2) \cos \lambda + \sin(\omega + \omega_1 - \omega_2) \sin \lambda = 0,$$

d. i.

$$46) \quad \cos(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \lambda) = 0,$$

welches also die Bedingungsgleichung für die Parallelität der von der ersten und dritten Seitenfläche reflectirten Strahlen ist.

Nach 25) sind

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

oder

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A},$$
$$x = -\frac{B_1}{A_1}y - \frac{C_1}{A_1},$$
$$x = -\frac{B_2}{A_2}y - \frac{C_2}{A_2}$$

die Gleichungen der drei Seiten der Grundfläche des Prismas. Weil nun nach dem Obigen

$$\tang \omega = \frac{B}{A},\ \tang \omega_1 = \frac{B_1}{A_1},\ \tang \omega_2 = \frac{B_2}{A_2};$$

also

$$\tang (360^\circ - \omega) = -\frac{B}{A},$$
$$\tang (360^\circ - \omega_1) = -\frac{B_1}{A_1},$$
$$\tang (360^\circ - \omega_2) = -\frac{B_2}{A_2}$$

ist; so kann man nach den Principien der analytischen Geometrie für $360^\circ - \omega$, $360^\circ - \omega_1$, $360^\circ - \omega_2$ die Winkel setzen, die der eine der beiden Theile, in welche die Seiten der Grundfläche des Prismas durch beliebige in denselben angenommene Punkte getheilt werden, mit dem positiven Theile der zweiten Axe eines durch einen jeden dieser Punkte gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems einschliesst, indem man diese Winkel von den positiven Theilen der zweiten Axen der in Rede stehenden Systeme an nach den positiven Theilen der ersten Axen hin von 0 bis 360° zählt; und für ω, ω_1, ω_2 kann man also die Ergänzungen dieser Winkel zu 360° setzen, welche von den positiven Theilen der zweiten Axen an nach den negativen Theilen der ersten Axen hin von 0 bis 360° gezählt werden. Leicht wird aber erhellen, dass die goniometrischen Tangenten dieser Winkel immer den goniometrischen Tangenten der von den negativen Theilen der zweiten Axen an nach den positiven Theilen der ersten Axen hin von 0 bis 360° bis zu denselben Linien gezählten Winkel gleich sind, weshalb man also auch diese letzteren Winkel, wie von nun an fortwährend geschehen soll, für ω, ω_1, ω_2 setzen kann.

Die der ersten, zweiten und dritten Seite der Grundfläche des Prismas gegenüberstehenden inneren Winkel dieser Grundfläche wollen wir respective durch Θ, Θ_1, Θ_2 bezeichnen, und die Spitze des Winkels Θ_1 als Anfang der xyz annehmen. Auch wollen wir uns die positiven Theile der Axen der x und y so angenommen denken, dass man sich, um von dem Winkel Θ_1 durch den Winkel Θ zu dem Winkel Θ_2 zu gelangen, nach derselben Richtung hin be-

wegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem negativen Theile der Axe der y durch den von dem positiven Theile der Axe der x und dem negativen Theile der Axe der y eingeschlossenen rechten Winkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der x zu gelangen.

Alles dieses vorausgesetzt, wird nun leicht erhellen, dass immer entweder

$$\omega - \omega_2 = \Theta_1$$

oder

$$\omega - \omega_2 = \Theta_1 - 360^\circ$$

ist; und eben so leicht wird, wenn man sich durch die Spitze des Winkels Θ_2 ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensysteme gelegt denkt, erhellen, dass immer, übrigens ohne alle Beziehung zu dem Vorhergehenden, entweder

$$\omega_1 - (\omega \pm 180^\circ) = \Theta_2$$

oder

$$\omega_1 - (\omega \pm 180^\circ) = \Theta_2 - 360^\circ$$

ist. Aus diesen und den vorhergehenden Gleichungen ergiebt sich nun durch Addition, dass, wenn n eine gewisse positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, immer

$$\omega + \omega_1 - \omega_2 = \omega + \Theta_1 + \Theta_2 + n \,.\, 180^\circ,$$

also, weil

$$\Theta_1 + \Theta_2 = 180^\circ - \Theta$$

ist, immer

$$\omega + \omega_1 - \omega_2 = \omega - \Theta + (n+1)\,.\,180^\circ$$

ist. Daher ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\cos(\omega + \omega_1 - \omega_1) = \pm \cos(\omega - \Theta),$$
$$\sin(\omega + \omega_1 - \omega_2) = \pm \sin(\omega - \Theta);$$

also ebenfalls mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\cos(\omega + \omega_1 - \omega_2)\ \cos\lambda = \pm \cos(\omega - \Theta)\ \cos\lambda,$$
$$\sin(\omega + \omega_1 - \omega_2)\ \sin\lambda = \pm \sin(\omega - \Theta)\ \sin\lambda;$$

und folglich

$$\cos(\omega + \omega_1 - \omega_2)\ \cos\lambda + \sin(\omega + \omega_1 - \omega_2)\ \sin\lambda$$
$$= \pm \{\cos(\omega - \Theta)\ \cos\lambda + \sin(\omega - \Theta)\ \sin\lambda\},$$

d. i.

$$\cos(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \lambda) = \pm \cos(\omega - \Theta - \lambda).$$

Daher verwandelt sich die Bedingungsgleichung 46) in die Bedingungsgleichung

$$47)\quad \cos(\omega - \Theta - \lambda) = 0.$$

Für $\sin\lambda = 0$, also $\cos\lambda = \pm 1$, wird diese Bedingungsgleichung

$$48)\quad \cos(\omega - \Theta) = 0.$$

Weil nach 28) in diesem Falle $\cos\beta = 0$, also $\beta = 90°$ ist, so sind die parallelen einfallenden Strahlen 26) und 31) der Ebene der xz parallel. Da nun die Bedingungsgleichung

$$\cos(\omega - \Theta) = 0$$

von allen Elementen, durch welche die Lage der parallelen einfallenden Strahlen bestimmt wird, ganz unabhängig ist, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass, wenn diese Bedingungsgleichung erfüllt ist, für alle unter sich und mit der Ebene der xz parallel einfallende Strahlen die von der ersten und dritten Seitenfläche des Prismas reflectirten Strahlen einander parallel sind.

Nehmen wir, alle im Vorhergehenden gemachten Voraussetzungen auch jetzt fortwährend festhaltend, nun noch an, dass die Punkte, von denen die unter sich und mit der Ebene der xz parallel einfallenden Strahlen ausgehen, auf der negativen Seite der Ebene der yz liegen, so wird leicht erhellen, dass die erste Seitenfläche des Prismas von diesen Strahlen unmittelbar, d. h. ohne dass vorher eine andere Seitenfläche des Prismas von denselben geschnitten wird, nur dann getroffen werden kann, wenn

$$90° < \omega < 270°,$$

also

$$90° - \Theta < \omega - \Theta < 270° - \Theta$$

ist. Nun ist aber immer $\Theta < 180°$, also

$$90° - \Theta > -90°,\ 270° - \Theta < 270°;$$

und folglich

$$-90° < \omega - \Theta < 270°;$$

also, wenn

$$\cos(\omega - \Theta) = 0$$

sein soll, nothwendig

$$49)\quad \omega - \Theta = 90°.$$

Für $\Theta = 90°$ muss folglich $\omega = 180°$ sein, d. h. die Hypotenuse der rechtwinkligen Grundfläche des Prismas muss mit dem positiven Theile der Axe der y zusammenfallen, wenn für alle unter sich und mit der Ebene der xz parallel einfallende Strahlen die von

der ersten und dritten Seitenfläche des Prismas reflectirten Strahlen einander parallel sein sollen *).

Wir wollen nun noch den Fall etwas genauer betrachten, wenn die Grundfläche des Prismas ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ist, dessen Hypotenuse mit dem positiven Theile der Axe der y zusammenfällt, indem wir zugleich annehmen, dass der leuchtende Punkt der Mittelpunkt der Sonne ist. In diesem Falle kann offenbar $\omega = 180^\circ$, $\omega_1 = 45^\circ$, $\omega_2 = 135^\circ$ gesetzt werden, und es ist folglich

$$\cos(2\omega - \lambda) = \cos\lambda,\ \sin(2\omega - \lambda) = -\sin\lambda;$$
$$\cos(2\omega_1 - \lambda) = \sin\lambda,\ \sin(2\omega_1 - \lambda) = \cos\lambda;$$
$$\cos(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) = -\cos\lambda,\ \sin(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) = -\sin\lambda;$$

also nach 29) und 44)

$$\cos\varphi = \cos\lambda\cos\mu,$$
$$\cos\psi = -\sin\lambda\cos\mu,$$
$$\cos\chi = -\sin\mu$$

und

$$\cos\varphi_2 = \cos\lambda\cos\mu,$$
$$\cos\psi_2 = \sin\lambda\cos\mu,$$
$$\cos\chi_2 = -\sin\mu.$$

Nehmen wir nun die Ebene der xy horizontal an, denken uns durch den Punkt (pqr) ein dem primitiven Systeme der xyz paralleles System gelegt, und bezeichnen in diesem Systeme die Coordinaten der Sonne, deren Entfernung von dem Punkte (pqr) durch ϱ bezeichnet werden mag, durch ξ, η, ζ; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\xi = \varrho\cos\alpha,\ \eta = \varrho\cos\beta,\ \zeta = \varrho\cos\gamma.$$

Bezeichnen wir aber den von der Projection der Entfernung ϱ auf der Ebene der $\xi\eta$ mit dem positiven Theile der Axe der ξ eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der ξ an nach dem positiven Theile der Axe der η hin von 0 bis 360° zählen, durch Ω, und die Höhe der Sonne durch H; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\xi = \varrho\cos\Omega\cos H,$$
$$\eta = \varrho\sin\Omega\cos H,$$
$$\zeta = \varrho\sin H;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\cos\alpha = \cos\Omega\cos H,$$
$$\cos\beta = \sin\Omega\cos H,$$
$$\cos\gamma = \sin H.$$

*) Dies ist der im vorhergehenden Aufsatze betrachtete Fall, wenn zugleich $\Theta_1 = \Theta_2$ ist.

Digitized by Google

Daher kann man wegen der Gleichungen 22) offenbar $\lambda = \Omega$, $\mu = H$ setzen, und hat also nach dem Vorhergehenden die Gleichungen

$$50)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \cos\Omega\cos H, \\ \cos\psi = -\sin\Omega\cos H, \\ \cos\chi = -\sin H \end{cases}$$

und

$$51)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2 = \cos\Omega\cos H, \\ \cos\psi_2 = \sin\Omega\cos H, \\ \cos\chi_2 = -\sin H. \end{cases}$$

Legt man nun durch das Auge ein dem primitiven Systeme paralleles System, und bezeichnet die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Auge nach der Seite des Prismas hin mit den von dessen erster und dritter Seitenfläche reflectirten Strahlen parallel gezogenen Linien mit den positiven Theilen der Axen des in Rede stehenden Systems einschliessen, respective durch φ', ψ', χ' und φ'_2, ψ'_2, χ'_2; so ist offenbar

$$\varphi' = 180^\circ - \varphi,\ \psi' = 180^\circ - \psi,\ \chi' = 180^\circ - \chi$$

und

$$\varphi'_2 = 180^\circ - \varphi_2,\ \psi'_2 = 180^\circ - \psi_2,\ \chi'_2 = 180^\circ - \chi_2;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$52)\quad \begin{cases} \cos\varphi' = -\cos\Omega\cos H, \\ \cos\psi' = \sin\Omega\cos H, \\ \cos\chi' = \sin H \end{cases}$$

und

$$53)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_2 = -\cos\Omega\cos H, \\ \cos\psi'_2 = -\sin\Omega\cos H, \\ \cos\chi'_2 = \sin H; \end{cases}$$

also immer

$$\varphi' = \varphi'_2,\ \psi' = 180^\circ - \psi'_2,\ \chi' = \chi'_2.$$

Für $\Omega = 180^\circ$ ist $\psi' = 90^\circ$, $\psi'_2 = 90^\circ$, also

$$\varphi' = \varphi'_2,\ \psi' = \psi'_2,\ \chi' = \chi'_2;$$

und die beiden von dem Auge aus den beiden reflectirten Strahlen parallel gezogenen Linien fallen daher in diesem Falle mit einander zusammen.

Der Einfachheit wegen wollen wir nun den positiven Theil der Axe der y uns so angenommen denken, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher

sich die Sonne am Himmel bewegt, und die Werthe von Ω und H für die sich in der Ebene der xz befindende Sonne durch Ω und H selbst, die Werthe dieser Grössen für die Sonne vor und nach ihrem Durchgange durch die Ebene der xz in der Nähe derselben aber respective durch

$$\ldots.\ \Omega^{(4)},\ \Omega^{(3)},\ \Omega^{(2)},\ \Omega^{(1)};$$
$$\ldots.\ H^{(4)},\ H^{(3)},\ H^{(2)},\ H^{(1)}$$

und

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \Omega_4,\ \ldots.;$$
$$H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4,\ \ldots.$$

bezeichnen.

Ist, dies vorausgesetzt, die Ebene der xz die Ebene des Meridians, so ist

$$\ldots.\ \sin\Omega^{(2)} > \sin\Omega^{(1)} > \sin\Omega < -\sin\Omega_1 < -\sin\Omega_2 \ldots.$$
$$\ldots.\ \cos H^{(2)} > \cos H^{(1)} > \cos H < \cos H_1 < \cos H_2 \ldots.$$

Ist dagegen die Ebene der xz nicht die Ebene des Meridians, so ist entweder

$$\ldots.\ \sin\Omega^{(2)} > \sin\Omega^{(1)} > \sin\Omega < -\sin\Omega_1 < -\sin\Omega_2 \ldots.$$
$$\ldots.\ \cos H^{(2)} > \cos H^{(1)} > \cos H > \cos H_1 > \cos H_2 \ldots.$$

oder

$$\ldots.\ \sin\Omega^{(2)} > \sin\Omega^{(1)} > \sin\Omega < -\sin\Omega_1 < -\sin\Omega_2 \ldots.$$
$$\ldots.\ \cos H^{(2)} < \cos H^{(1)} < \cos H < \cos H_1 < \cos H_2 \ldots.$$

Hieraus sieht man, dass in dem ersten Falle, wenn nämlich die Ebene der xz die Ebene des Meridians ist, der absolute Werth des Productes $\sin\Omega\cos H$ sich nach beiden Seiten der Ebene der xz hin von Null an am Stärksten ändert, so dass sich also auch in diesem Falle die beiden einander zu 180° ergänzenden Winkel ψ' und ψ'_2 nach beiden Seiten der Ebene der xz hin von 90° an am Stärksten ändern werden, weshalb also offenbar in diesem Falle die Beobachtungen die grösste Genauigkeit gewähren werden.

Wir wollen nun noch die primitiven Coordinaten p'', q'', r'' des von der dritten Seitenfläche des Prismas reflectirten Strahls mit der ersten Seitenfläche bestimmen. Die Gleichungen der drei Seitenflächen sind, wenn wir die Hypotenuse der Grundfläche des Prismas durch a bezeichnen:

$$x=0,\ x+y-a=0,\ x-y=0\ ^{*}).$$

*) M. s. den vorhergehenden Aufsatz.

Also ist

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 0;$$
$$A_1 = 1,\ B_1 = 1,\ C_1 = -a;$$
$$A_2 = 1,\ B_2 = -1,\ C_2 = 0;$$

und folglich

$$k_1 = \frac{q' - a}{\sin\lambda + \cos\lambda},\ k_2 = k_1 - \frac{q'}{\sin\lambda - \cos\lambda};$$

also

$$k_1 - k_2 = \frac{q'}{\sin\lambda - \cos\lambda}\ ^{*}).$$

Hieraus ergiebt sich

$$k_1 \cos\lambda + k_2 \cos(2\omega_1 - \lambda) = q' - a - \frac{q'\sin\lambda}{\sin\lambda - \cos\lambda},$$
$$k_1 \sin\lambda + k_2 \sin(2\omega_1 - \lambda) = q' - a - \frac{q'\cos\lambda}{\sin\lambda - \cos\lambda}.$$

Weil nun $p'' = 0$ ist, so ergiebt sich mittelst der ersten der Gleichungen 45) leicht

$$r'' = r' + a \sec\lambda \tang\mu,$$

und mittelst der zweiten der Gleichungen 45) ergiebt sich dann ferner

$$q'' = a - q' - a \tang\lambda.$$

Also ist nach dem Obigen

$$54)\quad \begin{cases} p'' = 0, \\ q'' = a - q' - a \tang\Omega, \\ r'' = r' + a \sec\Omega \tang H. \end{cases}$$

Für $\Omega = 180°$ ist $q' = a - q'$. Setzt man $\frac{1}{2}a + q'$, $\frac{1}{2}a + q''$ für q', q'', d. h. nimmt man die Mitte der Hypotenuse der Grundfläche des Prismas als Anfang der Coordinaten an, so wird im vorliegenden Falle $q'' = -q'$, welches ein leicht zu deutendes Resultat ist.

*) Man hat hierbei zu bemerken, dass im vorliegenden Falle $p' = 0$ ist.

Digitized by Google

XXIX.
Eine Aufgabe aus der analytischen Geometrie.

Von dem
Herrn Professor C. G. Wunder
an der Königl. Sächs. Landesschule St. Afra zu Meissen.

1. In dem 4ten Hefte des 2ten Theiles des Archives befindet sich (S. 419. f.) eine Auflösung der Aufgabe: **Es ist irgend ein Kegelschnitt und ein Punkt gegeben. Ziehet man durch den Punkt gerade Linien, welche den Kegelschnitt in zwei Punkten durchschneiden; so fragt es sich, auf welchem geometrischen Orte die Halbirungspunkte der von dem Kegelschnitte begränzten Stücke der letzteren liegen?** Veranlasst durch die von dem Herrn Herausgeber des Archives am Schlusse dieses Aufsatzes gegebene Nachschrift habe ich eine andere von der allgemeinen Gleichung der Linien des zweiten Grades ausgehende Behandlung dieser Aufgabe versucht, welche ich hier mittheile. Der Kürze und Klarheit wegen halte ich für nöthig, der Auflösung der Aufgabe selbst folgende allgemeine Bemerkungen über die Gleichungen der Kegelschnitte vorauszuschicken.

2. Wenn p der Parameter einer Parabel, $2a$ die grosse oder Haupt-Axe, $2b$ die kleine oder Neben-Axe einer Ellipse oder Hyperbel bezeichnet, und $a:b=r:s$ gesetzt wird, wo nun r und s reine Zahlen bedenten; so hat man bekanntlich als einfachste Gleichungen

für die Parabel: $y^2-px=0$ .... (I)

für die Ellipse: $r^2y^2+s^2x^2-r^2b^2=0$ .... (II)

für die Hyperbel: $r^2y^2-s^2x^2+r^2b^2=0$ .... (III)

Die senkrechten Coordinaten x, y beziehen sich auf die Axen des Kegelschnittes, und haben als Anfangspunkt bei der Parabel den Scheitel der Axe, bei der Ellipse und Hyperbel den Mittelpunkt des Kegelschnittes; dieser Anfangspunkt sei immer durch K bezeichnet. Hieraus erhält man die allgemeinste Form der Gleichung für irgend einen Kegelschnitt zwischen senkrechten Coordinaten t und u, wenn man $x=t\cos\varphi-u\sin\varphi+\beta$, $y=t\sin\varphi+u\cos\varphi+\alpha$ substituirt, wo nämlich die Coordinaten t und u sich beziehen auf einen Anfangspunkt z, dessen auf die ursprünglichen (in obigen Gleichungen vorausgesetzten) Coordinatenaxen sich beziehenden Coordinaten $x=\beta$ und $y=\alpha$ sind, und auf eine Abscissenaxe

(Axe der t), welche mit der Axe der ersten Abscissen x einen Winkel $=\varphi$ bildet; (der Winkel φ ist von dem positiven Theile der ersten Abscissenaxe aus nach der Seite der positiven Ordinaten hin gerechnet). Die Gleichung, welche man durch Ausführung dieser Substitution und Ordnung der Glieder nach den Potenzen von u und t erhält, soll kurz für die Parabel durch (P), für die Ellipse durch (E), für die Hyperbel durch (H) angedeutet werden.

3. Die allgemeine Gleichung des 2ten Grades zwischen zwei senkrechten Coordinaten u und t hat die Form:

$$Au^2 + Btu + Ct^2 + Du + Et + F = 0 \;\ldots\; (\mathfrak{A}).$$

Insofern nun dieselbe eine Parabel, oder eine Ellipse, oder eine Hyperbel ausdrückt, sind ihre Coefficienten gleich zu setzen denen der Gleichung (P), oder der Gleichung (E), oder der Gleichung (H). Sieht man die Gleichung ($\mathfrak{A}$) als identisch mit der Gleichung (P) an, so ergiebt sich: $4AC = 4\sin\varphi^2 \cos\varphi^2 = B^2$. Betrachtet man die Gleichung ($\mathfrak{A}$) als einerlei mit der Gleichung (E), so findet man $4AC = (r^2 - s^2)^2 \sin 2\varphi^2 + 4r^2s^2$, $B^2 = (r^2 - s^2)^2 \sin 2\varphi^2$, also $4AC > B^2$. Setzt man endlich die Coefficienten der Gleichung ($\mathfrak{A}$) gleich denen der Gleichung (H), so ist $4AC = (r^2 + s^2)^2 \sin 2\varphi^2 - 4r^2s^2$, $B^2 = (r^2 + s^2)^2 \sin 2\varphi^2$, also $4AC < B^2$. Demnach wird die Gleichung ($\mathfrak{A}$) nur dann eine Parabel vorstellen können, wenn $4AC = B^2$, eine Ellipse, wenn $4AC > B^2$, eine Hyperbel, wenn $4AC < B^2$ ist.

4. In der Voraussetzung, dass ($\mathfrak{A}$) mit (P) identisch ist, also ($\mathfrak{A}$) eine Parabel bezeichnet, findet man ferner $\sin 2\varphi = B$; dagegen ergiebt sich $\sin 2\varphi = \frac{B}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}$, wenn die Gleichung ($\mathfrak{A}$) eine Ellipse oder Hyperbel ausdrücken, also mit (E) oder (H) identisch sein soll.

Bezeichnet i die Ordinate (u), k die Abscisse (t) des ursprünglichen Anfangspunktes K, bezogen auf die Coordinatenaxen des neuen Systemes; so findet sich, wenn ($\mathfrak{A}$) eine Parabel ausdrückt:

$$(\mathrm{I})\;\begin{cases} i = \dfrac{-AD^2\sqrt{C} + 2ADE\sqrt{A} + E^2(2A + C)\sqrt{C} - 4F\sqrt{C}}{4(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})} \\[2ex] k = -\dfrac{D^2(1 + C)\sqrt{A} - E^2C\sqrt{A} + CDE\sqrt{C} - 4F\sqrt{A}}{4(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})}. \end{cases}$$

Wenn aber ($\mathfrak{A}$) eine Ellipse oder Hyperbel bezeichnet, so ist:

$$(\mathrm{II})\quad i = \frac{BE - 2CD}{4AC - B^2}, \quad k = \frac{BD - 2AE}{4AC - B^2}.$$

Durch φ, i und k wird die Lage der Axen des Kegelschnittes gegen die Axen der Coordinaten u und t, und für die Parabel die Lage ihres Scheitels, für die Ellipse und Hyperbel die Lage des Mittelpunktes bestimmt. Ebenso findet man durch Gleichsetzung der entsprechenden Coefficienten die allgemeinen Formeln zur Bestimmung des Parameters oder der Axen des Kegelschnittes durch die Coefficienten der Gleichung ($\mathfrak{A}$), nämlich:

für die Parabel: $(\mathrm{III})\quad p = D\sqrt{C} - E\sqrt{A}$;

Digitized by Google

für die Ellipse:

$$(\mathrm{IV})\quad \frac{r}{s}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

$$(\mathrm{V}).\quad a^2=\frac{CD^2+AE^2-2BDE-(4AC-B^2)F}{(4AC-B^2)\,[\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}]}$$

$$(\mathrm{VI})\quad b^2=\frac{CD^2+AE^2-2BDE-(4AC-B^2)F}{(4AC-B^2)\,[\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}]}$$

für die Hyperbel:

$$(\mathrm{VII})\quad \frac{r}{s}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{-\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

$$(\mathrm{VIII})\quad a^2=\frac{CD^2+AE^2-2BDE+(B^2-4AC)F}{(B^2-4AC)\,[-\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}]}$$

$$(\mathrm{IX})\quad b^2=\frac{CD^2+AE^2-2BDE+(B^2-4AC)F}{(B^2-4AC)\,[\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}]}$$

5. Indem wir uns nun zu unserer Aufgabe wenden, setzen wir für immer fest, dass der gegebene Punkt durch Z, seine auf die Axen des Kegelschnittes und bei der Parabel auf den Scheitel der Axe, bei der Ellipse und Hyperbel auf den Mittelpunkt als Anfangspunkt sich beziehenden Coordinaten durch α und β, der Scheitel der Parabel aber, so wie der Mittelpunkt der Ellipse und Hyperbel durch K bezeichnet werde. Ferner nehmen wir an, was offenbar verstattet ist, der gegebene Kegelschnitt sei ausgedrückt durch eine Gleichung zwischen rechtwinklichen Coordinaten u und t, für welche der gegebene Punkt Z der Anfangspunkt ist; die Gleichung ($\mathfrak{A}$) in §. 3. kann also im Allgemeinen die Gleichung des gegebenen Kegelschnittes vorstellen, und jede durch Z gelegte gerade Linie wird nun bezeichnet durch die Gleichung:

$$u=Pt\;\ldots.\;(1)$$

Durch Verbindung der Gleichungen ($\mathfrak{A}$) und (1) findet man für die Coordinaten der Punkte, in welchen eine solche gerade Linie den Kegelschnitt schneidet, die Werthe:

$$t=-\frac{DP+E}{2(AP^2+BP+C)}\pm\frac{\sqrt{(DP+E)^2-4(AP^2+BP+C)F}}{2(AP^2+BP+C)}$$

$$u=-\frac{(DP+E)P}{2(AP^2+BP+C)}\pm\frac{P\sqrt{(DP+E)^2-4(AP^2+BP+C)F}}{2(AP^2+BP+C)F}.$$

Der rationale Theil des Werthes von t bezeichnet die Abscisse, des Werthes von u die Ordinate des Punktes, in welchem der zwischen den Kegelschnitt fallende Abschnitt der geraden Linie halbirt wird;

Digitized by Google

deutet man also die Abscisse durch t', die Ordinate durch u' an, so hat man die Gleichungen:

$$(2)\quad t' = -\frac{DP+E}{2(AP^2+BP+C)} \quad \text{und} \quad (3)\quad u' = -\frac{(DP+E)P}{2(AP^2+BP+C)}.$$

Die Werthe von t' und u' ändern sich mit dem Werthe von P; eliminirt man aber P aus den Gleichungen (2) und (3), so drückt das Resultat die Beziehung zwischen den beiden Coordinaten jedes solchen Punktes aus, welcher den zwischen den Kegelschnitt fallenden Abschnitt der geraden Linie halbirt, die durch diesen Punkt selbst und den Punkt Z gelegt wird; das Resultat ist also die Gleichung der gesuchten Curve. Entwickelt man die Gleichungen (2) und (3), ordnet die Glieder nach Potenzen von P, und subtrahirt sie von einander, nachdem man ein Mal (2) durch $(Au'+\frac{1}{2}D)$, (3) durch At', und dann (2) durch Cu', (3) durch $(Ct'+E)$ multiplicirt hat; so erhält man leicht zwei Gleichungen, davon jede nur die erste Potenz von P enthält. Durch Elimination der Grösse P aus diesen letzten Gleichungen erhält man ein Resultat, welches, nach Potenzen von u' und t' geordnet, durch (AE^2+CD^2-BDE) theilbar ist; so gelangt man zuletzt, wenn die Accente von u und t weggelassen werden, zu der Gleichung:

$$Au^2 + Btu + Ct^2 + \tfrac{1}{2}Du + \tfrac{1}{2}Et = 0 \;\ldots.\; (\mathfrak{B})$$

welches die Gleichung der gesuchten Curve ist.

6. Durch Betrachtung der Gleichung ($\mathfrak{B}$) ergiebt sich Folgendes:

I. Da die drei ersten Coefficienten der Gleichung ($\mathfrak{B}$) ganz dieselben sind, als in der Gleichung ($\mathfrak{A}$), und nach §. 3. nur von diesen die Art des durch die Gleichung ausgedrückten Kegelschnittes abhängt; so ist die neue Curve immer ein Kegelschnitt von derselben Art, als der gegebene.

II. Dieser neue Kegelschnitt, der nun immer der zweite genannt werden soll, gehet allezeit durch den Punkt Z; denn in der Gleichung ($\mathfrak{B}$) fehlt das beständige Glied.

III. Die Axen des zweiten Kegelschnittes sind immer parallel mit den Axen des gegebenen; denn die Formeln zur Bestimmung des Winkels φ geben für die beiden Gleichungen ($\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{B}$) ganz dieselben Werthe (vergl. §. 4.).

IV. Wenn der erste Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist, so liegt der Mittelpunkt des zweiten Kegelschnittes immer in der Mitte der geraden Linie, welche die Punkte K und Z verbindet; denn sind i' und k' die Coordinaten des Mittelpunktes des zweiten Kegelschnittes, so findet man nach §. 4.: $i' = \frac{1}{2}i$, $k' = \frac{1}{2}k$.

V. Ist der erste Kegelschnitt eine Parabel, so ist der Parameter der zweiten Parabel die Hälfte des Parameters der ersten (folgt aus §. 4. III., weil $D' = \frac{1}{2}D$, $E' = \frac{1}{2}E$ ist, wenn D', E' Coefficienten der Gleichung ($\mathfrak{B}$) bezeichnen); ist er aber eine Ellipse oder Hyperbel, so ist das Verhältniss der beiden Axen, also auch die Excentricität in dem zweiten Kegelschnitte dieselbe als im ersten (folgt aus §. 4. IV. und VII.).

Digitized by Google

7. Offenbar ist es willkührlich, welche Lage man den Axen der Coordinaten u und t geben will, wenn nur Z als Anfangspunkt genommen wird. Um daher die weiteren Betrachtungen zu vereinfachen, darf man annehmen, dass die Axen der Coordinaten u und t parallel seien den ursprünglichen Axen der y und x, d. i. den Axen des Kegelschnittes, in welchem Falle $\varphi = 0$ ist. Hierdurch erhält man nach §. 2. als Gleichung des ersten gegebenen Kegelschnittes
für die Parabel:

$$u^2 + 2\alpha u - pt + \alpha^2 - p\beta = 0 \;\ldots.\; (\mathfrak{P})$$

für die Ellipse:

$$r^2u^2 + s^2t^2 + 2\alpha r^2 u + 2\beta s^2 t + r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 - r^2b^2 = 0 \;\ldots.\; (\mathfrak{E})$$

für die Hyperbel:

$$r^2u^2 - s^2t^2 + 2\alpha r^2 u - 2\beta s^2 t + r^2\alpha^2 - s^2\beta^2 + r^2b^2 = 0 \;\ldots.\; (\mathfrak{H})$$

Wie diese drei Gleichungen enthalten sind in der allgemeinen Gleichung ($\mathfrak{A}$) (§. 3.), so soll der zweite Kegelschnitt überhaupt ausgedrückt sein durch die Gleichung:

$$A'u^2 + B'tu + C't^2 + D'u + E't + F' = 0 \;\ldots.\; (\mathfrak{C})$$

so dass also nach der Gleichung ($\mathfrak{B}$) in §. 5. immer ist:

$$A' = A,\; B' = B,\; C' = C,\; D' = \tfrac{1}{2}D,\; E' = \tfrac{1}{2}E,\; F' = 0.$$

Ebenso sollen die Buchstaben a', b', r', s', p', i', k' dieselbe Bedeutung in Beziehung auf den zweiten Kegelschnitt haben, als die entsprechenden a, b, r, s, p, i, k für den ersten.

8. Ehe wir uns zu den besonderen Arten der Kegelschnitte wenden, mögen noch die allgemeinen Formeln für die Coordinaten der Punkte angegeben werden, in welchen der erste Kegelschnitt von dem zweiten geschnitten wird. Man erhält dieselben durch Verbindung der Gleichungen ($\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{B}$), nämlich:

$$t = \frac{(BD - 2AE)F \pm D\sqrt{F}\sqrt{(B^2 - 4AC)F + M^2}}{M^2} \;\ldots.\; (\mathrm{I})$$

$$u = \frac{(BE - 2CD)F \mp E\sqrt{F}\sqrt{(B^2 - 4AC)F + M^2}}{M^2} \;\ldots.\; (\mathrm{II})$$

wo $M^2 = AE^2 + CD^2 - BDE$ gesetzt ist.

9. Sei nun zuerst der gegebene Kegelschnitt, also auch der zweite eine Parabel. Die erste Parabel wird durch die Gleichung ($\mathfrak{P}$) §. 7. ausgedrückt, so dass also hier $A = 1$, $B = 0 = C$, $D = 2\alpha$, $E = -p$, $F = \alpha^2 - p\beta$ ist. Demnach hat man für die zweite Parabel $A' = 1$, $B' = 0 = C'$, $D' = \alpha$, $E' = -\tfrac{1}{2}p$, $F' = 0$. Man findet daher ausser $p' = \tfrac{1}{2}p$ (§. 4. III.), was nach §. 6. V. schon bekannt ist, weiter nach §. 4. I.:

$$(\mathrm{I})\quad i' = -\tfrac{1}{2}\alpha; \qquad (\mathrm{II})\quad k' = -\frac{\alpha^2}{2p}.$$

Aus (I) ergiebt sich, dass die Axe der zweiten Parabel, welche parallel mit der Axe der ersten ist (§. 6. III.), durch die Mitte der Verbindungslinie KZ geht. Hierdurch mit Rücksicht auf (II) wird sehr leicht der Scheitel der zweiten Parabel gefunden.

10. Für die Schneidungspunkte der beiden Parabeln sind nach §. 8. die Coordinaten:

$$u = \pm\sqrt{\alpha^2 - p\beta}, \quad t = \frac{\alpha^2 - p\beta}{\frac{1}{2}p} \pm \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - p\beta}}{\frac{1}{2}p},$$

welche Werthe immer möglich sind, wenn $\alpha^2 - p\beta > 0$, d. i. wenn Z ausserhalb der ersten Parabel liegt. Bei $\alpha^2 - p\beta = 0$ berühren sich beide Parabeln in dem Punkte Z. Da die Ordinaten dieser Schneidungspunkte absolut gleiche aber entgegengesetzte Werthe haben; so muss die Verbindungslinie derselben, d.i. die gemeinsame Sehne beider Parabeln durch die Abscissenaxe (Axe der t) halbirt werden. Hieraus folgt wieder nach einer bekannten Eigenschaft der Parabel, dass die gerade Linie, welche die zweite Parabel in dem Punkte Z berührt, und ebenso die gerade Linie, welche die erste Parabel in dem Punkte berührt, wo die erste Parabel von der Axe der t geschnitten wird, parallel sein muss mit der Verbindungslinie jener Schneidungspunkte. Dasselbe findet man auch auf folgende Weise. Seien L und N jene beiden Schneidungspunkte, so dass für L die Coordinaten $u_1 = \sqrt{\alpha^2 - p\beta}$ und $t_1 = \frac{\alpha^2 - p\beta}{\frac{1}{2}p} + \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - p\beta}}{\frac{1}{2}p}$, für N aber $u_2 = -\sqrt{\alpha^2 - p\beta}$ und $t_2 = \frac{\alpha^2 - p\beta}{\frac{1}{2}p} - \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - p\beta}}{\frac{1}{2}p}$ sind. Da nun $\frac{u_1 - u_2}{t_1 - t_2} = \frac{p}{2\alpha}$ ist, so hat man für die durch L und N gehende gerade Linie die Gleichung:

$$u - u_1 = \frac{p}{2\alpha}(t - t_1) \;\ldots.\; (1)$$

Nach der bekannten Eigenschaft der Parabel findet man für die Gerade, welche die zweite Parabel im Punkte Z berührt, zunächst die Gleichung: $u = \frac{i'}{2k'}t$; setzt man nun hier die oben (§. 9.) gefundenen Werthe für i' und k', so erhält man für diese Tangente die Gleichung:

$$u = \frac{p}{2\alpha}t \;\ldots.\; (2)$$

Für den Punkt O, in welchem die erste Parabel von der Axe der t geschnitten wird, sind die auf die Axe und den Scheitel dieser Parabel bezogenen Coordinaten $y' = \alpha$, $x' = \frac{\alpha^2}{p}$; daher ergiebt sich für die Gerade, welche die erste Parabel in O berührt, die Gleichung: $u = \frac{y'}{2x'}[t - (x' - \beta)]$, d. i. durch obige Werthe:

$$u = \frac{p}{2\alpha}\left[t - \left(\frac{\alpha^2}{p} - \beta\right)\right] \;\ldots.\; (3)$$

Da nun in allen drei Gleichungen (1), (2), (3) der Coefficient von t derselbe $=\frac{p}{2\alpha}$ ist, so folgt hieraus, dass die geraden Linien, welche diesen Gleichungen entsprechen, sämmtlich unter einander parallel sind.

11. Wenn Z ausserhalb der ersten Parabel liegt, also $\alpha^2-p\beta>0$ ist, so wird die erste Parabel von der geraden Linie ZL in L, von der geraden Linie ZN in N berührt. Wenn wieder u_1 und t_1 die Coordinaten des Punktes L bezeichnen, so hat man für die gerade Linie ZL die Gleichung: $u=\frac{u_1}{t_1}t$, oder zwischen Coordinaten x, y auf den Anfangspunkt K und die Axe der Parabel bezogen, und wenn man für $\frac{u_1}{t_1}$ den aus §. 10. sich ergebenden Werth substituirt:

$$y-\alpha=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-p\beta}}{2\beta}(x-\beta).$$

Für $y=0$ findet man hieraus für x den Werth: $x=-\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-p\beta})^2}{p}$. Da aber für den Punkt L die auf die Axe der ersten Parabel bezogene Ordinate $=\alpha+u_1=\alpha+\sqrt{\alpha^2-p\beta}$ ist, so wird für denselben Punkt die Abscisse, auf der Axe vom Scheitel aus genommen, ausgedrückt durch $\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-p\beta})^2}{p}$. Vergleicht man dieses mit obigem Werthe von x, d. i. mit der Abscisse des Punktes, in welchem die Axe der Parabel von ZL geschnitten wird, so ergiebt sich aus der Natur der Parabel, dass sie in L von ZL berührt wird. Ganz ähnlich ist der Beweis für die Linie ZN.

12. Wenn der gegebene Punkt Z auf der ersten Parabel liegt, also $\alpha^2-p\beta=0$ ist, so hat man für den Scheitel der zweiten Parabel nach §. 9. die Coordinaten $i'=-\frac{1}{2}\alpha$, $k'=-\frac{1}{2}\beta$; der Scheitel der zweiten Parabel liegt also dann in der Mitte der Verbindungslinie der Punkte K und Z. Leicht erkennt man nun auch das Umgekehrte als richtig: wenn man von irgend einem Punkte einer Parabel beliebig viele Sehnen zieht, und jede Sehne um ein ihrer eignen Grösse gleiches Stück verlängert, so liegen die Endpunkte dieser Verlängerungen wieder auf einer Parabel, deren Parameter das Doppelte von dem Parameter der ersten Parabel ist; die Axen beider Parabeln sind parallel, und der Scheitel der zweiten ist der Endpunkt der Verlängerung von der Sehne, welche nach dem Scheitel der ersten gezogen ist; in dem Punkte Z berühren sich beide Parabeln (vergl. §. 10.).

13. Sei nun der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse, also ausgedrückt durch die Gleichung (𝔈) in §. 7.; demnach ist jetzt $A=r^2$, $B=0$, $C=s^2$, $D=2\alpha r^2$, $E=2\beta s^2$, $F=r^2\alpha^2+s^2\beta^2-r^2b^2$, daher für den zweiten Kegelschnitt, ebenfalls eine Ellipse, $A'=r^2$, $B'=0$, $C'=s^2$, $D'=\alpha r^2$, $E'=\beta s^2$, $F'=0$, folglich die Gleichung dieser Ellipse:

$$r^2u^2+s^2t^2+\alpha r^2u+\beta s^2t=0.$$

Digitized by Google

Die Lage des Mittelpunktes und der Axen der zweiten Ellipse sind nach §. 6. III. und IV. schon bestimmt; für die Grösse der Axen hat man jetzt nach §. 4. V. und VI.:

$$a'^2 = \frac{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}{4s^2} = \left(\frac{r}{s}\cdot\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \;\ldots\ldots\; \text{(I)}$$

$$b'^2 = \frac{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}{4r^2} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{r}\cdot\frac{\beta}{2}\right)^2 \;\ldots\ldots\; \text{(II)}$$

Der Parameter p' der zweiten Ellipse ist daher

$$p' = \frac{2b'^2}{a'} = \frac{s}{r}\sqrt{\alpha^2 + (\frac{s}{r}\beta)^2} \;\ldots\ldots\; \text{(III)}$$

14. Sind wieder L und N die Schneidungspunkte der beiden Ellipsen, u_1 und t_1 für L, u_2 und t_2 für N die Coordinaten, und setzt man der Kürze wegen $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 - r^2b^2 = m^2$, also $r^2\alpha^2$ $s^2\beta^2 = m^2 + r^2b^2 = m^2 + s^2a^2$; so ist nach §. 8.:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{-\alpha m^2 - sb\beta m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}, & t_1 &= \frac{-\beta m^2 + ra\alpha m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2} \\ u_2 &= \frac{-\alpha m^2 + sb\beta m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}, & t_2 &= \frac{-\beta m^2 - ra\alpha m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2} \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Daher für dieselben Punkte die Coordinaten y_1, x_1, y_2, x_2 auf den Mittelpunkt und die Axen der ersten Ellipse bezogen:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{r^2b^2\alpha - sb\beta m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}, & x_1 &= \frac{s^2a^2\beta + ra\alpha m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2} \\ y_2 &= \frac{r^2b^2\alpha + sb\beta m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}, & x_2 &= \frac{s^2a^2\beta - ra\alpha m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2} \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Diese doppelten Werthe werden gleich, d. h. die Punkte L und N fallen in einen zusammen, in welchem die Ellipsen sich berühren, wenn $m = 0$, d. i. wenn $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 = r^2b^2 = s^2a^2$ ist, also der Punkt Z auf der ersten Ellipse selbst liegt; es wird dann $y_1 = y_2 = \alpha$, $x_1 = x_2 = \beta$. Unmöglich aber werden beide Werthe, wenn $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 < r^2b^2$, also $\alpha < \frac{s}{r}\sqrt{a^2 - \beta^2}$ ist, d. h. wenn der gegebene Punkt Z innerhalb der ersten Ellipse liegt.

15. Durch Benutzung obiger Werthe für y_1, x_1, y_2, x_2 erhält man für die durch L und N gehende Gerade die Gleichung: $y = -\frac{s^2\beta}{r^2\alpha}x + \frac{b^2}{\alpha}$. Für $y = 0$ findet sich hiernach $x = \frac{r^2b^2}{s^2\beta} = \frac{a^2}{\beta}$. Hieraus ergiebt sich nach einer bekannten Eigenschaft der Ellipse, dass die Linie LN die verlängerte grosse Axe der ersten Ellipse in demselben Punkte schneidet, in welchem diese Axe geschnitten wird von einer Tangente der ersten Ellipse, deren Berührungspunkt die Abscisse $= \beta$ hat; es ist dieses einer der Punkte, in welchen der von Z auf die grosse Axe gefällte Perpendikel die erste Ellipse schneidet, wenn nur $\beta < a$ ist.

Digitized by Google

16. Legt man durch Z eine gerade Linie (λ) parallel mit LN, so findet man mit Rücksicht auf die Gleichung der Linie LN (§. 15.) für (λ) die Gleichung:

$$y = -\frac{s^2\beta}{r^2\alpha}x + \frac{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}{r^2\alpha} \;\ldots\; \text{(I)}$$

Oder wenn man den Mittelpunkt $\mathfrak{K}$ der zweiten Ellipse als Anfangspunkt, die Axen dieser Ellipse als Coordinatenaxen annimmt, und die darauf sich beziehenden Coordinaten durch $'y$ und $'x$ bezeichnet, so erhält man für (λ) die Gleichung:

$$'y = -\frac{s^2\beta}{r^2\alpha}\,'x + \frac{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}{2r^2\alpha} \;\ldots\; \text{(II)}$$

Setzt man in dieser letzten Gleichung $'y = 0$, so findet man für den Punkt, in welchem die verlängerte grosse Axe der zweiten Ellipse von (λ) geschnitten wird, den Werth der Abscisse: $'x = \frac{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}{2s^2\beta} = \frac{a'^2}{\frac{1}{2}\beta}$ (vergl. §. 13. I.). Da aber $\frac{1}{2}\beta$ die Abscisse des Punktes Z der zweiten Ellipse ist, durch welchen die Linie (λ) gehet, so ergiebt sich aus dem hier gefundenen Werthe von $'x$ nach der schon vorhin benutzten Eigenschaft der Ellipse, dass die zweite Ellipse von der Linie (λ) in Z berührt wird. Demnach ist die gemeinsame Sehne beider Ellipsen mit der dem Punkte Z zugehörigen Tangente der zweiten Ellipse parallel, und wird folglich durch die gerade Linie KZ halbirt.

17. Für die Punkte G und G', in welchen die erste Ellipse von der Geraden KZ geschnitten wird, findet man leicht die Coordinaten $y = \pm\frac{rb\alpha}{\sqrt{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}}$, $x = \pm\frac{rb\beta}{\sqrt{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}}$. Daher wird die durch einen dieser Punkte, z. B. durch G gehende gerade Linie, welche parallel ist mit der gemeinsamen Sehne LN, ausgedrückt durch die Gleichung $y = -\frac{s^2\beta}{r^2\alpha}x + \frac{b}{r\alpha}\sqrt{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}$. Setzt man hier wieder $y = 0$, so findet man für den Punkt, in welchem diese Linie die verlängerte grosse Axe der ersten Ellipse schneidet, die Abscisse:

$$x = \frac{rb\sqrt{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}}{s^2\beta} = \frac{a\sqrt{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}}{s\beta} = a^2 : \frac{rb\beta}{\sqrt{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}}.$$

Da aber $\frac{rb\beta}{\sqrt{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}}$ die Abscisse des Punktes G der Ellipse ist, durch welchen die betrachtete gerade Linie gehet, so ergiebt sich aus dem hier gefundenen Werthe von x, dass diese Gerade die Ellipse in G berührt. Aehnliches gilt von der durch den anderen Punkt G' gelegten Parallele mit LN. Immer also sind die den Punkten Z und K zugehörigen Tangenten der zweiten Ellipse parallel mit den Tangenten der ersten für die Punkte, in welchen die erste Ellipse von der geraden Linie KZ geschnitten wird; und wenn Z ausserhalb der ersten Ellipse liegt, also beide Ellipsen sich

schneiden, so ist auch die ihnen gemeinsame Sehne parallel mit jenen Tangenten.

18. Wenn Z ausserhalb der ersten Ellipse liegt, und $\beta < \alpha$ ist, so ergiebt sich aus §. 15. und §. 17. ein leichtes Verfahren, die Schneidungspunkte L und N beider Ellipsen zu finden, ohne dass die zweite Ellipse construirt zu werden braucht.

19. Liegt Z ausserhalb der ersten Ellipse, so wird letztere von der geraden Linie ZL in L, von ZN in N berührt. Durch die Coordinaten des Punktes L, x_1 und y_1 (§. 14. II.) findet man, weil $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 = m^2 + r^2b^2 = m^2 + s^2a^2$ ist, für die Linie ZL die Gleichung: $y - \alpha = \frac{sb\beta + \alpha m}{\beta m - ra\alpha}(x - \beta)$.
Für $y = 0$ erhält man hieraus: $x = \frac{ra\alpha^2 + sb\beta^2}{sb\beta + \alpha m} = \frac{r^2a^2\alpha^2 + rsab\beta^2}{rsab\beta + ra\alpha m}$ $= a^2 : \frac{s^2a^2\beta + ra\alpha m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}$, woraus die Richtigkeit der Behauptung für ZL folgt. Aehnlich ist der Beweis für ZN.

20. Wenn der Punkt Z auf der gegebenen Ellipse liegt, also $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 = r^2b^2 = s^2a^2$ ist, so findet man aus den Formeln (I) und (II) in §. 13. leicht, dass dann die Axen der zweiten Ellipse beziehungsweise gleich sind den Hälften der Axen der ersten Ellipse. Da dieses gilt, welcher Punkt des Umfanges der ersten Ellipse für Z genommen werden mag, so folgt nebenbei hieraus auch, dass eine Ellipse, deren Axen beziehungsweise gleich sind den Hälften der Axen einer anderen Ellipse, immer in diese andere so gelegt werden kann, dass sie durch deren Mittelpunkt gehet, dieselbe in einem gegebenen Punkte berührt, und ihre Axen den gleichnamigen Axen der anderen Ellipse parallel sind.

21. Durch Umkehrung des Vorausgehenden ergiebt sich nun auch folgender Satz: wenn von irgend einem Punkte Z des Umfanges einer Ellipse beliebig viele Sehnen gezogen, und abwärts von jenem Punkte verlängert werden um ein Stück, das der Sehne selbst gleich ist, so liegen die Endpunkte dieser Verlängerungen auf einer Ellipse, deren Axen das Doppelte von den gleichnamigen Axen der ersten Ellipse und mit diesen parallel sind; der Mittelpunkt der neuen Ellipse ist der zweite Endpunkt des von Z ausgehenden Durchmessers der ersten Ellipse, und beide Ellipsen berühren sich in Z. Dieser Satz ist indessen ebenso wie der oben in §. 12. erwähnte nur ein besonderer Fall eines allgemeineren, den wir nachher aussprechen und beweisen werden.

22. Alles hier in Betreff der Ellipse Gefundene gilt im Allgemeinen auch, wenn der gegebene Kegelschnitt, also auch der zweite ein Kreis ist, nur mit einigen Modificationen. In diesem Falle ist nämlich $a = b$, $r = s = 1$ zu setzen; wenn daher der Halbmesser des neuen Kreises durch ϱ bezeichnet wird, während der des gegebenen $= a$ ist, so hat man hier $\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Liegt Z ausserhalb des ersten Kreises, ist also $\alpha^2 + \beta^2 > a^2$, so schneiden sich beide Kreise in zwei Punkten L und N, für deren Coordinaten hier die Formeln gelten: $y = \frac{a^2\alpha \mp a\beta m}{\alpha^2 + \beta^2}$, $x = \frac{a^2\beta \pm a\alpha m}{\alpha^2 + \beta^2}$, wo nun $m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - a^2}$ ist. Für die gerade Linie, welche durch diese Schneidungspunkte gehet, hat man daher die Glei-

chung: $y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{a^2}{\alpha}$. Da aber für die Gerade KZ auch hier die Gleichung $y = \frac{\alpha}{\beta}x$ gilt, so ergiebt sich aus der Form dieser beiden Gleichungen, dass die gemeinsame Sehne LN unter rechten Winkeln von der Linie KZ geschnitten wird. Auf eine sehr einfache Weise folgt nun hieraus der Parallelismus dieser Sehne mit den oben bezeichneten Tangenten (vergl. §. 16. 17.).

23. Wenn der erste Kegelschnitt eine Hyperbel ist, ausgedrückt durch die Gleichung ($\mathfrak{H}$) in §. 7., so ist auch der zweite eine Hyperbel, für welche die Gleichung gilt:

$$r^2u^2 - s^2t^2 + \alpha r^2u - \beta s^2t = 0.$$

Für die Grösse der Axen findet man (§. 4. VIII. und IX.): $a'^2 = \frac{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}{4s^2}$, $b'^2 = \frac{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}{4r^2}$. Zu den Schneidungspunkten L und N beider Hyperbeln gehören die Coordinaten: $y = \frac{r^2b^2\alpha \pm sb\beta m}{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}$, $x = \frac{s^2a^2\beta \pm ra\alpha m}{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}$, wo $m^2 = r^2b^2 - s^2\beta^2 + r^2\alpha^2$ angenommen ist, daher auch $s^2\beta^2 - r^2\alpha^2 = r^2b^2 - m^2 = s^2a^2 - m^2$ ist. Die durch L und N gelegte gerade Linie hat zur Gleichung: $y = \frac{s^2\beta}{r^2\alpha}x - \frac{b^2}{\alpha}$. Für $y = 0$ wird $x = \frac{r^2b^2}{s^2\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta}$; daher gilt hier eine ähnliche Bemerkung, als oben §. 15. bei der Ellipse gemacht worden ist. Für die durch Z gelegte Parallele mit LN gilt zwischen den Coordinaten $'x$ und $'y$ auf die Axen und den Mittelpunkt der zweiten Hyperbel bezogen die Gleichung: $'y = \frac{s^2\beta}{r^2\alpha}{'x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}{r^2\alpha}$. Für $'y = 0$ wird $'x = \frac{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}{2s^2\beta} = \frac{a'^2}{\frac{1}{2}\beta}$, woraus hervorgeht, dass diese Parallele die zweite Hyperbel in Z berührt. Zu den Punkten G und G', in welchen die erste Hyperbel von der geraden Linie KZ geschnitten wird, gehören die Coordinaten $x = \pm\frac{rb\beta}{\sqrt{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}}$, $y = \pm\frac{rb\alpha}{\sqrt{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}}$. Die durch G gehende Parallele mit LN hat zur Gleichung: $y = \frac{s^2\beta}{r^2\alpha}x - \frac{b}{r\alpha}\sqrt{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}$. Für $y = 0$ wird $x = \frac{rb\sqrt{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}}{s^2\beta} = a^2 : \frac{rb\beta}{\sqrt{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}}$, woraus folgt, dass diese Linie die erste Hyperbel in G berührt. Aehnliches gilt von der Parallele durch G'. Die dem Punkte Z zugehörige Tangente der zweiten Hyperbel ist also mit den Tangenten der ersten Hyperbel für die Punkte G und G' parallel, und wenn die Hyperbeln sich schneiden, so ist auch die gemeinsame Sehne mit jenen Tangenten parallel. Die durch Z und L gelegte Gerade hat zur Gleichung: $y - \alpha = \frac{\alpha m + sb\beta}{\beta m + ra\alpha}(x - \beta)$; für $y = 0$ wird $x = a^2 : \frac{ra\alpha m + s^2a^2\beta}{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}$; mit Rücksicht auf den Werth der Abscisse des Punktes L ergiebt sich hieraus, dass **die Gerade ZL die erste Hyperbel in L berührt.** Ebenso findet

Digitized by Google

man, dass ZN die Hyperbel in N berührt; beide Mal wird aber vorausgesetzt, dass Z ausserhalb der ersten Hyperbel liegt.

24. Wenn der gegebene Punkt Z auf der Hyperbel selbst liegt, d. i. wenn $s^2\beta^2 - r^2\alpha^2 = r^2b^2 = s^2a^2$ ist, so sind die Axen der zweiten Hyperbel gleich den Hälften der gleichnamigen Axen der ersten, und durch Umkehrung lässt sich hieraus noch für die Hyperbel ein Satz, analog den in §. 12. und §. 21. ausgesprochenen, aufstellen. Es soll aber jetzt noch der allgemeinere Satz bewiesen werden, von welchem die gedachten nur besondere Fälle sind; dieser allgemeine Satz ist folgender.

25. **Wenn man von einem auf dem Umfange irgend eines Kegelschnittes beliebig gewählten Punkte Z irgend wie viele Sehnen zieht, und von Z aus auf jeder Sehne selbst, oder nach der entgegengesetzten Seite hin auf ihrer Verlängerung einen Abschnitt so bestimmt, dass das Verhältniss zwischen diesem Abschnitte und der zugehörigen Sehne überall dasselbe ist, so liegen die Endpunkte aller Abschnitte auf einem zweiten Kegelschnitte von derselben Art, als der gegebene.**

Beweis. Der gegebene Kegelschnitt sei ausgedrückt durch eine Gleichung zwischen rechtwinklichen Coordinaten u und t, die den Punkt Z zum Anfangspunkte haben; so muss, weil dieser Punkt auf dem Kegelschnitte selbst liegt, diese Gleichung die Form haben:

$$Au^2 + Btu + Ct^2 + Du + Et = 0 \;\dots\; \text{(I)}$$

Jede von Z ausgehende gerade Linie wird vorgestellt durch die Gleichung: $u = Pt$, und schneidet den Kegelschnitt noch in einem zweiten Punkte V, dessen Coordinaten sind:

$$t = -\frac{DP+E}{AP^2+BP+C},\quad u = -\frac{(DP+E)P}{AP^2+BP+C} \;\dots\; \text{(II)}$$

Wird nun auf der Sehne ZV, oder auf deren Verlängerung über Z hinaus der Abschnitt ZW so bestimmt, dass $ZV : ZW = 1 : n$ sich verhält, wo n irgend eine ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, so erkennt man leicht, dass die dem Punkte W zugehörigen Coordinaten diese Werthe haben müssen:

$$t = -\frac{n(DP+E)}{AP^2+BP+C},\quad u = -\frac{n(DP+E)P}{AP^2+BP+C} \;\dots\; \text{(III)}$$

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen (III) die Grösse P, so muss das Resultat die Gleichung der Curve sein, welche der geometrische Ort der Endpunkte aller von Z aus bestimmten Abschnitte jener Sehnen ist (vergl. §. 5.). Die wirkliche Ausführung dieser Elimination aber giebt (auf dem in §. 5. befolgten Wege) zuletzt folgende Gleichung:

$$Au^2 + Btu + Ct^2 + nDu + nEt = 0 \;\dots\; \text{(IV)}$$

Da nun die drei ersten Coefficienten dieser Gleichung identisch sind mit den entsprechenden Coefficienten der Gleichung (I), so folgt hieraus nach §. 3., dass die der Gleichung (IV) entsprechende Curve

ein Kegelschnitt von ganz derselben Art ist, als der durch die Gleichung (I) bezeichnete.

26. Man nehme an, was offenbar erlaubt ist, dass die Axen der Coordinaten u und t der Gleichung (I), also auch die der Gleichung (IV), parallel seien den Axen des gegebenen Kegelschnittes; der Mittelpunkt dieses Kegelschnittes (bei der Parabel der Scheitel der Axe) werde wieder durch K, der Mittelpunkt des neuen durch $\mathfrak{K}$ bezeichnet, und α und β seien die Coordinaten des Punktes Z. bezogen auf den Anfangspunkt K und die Axen des ersten Kegelschnittes. Die Gleichung (I) in §. 25. hat daher hier folgende Form: für die Parabel:

$$u^2 + 2\alpha u - pt = 0 \;\dots\; \text{(II)}$$

für die Ellipse:

$$r^2u^2 + s^2t^2 + 2\alpha r^2 u + 2\beta s^2 t = 0 \;\dots\; \text{(II)}$$

für die Hyperbel:

$$r^2u^2 - s^2t^2 + 2\alpha r^2 u - 2\beta s^2 t = 0 \;\dots\; \text{(III)}$$

Dieses in Verbindung mit der Gleichung (IV) in §. 23. giebt Folgendes zu erkennen.

27. I. Auch der neue Kegelschnitt geht durch den Anfangspunkt Z der Coordinaten u und t.

II. Die Axen des neuen Kegelschnittes sind parallel den Axen des ursprünglich gegebenen (§. 4. vergl. §. 6. III.).

III. Wenn für den Mittelpunkt $\mathfrak{K}$ des neuen Kegelschnittes (bei der Parabel für den Scheitel der Axe) die auf die Axen der u und t sich beziehenden Coordinaten wieder durch i' und k', dagegen die auf den Anfangspunkt K und die Axen des ersten Kegelschnittes bezogenen Coordinaten durch η und ϑ bezeichnet werden, so ist, von welcher Art auch der Kegelschnitt sein mag, immer

$$i' = -n\alpha,\; k' = -n\beta;\; \eta = (1-n)\alpha,\; \vartheta = (1-n)\beta.$$

Der Punkt $\mathfrak{K}$ liegt also immer auf der durch Z und K gelegten geraden Linie in dem Abstande $=(1-n)\alpha$ von der Hauptaxe des ersten Kegelschnittes.

IV. Ist der erste Kegelschnitt eine Parabel, und deren Parameter $=p$, so hat der zweite Kegelschnitt, auch eine Parabel, den Parameter $p' = np$ (§. 4. III.). Ist der erste Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, deren Axen $2a$ und $2b$ sind, so hat der zweite Kegelschnitt die Axen $2a' = n.2a$, $2b' = n.2b$. Bedeutet also p den Parameter des ersten, p' den Parameter des zweiten Kegelschnittes, so ist in allen Fällen $p' = np$. Diese Werthe der Axen $2a'$ und $2b'$ findet man aus §. 4. V. und VI.; VIII. und IX. vergl. §. 25. IV.; §. 26. II. und III. mit Rücksicht darauf, dass hier für die Ellipse $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 = s^2a^2 = r^2b^2$, für die Hyperbel $s^2\beta^2 - r^2\alpha^2 = s^2a^2 = r^2b^2$ ist.

V. Die gerade Linie, welche den ersten Kegelschnitt in dem Punkte Z berührt, berührt in demselben Punkte auch den zweiten Kegelschnitt, daher berühren sich in Z beide Kegelschnitte selbst.

Digitized by Google

Beweis. Die gerade Linie, welche die erste Parabel im Punkte Z berührt, hat zur Gleichung: $y - \alpha = \frac{\alpha}{2\beta}(x - \beta)$. Wenn man aber den Scheitel $\mathfrak{R}$ der zweiten Parabel als Anfangspunkt, die Axe desselben als Abscissenaxe nimmt, und die entsprechenden Coordinaten durch $'x$ und $'y$ bezeichnet, so ist $x = 'x - (n-1)\beta$, $y = 'y - (n-1)\alpha$, wodurch die Gleichung der gedachten Tangente diese Form erhält: $'y - n\alpha = \frac{\alpha}{2\beta}('x - n\beta)$. Für $'y = 0$ wird $'x = -n\beta$, woraus folgt, dass die gedachte Tangente auch die zweite Parabel in Z berührt. — Ist der erste Kegelschnitt eine Ellipse, so findet man für dem Punkte Z zugehörige Tangente die Gleichung: $'y - n\alpha = -\frac{s^2\beta}{r^2\alpha}('x - n\beta)$, wo die Coordinaten $'y$ und $'x$ auf den Mittelpunkt und die Axen der zweiten Ellipse sich beziehen. Für $'y = 0$ ergiebt sich $'x = \frac{n(r^2\alpha^2 + s^2\beta^2)}{s^2\beta} = \frac{\alpha'^2}{n\beta}$ (No. IV.), woraus erkannt wird, dass die betrachtete Tangente auch die zweite Ellipse in Z berührt. Ganz ähnlich ist der Beweis für die Hyperbel.

XXX.

Gegen Herrn Doctor Barfuss.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

I.

Im 3ten Hefte des 4ten Bandes dieser Zeitschrift hat Herr Dr. Barfuss die ältere Euler-Friesische Ansicht von den unendlichen Reihen, der neueren, hauptsächlich durch Cauchy's geistreiches Cours d'analyse angeregten, gegenüber zu vertreten gesucht. Die Ansicht unseres geehrten Gegners ist folgende: Bei der Rechnung mit unendlichen Reihen ist die Summirung derselben ein ganz untergeordnetes Geschäft; die Hauptsache ist, durch gewisse analytische, oder wie Fries sagt, syntaktische Operationen, die Functionen in Reihen zu entwickeln; d. h. mit andern Worten: es kommt hauptsächlich auf die Umwandelungen der Form einer Function an, wobei sie einmal als geschlossener, einmal als ins Unbestimmte

fortlaufender Ausdruck erscheint, und nicht auf ihre arithmetischen Werthe in der letzteren Gestalt.

Bevor ich diese Ansicht ausführlicher beleuchte, muss ich einige Worte über die Kritik sagen, welcher Hr. Dr. Barfuss meine Rechnungen unterworfen hat:

Mein erstes Beispiel hat derselbe gänzlich missverstanden. Will man nämlich den Ausdruck Arctan x in eine Reihe verwandeln, so benutzt man hierzu die beiden Eigenschaften Arctan x — Arctan y $=$ Arctan $\frac{x-y}{1+xy}$ und $\text{Lim}\frac{\text{Arctan}\ \delta}{\delta}=1$ für abnehmende δ. Man findet

$$\text{Arctan}\ x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

Nimmt man aber die nämliche Rechnung mit einer gewissen Function $f(x)$ vor, welche die beiden Eigenschaften

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1+xy}\right),\ \text{Lim}\frac{f(\delta)}{\delta} = 1$$

besitzt, so findet man auch

$$f(x) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

Nun sagt darauf Herr Dr. Barfuss: „Die Nachweisung, dass $f(x)$ $=$ arctg x sei, hat mit der Methode der unbestimmten Coefficienten gar nichts zu schaffen (?). Und wo wollte man auch den Beweisgrund hernehmen, dass zwei verschiedene Functionen dennoch einerlei Reihenentwickelung geben könnten?". Hier ist das Missverständniss klar; ich meine im Gegentheil: wo will man den Beweisgrund hernehmen, dass derjenige Unrecht habe, welcher so capriciös wäre zu behaupten, er kenne zwei solche verschiedene Functionen, denen die genannten Eigenschaften zukommen. Darauf könnte mir Herr Dr. Barfuss erwidern, was er am Ende der Seite 226. sagt, nämlich: „es findet sich für $f(x)$ eine vollkommen bestimmte Reihe, welche zeigt, dass jedem bestimmten Werthe von x ein bestimmter Werth von $f(x)$ angehört und dass folglich die Function $f(x)$ durch die ihr beigelegten Eigenschaften vollkommen bestimmt ist". Hier wird Herr Dr. Barfuss beinahe seiner Ansicht untreu; denn er spricht von den bestimmten, also numerischen Werthen, welche die Reihe

$$x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

für einen bestimmten Werth von x annimmt, d. h. er betrachtet auf einmal $f(x)$ als die arithmetische Summe der Reihe, während er sonst nur von syntaktischen Entwickelungen hören will. Aber wir können ihm auch diess zugeben, weil sein Argument nur so weit reicht, als sich jene Reihe arithmetisch summiren lässt, d. h. convergirt. Aber wie wird denn die Sache, wenn die Reihe divergirt? Wenn ich cavalièrement sagte: ja, jene beiden oder mehreren Functionen, welchen gemeinschaftlich die Eigenschaften zukommen:

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1+xy}\right),\ \text{Lim}\frac{f(\delta)}{\delta} = 1$$

sind identisch bis $x = 1$, von da an verschieden, etwa so wie zwei Curven innerhalb eines gewissen Intervalles sich decken, nachher aber auseinanderfahren, so fällt das Argument meines Herrn Gegners ganz weg *). Und in der That wäre eine Behauptung der Art gar nichts Neues. So hat man z. B.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.$$

oder auch:

$$\frac{1+x}{1+x+x^2}$$
$$= 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 - \ldots.$$

aus welchen für $x = 1$ folgt:

$$\tfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$
$$\tfrac{2}{3} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Da hat man ja gleich ein Beispiel, dass zwei verschiedene Functionen die nämliche Reihe geben.

In Bezug auf die letzteren beiden Reihen hat Lagrange eine Erklärung versucht. Er sagt nämlich: man erwäge die fehlenden Glieder, so ist

$$1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 - \ldots.$$
$$= 1 + 0.x - x^2 + x^3 + 0.x^4 - x^5 + x^6 + 0.x^7 - x^8 + x^9 + \ldots.$$

Nimmt man für $x = 1$ ein Glied der Reihe, so erhält man 1, nimmt man 2 Glieder wieder 1, und nimmt man 3 Glieder gar nichts zur Summe. Aus 1, 1, 0 ist aber $\frac{2}{3}$ das arithmetische Mittel. Abgesehen davon, dass diese Erklärung rein aus der Luft gegriffen ist und man gar nicht weiss, woher die Befugniss zum Mittelnehmen kommt, hilft uns diese Erklärung gar nichts. Sie schiebt die Schwierigkeit auf die Seite, aber hebt sie nicht. Eine solche Erklärung, wenn es anders eine ist, mag wohl allenfalls dann gelten, wenn man dadurch zu der Reihe $1 - 1 + 1 - 1$ etc. gekommen ist, dass man eine Reihe von der Form

$$x^\alpha - x^\beta + x^\gamma - x^\delta + \ldots.$$

für $x = 1$ specialisirt hat. Aber was fängt man denn an, wenn man auf anderem Wege zu dieser Reihe gelangt? Gesetzt, man wollte die Summe der Reihe

$$2[\cos^2 2x - \cos^2 4x + \cos^2 6x - \ldots.] = S$$

oder auch nur diejenige Function suchen, deren syntaktische Entwickelung sie ist, so hätte man

$$2\cos^2 2x = 1 + \cos x$$
$$2\cos^2 4x = 1 + \cos 2x$$
$$2\cos^2 6x = 1 + \cos 3x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*) Mit Hülfe der Integralrechnung lässt sich zeigen, dass diess im obigen Falle unmöglich sei; aber wir befinden uns hier im Gebiete der allgemeinen Arithmetik!

Digitized by Google

folglich

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$
$$+ \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots$$

Was setzt man nun für die erste Reihe? $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ oder $\frac{m}{n}$, da auch

$$\frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1}}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}}$$
$$= 1 - x^m + x^n - x^{m+n} + x^{2n} - x^{m+2n} + \ldots,$$

mithin für $x = 1$, und für beliebige positive ganze m und n

$$\frac{m}{n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

ist. Hier lässt uns auch Lagrange im Stiche.

Nach dieser Digression kehre ich wieder zu den „Bemerkungen" des Herrn Doctor Barfuss zurück.

Derselbe tadelt in No. 3. meine Entwickelung von

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots = -\tfrac{1}{2},$$

indem er mich auf die allgemeinere Gleichung

$$\frac{v \cos x - v^2}{1 - 2v \cos x + v^2} = v \cos x + v^2 \cos 2x + v^3 \cos 3x + \ldots$$

verweist. Für $v = 1$ und $x = 0$ zeigt er, dass

$$\infty = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

herauskommt, was ich ihm gern zugebe. Wenn aber x nicht $= 0$ und nicht $= 2n\pi$ ist, so erhält man doch

$$-\tfrac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots \quad (A)$$

weil in diesem Falle $\cos x - 1 = -2\sin^2 \frac{1}{2}x$ und $1 - 2\cos x + 1 = 4\sin^2 \frac{1}{2}x$ gesetzt werden darf. Mein Herr Gegner hat also weiter nichts bewiesen, als dass die Gleichung (A) für $x = 0$ und $x = 2n\pi$ Ausnahmen erleidet. Entwickeln wir jetzt beiderseits nach Potenzen von x, so wird

$$-\tfrac{1}{2} = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \quad (B)$$
$$- (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots)\frac{x^2}{1.2}$$
$$+ (1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots)\frac{x^4}{1.2.3.4}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und diess gilt allerdings nicht für jeden Werth von x, wie Herr Dr. Barfuss sagt, weil die Fälle $x = 0$ und $x = 2n\pi$ auszunehmen sind. Daraus schliesst derselbe, dass ich die Coefficienten beider-

seits nicht vergleichen dürfe, wobei er sich aber in einem Irrthume befindet.

Hat man nämlich für alle möglichen Werthe von x die Gleichung

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots=0,$$

so beweist man, dass $a=b=c=d$ etc. $=0$ sei, auf folgende höchst ungenügende Weise. Man setzt $x=0$ und bekommt $a=0$; und zwar ist jetzt diess Resultat für jedes x allgemein richtig, obgleich es für einen speciellen Fall von x herausgebracht wurde, weil a von x unabhängig ist. Darauf geht man weiter und beweist, dass $b=c=d$ etc. $=0$ sind. Daraus sollte man freilich schliessen, dass der Satz dann nicht richtig wäre, wenn für $x=0$ eine Ausnahme in der obigen Gleichung eintritt. Das ist aber total falsch. Der Satz lautet nämlich so:

Wenn die Gleichung

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots=0$$

für alle x gilt, welche innerhalb eines, wenn auch noch so kleinen Intervalles $x=\alpha$ bis $x=\beta$ liegen, so ist

$$a=b=c=d \text{ etc. } =0,$$

was man weit genügender mittelst der Differentialrechnung zeigen kann.

Wenn nun auch zugegeben wird, dass die Gleichung (B) oder

$$\begin{aligned}0=&-\tfrac{1}{2}+1+1+1+\ldots\ldots\\&-(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots)\frac{x^2}{1.2}\\&+(1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots)\frac{x^4}{1.2.3.4}\\&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

für $x=0$ und $x=2n\pi$ nicht gilt, so bleibt sie doch ausserdem richtig und das Intervall, für welches sie gilt, geht von 0 bis 2π, beide Gränzen ausgeschlossen. Es ist mir also nach dem vorigen Satze auch die Coefficientenvergleichung erlaubt und da findet sich doch wieder

$$1+1+1+\ldots\ldots=-\tfrac{1}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots=0$$

etc.,

und mithin trifft mich gar nicht, was mein Herr Gegner gegen diese Resultate vorbringt.

II.

Ich will jetzt der Sache näher treten. Nach der Euler-Friesischen Ansicht ist die Bedeutung einer Gleichung wie

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots.$$

folgende: Ich kann durch Anwendung einer gewissen analytischen (syntaktischen) Operation, hier der Division, aus dem Ausdrucke links so viele Glieder der Reihe rechts herausentwickeln, als ich nur will, und zwar für jeden beliebigen Werth von x. Gehe ich nun mit dieser Operation ins Unendliche fort, so ist wirklich

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots. \text{ in inf.}$$

Daher heisst es auch in den „Bemerkungen" des Herrn Dr. Barfuss S. 231.: „Ist denn nicht $x+x^2+x^3+\ldots.$ die Entwickelung von $\frac{x}{1-x}$ und nur von diesem, auch wenn nicht hinzugefügt wird, x müsse kleiner als 1 sein." O ja, aber welche Logik lehrt uns denn, für eine solche analytische Beziehung zweier Ausdrücke ein Gleichheitszeichen zu brauchen? Wenn man durch ein gewisses Verfahren aus dem Ausdrucke $\frac{x}{1-x}$ so viel Glieder der ganz ausserhalb desselben stehenden Reihe $x+x^2+x^3+\ldots.$ hervorlocken kann, als man will, wer berechtigt uns denn, diese beiden Dinge für gleich anzusehen? Ein Gleichheitszeichen darf nur da stehen, wo zwei Dinge einander entweder identisch sind, oder sich einer solchen Identität unbegränzt nähern, oder wenn das eine bloss formell von dem anderen verschieden ist, etwa wie in der Gleichung $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Das letztere will Fries in seiner Naturphilosophie (S. 161.) für unseren Fall geltend machen. Er meint, die Gleichung

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots.$$

bedeute syntaktisch weiter nichts, als dass die Reihe rechts mit $1-x$ multiplicirt 1 gebe, und in so fern sei diess nichts als ein Fall von der Umkehrung der syntaktischen Operation des Multiplicirens. Er sagt ferner, man brauche nur mit $1-x$ beiderseits zu multipliciren, um sich davon zu überzeugen; es sei dann

$$\begin{array}{l} 1=1+x+x^2+x^3+\ldots. \\ \quad\;\; -x-x^2-x^3-\ldots. \\ \hline \quad\;\; 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Bevor ich auf das Unrichtige hierin aufmerksam mache, will ich ein Paar ganz triviale Beispiele ähnlicher Art behandeln.

Wenn ich sage, ich schicke jetzt einen Boten aus, einige Zeit nachher demselben einen nach (abgesehen davon, ob derselbe eben so geschwind, langsamer oder rascher geht, als der erste) und dann frage: sind denn die Wege beider Boten gleich, sobald sie unendlich lange gegangen sind, so wird jeder Vernünftige antworten: das lässt sich so ins Unbestimmte hinein gar nicht sagen, sobald nicht das Verhältniss ihrer Geschwindigkeiten gegeben ist. Denn

Digitized by Google

wenn beide Boten gleich schnell geben, so wird die Differenz ihrer Wege, auch wenn diese an sich unendlich sind, immer so viel betragen, als der erste dem zweiten voraus war, sind aber ihre Geschwindigkeiten verschieden, so wird sich diese Differenz beständig ändern und kann sogar unendlich gross werden.

Schreibe ich folgende beiden Reihen

$$\begin{array}{l} a+b+b+b+b \\ \quad\; b+b+b+b+b \end{array}$$

mit der Forderung hin, beide ins Unendliche zu verlängern und zwar so, dass wenn ich oben ein b zusetze, diess noch unten geschehen soll, und frage dann, sind diese beiden Reihen ins Unendliche fortgesetzt identisch? so antwortet jeder, der zählen kann: Nein! Denn die obere Reihe enthält, wie weit sie auch gehen möge, ein a nebst einer gewissen Parthie b, die untere die nämliche Parthie b plus noch einem b; also ist jederzeit die Differenz $= a - b$.

In einem ähnlichen, aber noch weit schlimmeren Falle befindet sich die obige Friesische Rechnung. Denn wenn ich successive zwei, drei, vier u. s. f. Glieder der Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

mit $1 - x$ multiplicire, so erhalte ich der Reihe nach

$$\left.\begin{array}{l} 1 + x \\ \quad - x - x^2 \end{array}\right\} = 1 - x^2,$$

dann

$$\left.\begin{array}{l} 1 + x + x^2 \\ \quad - x - x^2 - x^3 \end{array}\right\} = 1 - x^3,$$

ferner

$$\left.\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 \\ \quad - x - x^2 - x^3 - x^4 \end{array}\right\} = 1 - x^4$$

u. s. f. gerade wie im zweiten Beispiele, wo ich unten ein Glied zusetzen muss, wenn ich es oben thue. Wenn ich nun so ins Unendliche fortgehe, werden denn dann die obere und untere Reihe, abgesehen von dem Anfangsgliede 1 identisch, was doch sein müsste, weil die Ausdrücke

$$1 \text{ und } (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots.)$$

durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind? Keineswegs im Allgemeinen, wenn ich nicht das Verhältniss kenne, nach welchem sich die Werthe von x, x^2, etc. ändern. Denn als vollständiges Product bekomme ich im Allgemeinen $1 - x^n$. Ist nun $x < 1$, so erhalten wir bei wachsenden n, $\text{Lim}\; x^n = 0$, also wirklich

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. \text{ in inf.}) = 1$$

ausserdem aber in keinem Falle.

Hiermit ist also genügend gezeigt, in welchem Falle man die Ausdrücke

Digitized by Google

$$\frac{1}{1-x} \text{ und } 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

durch ein Gleichheitszeichen verbinden darf. Wenn aber die Reihe rechts divergirt, so findet allerdings immer noch eine gewisse analytische Beziehung zwischen denselben statt, aber diese ist keine Gleichheit, und dann wäre es unrichtig, mit Gleichheitszeichen weiter rechnen zu wollen. Der Unterschied zwischen der arithmetischen und syntaktischen Bedeutung der Reihen erstreckt sich also auch bis auf die Wahl der Zeichen, wobei das Gleichheitszeichen lediglich nur im ersten Falle gebraucht werden darf. Möge daher Herr Dr. Barfuss in Gottes Namen einen Calcul von der allgemeinen Entwickelung der Functionen, von den syntaktischen Beziehungen derselben, oder wie er das Ding nennen will, etabliren, möge er sich auch dazu ein beliebiges Zeichen aussuchen, dagegen wird kein Mensch etwas haben; nur wolle er uns nicht glauben machen, man könne Gleichheitszeichen brauchen, wo keine Gleichheit statt findet, und usurpire er nicht ein Zeichen, welches nur unserer Ansicht dient, und dem wir durchaus nicht gestatten können, auch anderen Herren zugleich mit aufzuwarten.

Man würde es kaum für möglich halten, dass eine so einfache Sache so lange in verkehrter Weise dargestellt worden sei, wenn man sich nicht erinnerte, dass in der Analysis die Maxime festgehalten worden ist, es müssten die Resultate immer völlig allgemein sein, und da man bald einsah, dass das der Sache, d. h. den numerischen Werthen nach nicht möglich sei, so suchte man wenigstens die Form zu retten, und erfand die geheime syntaktische Bedeutung, schimpfte wohl auch hie und da diejenigen unphilosophische Köpfe, welche darauf nicht eingehen wollten und sich allein an die unrichtigen Werthe der Reihen hielten *). Von einem Beweise jener Maxime habe ich nirgends eine Spur gefunden, die Sache ist immer nur als Meinung aufgestellt worden. Dass aber dieselbe an und für sich falsch sei, kann man sehr oft a priori einsehen. So z. B. enthält die Reihe für tan x nur ganze positive Glieder; für $x = \frac{\pi}{2}$ giebt dieselbe tan $\frac{\pi}{2} = \infty$, was ganz in der Ordnung ist. Setze ich in derselben $x > \frac{\pi}{2}$, so muss, weil alle Glieder positiv sind und Potenzen von x enthalten, um so mehr etwas unendlich Grosses und zwar Positives herauskommen. Nun ist aber die Tangente im zweiten Quadranten, d. h. für $x > \frac{\pi}{2}$, negativ; also müsste eine unendlich grosse positive Grösse einer endlichen nega-

*) Diess soll nicht etwa in Beziehung auf Fries gesagt sein. Soviel ich diesem grossen Manne persönlich verdanke und so überzeugt ich von seinen philosophischen Ansichten bin, so habe ich doch in diesem Punkte nie mit meinem verehrungswürdigen Lehrer übereinstimmen können. Fries hatte sich hierin ganz auf Euler verlassen und stellte seine Theorie von der arithmetischen und syntaktischen Bedeutung der Reihen nur als plausiblen Erklärungsversuch, nicht aber mit dogmatischer Keckheit als unumstössliche Wahrheit hin. Obige Bemerkung geht vielmehr auf die, welche, gerade am wenigsten von der Philosophie verstehend, sich am liebsten hinter dieselbe verstecken.

tiven gleich sein. Daraus sieht man augenblicklich, dass hier die Gültigkeit der Reihe aufhört, d. h. dass das Band des Gleichheitszeichens, welches beide Ausdrücke bisher umschlungen hielt, sich an dieser Stelle löst. Eine gewisse analytische Beziehung findet deswegen immer noch statt, und es mag wohl eine syntaktische Operation geben, durch welche man aus jener negativen Tangente soviel Glieder jener unendlichen positiven Grösse entwickeln kann, als man will, nur soll man nicht von Gleichheit beider Ausdrücke reden.

III.

Ich komme jetzt an diejenige Partie des Aufsatzes von Herrn Dr. Barfuss, worin er sich die ärgsten Fehler hat zu Schulden kommen lassen, nämlich an den Abschnitt No. 5. Hier bemerkt mein Herr Gegner, ich hätte mich in dem Schlusse, dass der Rest einer Reihe in einem meiner früheren Aufsätze im Allgemeinen verschwände, geirrt. Die Sache war folgende: ich hatte zu zeigen, dass das Integral

$$\int_0^1 \frac{1-x^\mu}{1-x} x^m dx,$$

wo μ und m beliebige Grössen sein mögen, sich unbegränzt der Null nähere, wenn man m ins Unendliche wachsen lässt. Ich bewerkstelligte diess mittelst folgenden Satzes:

Wenn M und N das Maximum und Minimum einer Function $\varphi(x)$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=b$ bedeuten und $\psi(x)$ eine Function ist, welche während des nämlichen Intervalles ihr Vorzeichen nicht ändert, so ist

$$M\int_a^b \psi(x)dx > \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx > N\int_a^b \psi(x)dx.$$

Dieser Satz wurde auf das obige Problem in so fern angewendet, als ich hier

$$\varphi(x) = \frac{1-x^\mu}{1-x},\ \psi(x) = x^m$$

setzte und nun zeigte, dass das Maximum und Minimum von $\varphi(x)$ während des Intervalles $x=0$ bis $x=1$ endliche Grössen sind. Daher war jetzt

$$M\int_0^1 x^m dx > \int_0^1 \frac{1-x^\mu}{1-x} x^m dx > N\int_0^1 x^m dx$$

oder

$$\frac{M}{m+1} > \int_0^1 \frac{1-x^\mu}{1-x} x^m dx > \frac{N}{m+1},$$

und da M und N endliche Grössen sind, so nähern sich für wachsende m beide Ausdrücke, zwischen denen das Integral liegt, mithin dieses selbst, unbegränzt der Null.

Mein Herr Gegner bemerkt darauf, das gelte nur, wenn μ (welches dort $=1-2a$ war) positiv sei, denn ausserdem werde wirklich

$$\varphi(x)=\frac{1-x^{\mu}}{1-x}$$

während des Intervalles 0 bis 1 unendlich, mithin M unendlich, und daraus scheint er folgern zu wollen, dass dann der Rest nicht verschwände.

Zu diesem Irrthum ist Herr Dr. Barfuss durch die Form meines Beweises gekommen, welcher dann eine kleine Aenderung erleidet. Ist nämlich μ negativ, so hat man offenbar

$$\int_0^1 \frac{1-x^{-\mu}}{1-x}x^m dx=\int_0^1 \frac{x^{\mu}-1}{1-x}x^{m-\mu}dx,$$

und nun setze man

$$\varphi(x)=\frac{x^{\mu}-1}{1-x},\ \psi(x)=x^{m-\mu},$$

so gilt von diesem $\varphi(x)$, was von dem früheren $\varphi(x)$ gesagt wurde, dass es nämlich während des Intervalles 0 bis 1 nicht unendlich werden kann, oder dass sein Maximum und Minimum M und N endliche Grössen sind. Nach dem citirten allgemeinen Satze von den bestimmten Integralen ist nun

$$M\int_0^1 x^{m-\mu}dx > \int_0^1 \frac{x^{\mu}-1}{1-x}x^{m-\mu}dx > N\int_0^1 x^{m-\mu}dx$$

oder

$$\frac{M}{m-\mu+1} > \int_0^1 \frac{1-x^{-\mu}}{1-x}x^m dx > \frac{N}{m-\mu+1},$$

woraus man sieht, dass auch dieses Integral sich für unbegränzt wachsende m der Null nähert. Ich hätte der Vollständigkeit wegen diess in meinem Aufsatze bemerken sollen, konnte aber eben so gut voraussetzen, dass wer den Gang des Beweises einmal begriffen hatte, diese Kleinigkeit wohl selbst sehen würde.

Im Folgenden spricht mein Herr Gegner von der beschränkten Auffassung des bestimmten Integrales.

„Dasselbe ist nicht

$$\int_a^b f(x)dx=\delta[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots.]$$

für $\delta=\frac{b-a}{\infty}$, das ist es nur, wenn das allgemeine Integral $\int f(x)dx$ für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$ eine stetige Function von x ist. Das bestimmte Integral ist nichts anderes, als die Differenz zweier besonderen Werthe eines allgemeinen, und diess ist seine syntaktische Bedeutung, der jene arithmetische untergeordnet ist."

Was man da nicht für Neuigkeiten erfährt! Herr Dr. Barfuss scheint nicht zu wissen, dass beide Definitionen des bestimmten Integrales ganz identisch und hinsichtlich ihrer Allgemeinheit sich ganz gleich sind. Wie man aus der Definition:

Digitized by Google

für

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + \text{Const.}$$

ist

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) \quad (1)$$

die andere

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \text{Lim}\,\delta[f(a) + f(a+\delta) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\delta)] \\ \delta &= \frac{b-a}{n}\end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

ableitet, lässt sich aus jedem guten Lehrbuche lernen; dass aber auch das Umgekehrte eben so leicht ist, will ich hier zeigen.

Sei $f(x)$ die Gleichung einer beliebigen Curve, mögen ferner a und b (wobei $a < b$ sein soll) zwei bestimmte Werthe der Abscisse x bedeuten, zu welchen eben so zwei beliebige Werthe der Ordinate, nämlich $f(a)$ und $f(b)$ gehören. Theilt man das Intervall $b-a$ in n gleiche Theile und zieht durch jeden eine Ordinate, so wird der von $b-a$, $f(a)$, $f(b)$ und dem Curvenstücke dazwischen begränzte Flächeninhalt durch jene Ordinaten in schmale Streifen zerlegt, welche wir als Rechtecke betrachten können und zwar um so genauer, je näher diese Ordinaten an einander liegen, d. h. je grösser die Zahl n ist. Die Summe aller dieser Parallelogramme ist daher desto genauer gleich der von der Curve beschriebenen Fläche, die wir mit $\overset{b}{\underset{a}{\Sigma}} f(x)$ bezeichnen wollen, je grösser n ist. Setzen wir $\frac{b-a}{n} = \delta$, also $b-a = n\delta$, so wird nun

$$\overset{b}{\underset{a}{\Sigma}} f(x) = \text{Lim}\,\delta[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots f(a+(n-1)\delta] \ldots (3)$$

Aus diesem Ausdrucke erhält man leicht auf rein analytischem Wege:

$$\overset{b}{\underset{a}{\Sigma}} f(x) + \overset{c}{\underset{b}{\Sigma}} f(x) = \overset{c}{\underset{a}{\Sigma}} f(x),$$

d. h. geometrisch: die Fläche von a bis b plus der Fläche von b bis c ist gleich der Fläche von a bis c. Ebenso leicht findet man

$$\overset{c}{\underset{a}{\Sigma}} f(x) - \overset{b}{\underset{a}{\Sigma}} f(x) = \overset{c}{\underset{b}{\Sigma}} f(x) \ldots (4)$$

wovon die geometrische Bedeutung ganz ähnlich ist. Sind A und B das Maximum und Minimum von $f(x)$ während des Intervalles a bis b, so hat man aus (3):

$$\overset{a}{\underset{b}{\Sigma}} f(x) < \text{Lim}\,\delta[A + A + A + \ldots + A],$$

d. h.

$$< \text{Lim}\ \delta\,.\,nA,$$

oder weil $n\delta = b - a$ ist:

$$\sum_a^b f(x) < (b-a)A;$$

und ebenso leicht findet sich

$$\sum_a^b f(x) > (b-a)B,$$

also

$$(b-a)A > \sum_a^b f(x) > (b-a)B \ldots . (5)$$

d. h. der genannte Flächeninhalt ist kleiner als das Rechteck aus dem Stücke $b - a$ der Abscissenachse und der grössten zwischen a und b vorkommenden Ordinate, und er ist grösser als das Rechteck aus $b - a$ und der kleinsten der zwischen a und b liegenden Ordinaten.

Sehen wir jetzt die Summe $\sum_a^b f(x)$ als eine Function von b an und setzen wir

$$\sum_a^b f(x) = \psi(b) \ldots . (6)$$

Nehmen wir $b = a$, so ist offenbar

$$\sum_a^a f(x) = \psi(a) = 0 \ldots . (7)$$

weil dann gar keine Fläche beschrieben worden ist.

Aus der Gleichung (6) haben wir nun

$$\psi(b+\delta) - \psi(b) = \sum_a^{b+\delta} f(x) - \sum_a^b f(x)$$

$$= \sum_b^{b+\delta} f(x) \quad \text{nach Gleichung (4)}$$

und nach Formel (5), wenn wir $b + \delta$ und b für b und a gesetzt denken:

$$\delta A > \psi(b+\delta) - \psi(b) > \delta B,$$

wo jetzt A und B das Maximum und Minimum von $f(x)$ während des Intervalles b bis $b + \delta$ vorstellen. Man hat ferner

$$A > \frac{\psi(b+\delta) - \psi(b)}{\delta} > B \ldots . (8)$$

Lassen wir jetzt δ ins Unendliche abnehmen, so wird

$$\operatorname{Lim} \frac{\psi(b+\delta)-\psi(b)}{\delta} = \frac{d\psi(b)}{db}$$

und zugleich rücken A und B immer näher an einander und fallen mit $f(b)$ zusammen. Denn $f(b)$ ist selbst das Maximum und Minimum von $f(x)$ während des Intervalles $x=b$ bis $x=b+0$, weil man dann nicht von der Stelle gekommen ist. Die beiden Gränzen fallen also dann zusammen und die Gleichung (8) geht in die folgende über:

$$\frac{d\psi(b)}{db} = f(b),$$

woraus folgt:

$$\psi(b) = \int f(b)db + \text{Const.}$$

oder was das Nämliche ist:

$$\psi(b) = \int f(x)dx + \text{Const., für } x=b \dots. (9)$$

Die Constante ist leicht zu bestimmen; denn nach Gleichung (7) ist $\psi(a)=0$, d. h.

$$0 = \int f(x)dx + \text{Const., für } x=a \dots. (10)$$

Durch Subtraktion der vorstehenden Gleichung von (9) erhält man:

$$\psi(b) = \int f(x)dx, \text{ von } x=a \text{ bis } x=b,$$

d. h. nach Gleichung (6) und (3):

$$\begin{aligned}\sum_a^b f(x) &= \operatorname{Lim} \delta[f(a)+f(a+\delta)+\dots.+f(a+\overline{n-1}\,\delta)] \\ &= \int_a^b f(x)dx,\end{aligned}$$

woraus man also sieht, dass beide Definitionen des bestimmten Integrales identisch sind. Bezeichnen wir nämlich $\int f(x)dx$ mit $\varphi(x)$, so ist

$$\begin{aligned}\sum_a^b f(x) &= \operatorname{Lim} \delta[f(a)+f(a+\delta)+\dots.+f(a+\overline{n-1}\,\delta)] \\ &= \varphi(b)-\varphi(a) = \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Daran knüpfen sich mancherlei Betrachtungen.

Ist nämlich $f(x)$ reell von $x=a$ bis $x=b$, so muss auch das Integral $\int_a^b f(x)dx$, d. h. die von der reellen Ordinate über-

Digitized by Google

strichene Fläche, reell sein, weil alle die einzelnen Glieder $f(a)$, $f(a+\delta)$ u. s. w. reell sind. Es folgt daraus die Reellität der Differenz $\varphi(b)-\varphi(a)$. Diese kann auf zweierlei Weise hervortreten; entweder sind nämlich $\varphi(b)$ und $\varphi(a)$ beide reell oder beide imaginär, da die Differenz zweier imaginären Grössen reell sein kann, wie z. B. $\alpha+\gamma\sqrt{-1}-(\beta+\gamma\sqrt{-1})$. Keinenfalls aber darf es vorkommen, dass eine der Functionen $\varphi(b)$ und $\varphi(a)$ reell und die andere imaginär sei; denn die Differenz einer reellen und imaginären Grösse ist immer imaginär und kann demnach nicht einer reellen Grösse gleich sein, wie es nach dem Obigen nöthig ist.

Gleichwohl bringt mein Herr Gegner imaginäre Werthe solcher Integrale heraus, deren Differenzialformeln unter dem Integralzeichen reell sind, z. B. das Resultat:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}l(-1).$$

Um diesen Widerspruch aufzuklären, will ich der Sache auf den Grund gehen.

Die Differenzialrechnung lehrt uns das Resultat:

$$d.e^x = e^x dx.$$

Soll hier die rechte Seite reell sein, so ist diess auch auf der linken nöthig; denn wenn ich $x\sqrt{-1}$ für x setze, wird

$$d(e^{x\sqrt{-1}}) = d(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)$$
$$= (-\sin x + \sqrt{-1}\cos x)dx,$$

mithin auch die rechte Seite imaginär. Wenn also $d.e^x$ reell sein soll, muss es e^x selbst sein. Nun erhalten wir aber für $e^x = y$ aus obiger Gleichung

$$dy = yd(\log\text{ nat } y)$$

oder

$$dly = \frac{dy}{y}.$$

Hier gilt wieder das Nämliche; soll $\frac{dy}{y}$ reell sein, so muss auch ly reell sein, was schon daraus folgt, dass e^x reell angenommen werden musste. Man sieht es auch aus der geometrischen Bedeutung des Differenzials. Differenziiren heisst zur Gränze übergehen; der Differenzialquotient einer Linie ist ihr Endpunkt, der Differenzialquotient einer Fläche die sie begränzende Linie u. s. w. Auf diese Weise kann man jeder Differenziation einer auch noch so wunderlichen Function eine geometrische Bedeutung abgewinnen. Wollte man nun behaupten, dass das Differenzial einer imaginären Grösse eine reelle Grösse sei, so hiesse diess: eine unmögliche geometrische Figur hat eine mögliche Gränze (Anfang oder Ende), was reiner Unsinn ist. So hat auch die Formel $dly = \frac{dy}{y}$ nur für reelle y Bedeutung. Nehme ich jetzt $y = a - x$, so wird

$$dl(a-x)=\frac{-dx}{a-x},$$

dabei setze ich stillschweigend voraus, dass x nicht $> a$ sei, denn sonst wäre wieder die Gränze eines Unmöglichen ein Mögliches. Nehme ich ebenso $y = x - a$, so gilt die Formel

$$dl(x-a)=\frac{dx}{x-a}=\frac{-dx}{a-x}$$

nur für solche x, die nicht $< a$ sind, aus dem nämlichen Grunde.

Kommt mir jetzt umgekehrt die Differenzialformel

$$\frac{-dx}{a-x}$$

zum Integriren vor, so muss ich erst wissen, ob $a >$ oder $< x$ ist, sonst kann ich schlechthin das Integral gar nicht angeben. Ist $a > x$, so ist einzig und allein

$$\int\frac{-dx}{a-x}=l(a-x), \text{ aber nicht etwa } = l(x-a);$$

ist aber dagegen $a < x$, so ist allein:

$$\int\frac{-dx}{a-x}=\int\frac{dx}{x-a}=l(x-a) \text{ und nicht } = l(a-x).$$

Beides lässt sich aber vereinigen, wenn man, wie der Herr Herausgeber schreibt:

$$\int\frac{dx}{a-x}=-\tfrac{1}{2}l.(a-x)^2$$

und

$$\int\frac{dx}{x-a}=+\tfrac{1}{2}l.(x-a)^2,$$

wo es nun rechts ganz gleichgültig ist, ob man $a-x$ oder $x-a$ schreibt, da das Quadrat davon immer positiv, also der halbe Logarithmus davon immer reell ist. Der Herr Herausgeber hat in seinem Lehrbuche der Differenzialrechnung richtig bemerkt, dass diese Bezeichnungsweise gar nicht überflüssig oder unbedeutend ist, denn wir sehen an den Resultaten des Herrn Dr. Barfuss, in welche Irrthümer man bei der Nichtbeachtung dieser Regel verfallen kann. Hat man also z. B. den Werth des Integrales

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}$$

zu bestimmen, so ist für $x > 1$:

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}l(1+x)-\tfrac{1}{2}l(x-1)=\tfrac{1}{2}l\frac{x+1}{x-1}$$

und für $x < 1$:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}l(1+x) - \tfrac{1}{2}l(1-x) = \tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x};$$

braucht man die erste Form für $x = \infty$, die zweite für $x = 0$, so wird

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = l(1) - l(1) = 0;$$

oder nach der kürzeren Weise des Herrn Herausgebers:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{4}l.(1+x)^2 - \tfrac{1}{4}l.(1-x)^2 = \tfrac{1}{4}l.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2,$$

woraus wieder für $x = \infty$, $x = 0$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = 0$$

folgt, wie es sein muss.

Mein Herr Gegner hat sich hier, wo er $\tfrac{1}{2}l(-1)$ herausbringt, wieder einmal von der unglücklichen Idee der Einheit der Form leiten lassen und übersehen, dass sie ihn hier geradezu ins Gebiet des Unsinns geführt hat, weil er mir nach dem Obigen nun zugeben müsste, dass die Gränze eines unmöglichen Dinges ein mögliches sein könne. Wenn überall Einheit der Form herrschen sollte, warum verlangt er denn nicht auch, dass das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

immer durch die nämliche Formel gegeben werden solle, während er doch selbst bei positiven c immer die logarithmische, bei negativen die Kreisfunctionenformel gebraucht haben wird, um imaginäre Grössen zu vermeiden?

Ich muss nun noch eine Frage des Herrn Doctors Barfuss beantworten. Er findet

$$\int \frac{dx}{1-x^3} = \tfrac{1}{3}\int \frac{dx}{1-x} + \tfrac{1}{6}l(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ Arctan } \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Für $x = \infty$, $x = 0$ erhält er aus dem Arcustangens den Werth $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ und fragt nun verwundert: „aber was wird denn aus $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x} + \tfrac{1}{6}l(1+x+x^2)$?" d. h. richtiger, was wird aus

$$\tfrac{1}{3}\int \frac{dx}{1-x} + \tfrac{1}{6}l.(1+x+x^2),$$

wenn wir $x = \infty$, $x = 0$ setzen und beide Werthe subtrahiren? Hier ist die Antwort. Wir haben

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\tfrac{1}{2}l.(1-x)^2,$$

folglich

$$\tfrac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x}+\tfrac{1}{6}l(1+x+x^2)$$

$$=-\tfrac{1}{6}l.(1-x)^2+\tfrac{1}{6}l(1+x+x^2)=\tfrac{1}{6}l\frac{1+x+x^2}{1-2x+x^2}$$

$$=\tfrac{1}{6}l\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1}.$$

Daraus folgt für $x=\infty$, wo wir uns der zweiten, und für $x=0$, wo wir uns der ersten Form bedienen:

$$\tfrac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x}+\tfrac{1}{6}l(1+x+x^2)=0,\ \{x=0 \text{ bis } x=\infty\},$$

mithin bleibt

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1-x^3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

wie es die allgemeine Formel

$$\int_0^\infty\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\frac{\pi}{n\tan\frac{m\pi}{n}}$$

ebenfalls giebt. Letztere ist daher kein „imaginärer Ausdruck" und kein „aritbmetischer Unsinn".

Hiermit ist Alles, was mein Herr Gegner wider meine Integrationen sagt, gebührend gewürdigt. Wenn derselbe uns glauben machen will, reelle Differenzialformeln könnten imaginäre Integrale haben, so muss er selbst das Umgekehrte zugeben, dass nämlich imaginäre Functionen reelle Differenzialquotienten erzeugen könnten, was deswegen Unsinn ist, weil sich ohne Ausnahme jeder Differenziation die geometrische Bedeutung des Uebergangs zur Anfangs- oder Endgränze unterlegen lässt. (M. s. Fischer über den Sinn der höheren Analysis.) Aber was hat denn Herr Dr. Barfuss uns für Aufklärung verschafft, wenn er sagt, sein Integral

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}l(-1)$$

habe keine arithmetische, sondern nur eine syntaktische Bedeutung.? An die Stelle eines Unbegreiflichen schiebt er ein anderes Unbegreifliches; welche ist denn die syntaktische Bedeutung von $\frac{1}{2}l(-1)$? Hier heisst es wahrscheinlich wieder: „Und wo uns die Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zu rechter Zeit sich ein." *)

*) Das Verkehrte in dem genannten Resultate sieht man auch so. Es ist, den Integrallogarithmus mit *li* bezeichnet:

Was Herr Doctor Barfuss ferner über die Convergenz der Reihen u. s. w. sagt, sind willkührliche Begriffsbestimmungen. Will er nach seiner Ansicht die oder jene Reihe convergent nennen, die wir divergent nennen, so möge er das thun, auf den Namen kommt nichts an.

IV.

Man wird aber vielleicht fragen, woher kommt es denn, dass gerade diejenigen, welche sich ganz sorglos dem Gebrauche der Reihen, ohne Kritik ihrer Convergenz oder Divergenz überliessen, doch so wenig falsche Resultate herausbrachten? Sollte demnach ein solcher Gebrauch nicht zu rechtfertigen sein?

Hierauf ist die Antwort folgende. Man benutzt in der Analysis die Reihen zu zwei verschiedenen Zwecken. Entweder will man eine unbekannte Grösse näherungsweise darstellen, oder man sucht ein und den nämlichen Ausdruck auf verschiedene Weise in zwei nach Potenzen einer Hauptgrösse fortschreitende Reihen zu verwandeln und durch Vergleichung der Coefficienten gleichnamiger Potenzen jener Hauptgrösse zu neuen Resultaten zu gelangen. Dass man für den ersten Zweck nur convergirende Reihen brauchen könne, versteht sich von selbst; für die zweite Anwendung liefert uns ein früher erwähnter Satz die gewünschte Aufklärung. Wenn nämlich die Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$

für alle Werthe von x, welche innerhalb eines gewissen Intervalles $x = u$ bis $x = v$ liegen, zur Summe Null hat, so ist $a = b = c = d$ u. s. w. $= 0$. Daraus folgt weiter:

Wenn die Gleichungen

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$
$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots.$$

für alle x innerhalb eines gewissen Intervalles $x = u$ bis $x = v$ richtig bleiben, so ist

$$a = \alpha,\ b = \beta,\ c = \gamma, \text{ u. s. w.}$$

$$e^{-u}\, li(e^u) = \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} e^{-ux}, \quad -e^u\, li(e^{-u}) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x} e^{-ux}$$

(M. s. meine Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale S. 72.)

Addirt man beides und nimmt dann $u = 0$, so wird

$$li(1) - li(1) = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2},$$

also nach Herrn Dr. Barfuss die Differenz zweier reellen Grössen gleich der imaginären $l(-1)$?! Herr Dr. Barfuss scheint hiernach unseres Lehrers mathematische Naturphilosophie besser studirt zu haben, als seine Logik.

Digitized by Google

Hierin steckt das ganze Geheimniss. Z. B. Man findet auf verschiedenen Wegen die beiden Gleichungen

$$\tan x = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2}B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4}B_2 x^3 + \ldots. \quad (1)$$

wo B_1, B_2, u. s. w. gewisse positive Zahlen sind, und

$$\tan x = \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \ldots. \quad (2)$$

Die Gleichung (1) gilt nicht allgemein; denn $\tan x$ ist eine unstetige Function von x; an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ springt sie aus $+\infty$ in $-\infty$ über [$\tan(\frac{\pi}{2} - \delta) = +\infty$, $\tan(\frac{\pi}{2} + \delta) = -\infty$ für unendlich kleine δ]; jede nach Potenzen von x fortschreitende Reihe bildet dagegen eine stetige Function von x; also kann zwischen beiden Ausdrücken nicht für alle Werthe von x Identität statt finden, und in der That verschwindet dieselbe über $\frac{\pi}{2}$ hinaus, und macht dann einer blossen syntaktischen Verwandschaft Platz. Die Gleichung (2) lässt sich so schreiben:

$$\tan x = \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{2x}{1 - \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2} + \frac{1}{3^2}\frac{2x}{1 - \left(\frac{2x}{3\pi}\right)^2} + \ldots\right]$$

wobei man die einzelnen Glieder in Reihen verwandeln kann, sobald

$$2x < \pi,\ 2x < 3\pi \text{ u. s. f.}$$

ist. Diese Bedingungen reduciren sich auf die erste, d. h. auf $x < \frac{\pi}{2}$, und man erhält:

$$\left.\begin{aligned}\tan x = \ & \frac{2^3}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right]x \\ & + \frac{2^5}{\pi^4}\left[\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots\right]x^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Beide Gleichungen (1) und (3) sind nun zwar nicht für alle möglichen Werthe von x, aber doch für gewisse x (von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$) richtig, und daher ist die Vergleichung der Coefficienten gleichnamiger Potenzen von x erlaubt. Wir bekommen daher

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2^2-1)\pi^2}{1.2}B_1$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2^4-1)\pi^4}{1.2.3.4}B_2$$

u. s. f.

und zwar vollkommen richtig, obschon die Gleichungen (1) und (3) nicht allgemein gelten.

Aehnlicher Art sind alle Reihenbenutzungen in der Analysis, bei denen etwas Richtiges herauskam; die angewendeten Reihen waren den geschlossenen Ausdrücken, für welche sie figurirten, wenigstens innerhalb eines gewissen Intervalles gleich und mithin lieferte die Coefficientenvergleichung richtige Resultate. Man kann daher die Regel aufstellen:

Verwandelt man Behufs der Coefficientenvergleichung einen Ausdruck in zwei verschiedene, nach Potenzen der nämlichen Hauptgrösse fortschreitende Reihen, so hat man nicht nöthig, eine ängstliche Untersuchung anzustellen, wie weit wohl die Convergenz derselben reichen möge. Es genügt zu wissen, dass wenigstens für alle innerhalb eines kleinen Intervalles (etwa von 0 bis 1) liegende Werthe der Veränderlichen arithmetische Gleichheit vorhanden sei, d. h. die Reihen convergiren (denn wenn sie divergiren, nähern sie sich ihrem angeblichen Werthe nicht); man ist dann zur Vergleichung der Coefficienten gleichnamiger Potenzen berechtigt.

Ganz anders sieht die Sache aus, wenn man solche Reihen vergleicht, bei denen für k e i n e n Werth der Veränderlichen Identität vorhanden ist. Hier kommt man jederzeit auf Unsinn. So ist es Euler gegangen, wenn er

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots . \text{ in inf. } = \tfrac{1}{2}$$

setzt. Diese Gleichung ist als solche nie richtig; man braucht nur $x =$ einem aliquoten Theile von π zu setzen, um sogleich auf eine Reihe von der Form $a \pm a + a \pm a$ u. s. w. zu kommen; z. B. für $x = \frac{\pi}{3}$ erhält man:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 \\ &+ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 \\ &+ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 \\ &+ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und das soll doch nicht $= \frac{1}{2}$ sein? wiewohl es zu $\frac{1}{2}$ in einer syntaktischen Beziehung stehen mag. Daher sind auch die von Euler gefundenen Folgerungen

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots . = 0$$
$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots . = 0$$

sämmtlich falsch; höchstens könnte man sie dadurch interpretiren, dass man sagte: das Gleichheitszeichen steht hier nicht in arithmetischer, sondern in syntaktischer Bedeutung, d. h. durch eine gewisse syntaktische Operation kann ich aus der Null so viel Glieder jener Reihen entwickeln, als ich will. Das ist wohl möglich, aber zur Bezeichnung derartiger Beziehungen darf kein Gleichheitszeichen gebraucht werden.

Glücklicherweise sind solche Reihen, welche für jeden Werth

Digitized by Google

der darin vorkommenden Veränderlichen divergiren, sehr selten, und darin liegt der Grund, warum man selten auf falsche Resultate gekommen ist. Indessen habe ich einige aufgetrieben, welche zugleich zeigen, dass man nicht nur zu arithmetisch, sondern sogar zu syntaktisch falschen Resultaten gelangen kann, wenn man sich dem Calcul ohne Kritik überlässt.

1. Es ist bekanntlich

$$\frac{r \sin x}{1-2r\cos x+r^2}=r\sin x+r^2\sin 2x+r^3\sin 3x+\ldots.$$

Für $r=1$ erhält man, wofern nicht $x=0$ ist:

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots.$$

Dasselbe findet man auch durch Zerlegung der einzelnen Sinus in ihre imaginären Theile und Addition nach der allgemein sein sollenden Formel $u+u^2+u^3+\ldots=\frac{u}{1-u}$. Obiges Resultat ist aber, abgesehen von numerischen Werthen, schon syntaktisch falsch; denn wenn man beide Theile der Gleichung nach Potenzen von x entwickelt, so findet sich:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x}-\frac{B_1x}{1.2}-\frac{B_3x^3}{1.2.3.4}-\ldots\\ =\;&[1+2+3+\ldots]\frac{x}{1}\\ &-[1^3+2^3+3^3+\ldots]\frac{x^3}{1.2.3}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und hier kommt auf der linken Seite das Glied $\frac{1}{x}$ vor, während es auf der rechten fehlt, ganz gegen alle Syntaktik! Der Fehler liegt darin, dass in der allgemeinen Formel $r=1$ genommen wurde, während sie nur für $r<1$ richtig bleibt. Ist $r=1$, so hat man bis zum $n$ten Gliede:

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x-\frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Der Rest auf der rechten Seite verschwindet für wachsende n nicht, darf also nicht wegbleiben. Verwandelt man beide Theile in Reihen, so fängt die Entwickelung des Restes mit $-\frac{1}{x}$ an, welches sich gegen das in $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x$ vorkommende $\frac{1}{x}$ hebt, und man bekommt die bekannten Summenformeln für

$$1+2+3+\ldots+n,$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3,$$

u. s. w.

Man sieht ferner hieraus, dass das von Herrn Doctor Barfuss auf S. 229. über Reste Gesagte falsch ist. Nach seiner Ansicht wäre hier der Rest

$$R = \sin nx + \sin(n+1)x + \ldots \text{ in inf.};$$

woher käme denn nun in diesen Rest das Glied $\frac{1}{x}$, womit der unsrige anfängt?

2. Ein nicht weniger frappantes Beispiel ist folgendes. Wir haben

$$x + x^3 + x^5 + \ldots = \frac{x}{1-x^2} = -\frac{x}{x^2-1} \quad (A)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \ldots = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = +\frac{x}{x^2-1} \quad (B)$$

folglich durch Subtraction

$$-\frac{2x}{x^2-1} = (x-\frac{1}{x}) + (x^3-\frac{1}{x^3}) + (x^5-\frac{1}{x^5}) + \ldots \quad (C)$$

Nun giebt es für jedes beliebige x und ganze positive, aber ungerade m folgenden Satz (Cauchy cours d'analyse page 551.):

$$x^m - \frac{1}{x^m} =$$

$$2[\frac{m}{2}(x-\frac{1}{x}) + \frac{(m+1)m(m-1)}{2.4.6}(x-\frac{1}{x})^3$$

$$+\frac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{2.4.6.8.10}(x-\frac{1}{x})^5 + \ldots]$$

Wendet man diesen Satz auf die Gleichung (C) für $m = 1, 3, 5$ u. s. w. an, so wird

$$\begin{aligned}-\frac{x}{x^2-1} = \; & \tfrac{1}{2}(x-\tfrac{1}{x}) \\ & +\tfrac{3}{2}(x-\tfrac{1}{x}) + \tfrac{1}{2}(x-\tfrac{1}{x})^3 \\ & +\tfrac{5}{2}(x-\tfrac{1}{x}) + \tfrac{5}{2}(x-\tfrac{1}{x})^3 + \tfrac{1}{2}(x-\tfrac{1}{x})^5 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Nimmt man diese Reihen in verticaler Richtung zusammen und bemerkt zugleich, dass die linke Seite $= -\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$ ist, so erhält man:

$$-\frac{1}{x-\frac{1}{x}} = \quad (\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}+\tfrac{5}{2}+\ldots)(x-\tfrac{1}{x})$$

$$+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{2}+\ldots\ldots\ldots)(x-\tfrac{1}{x})^3$$

$$+(\tfrac{1}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots)(x-\tfrac{1}{x})^5$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nun ist aber x eine beliebige Grösse, folglich ist es auch $x-\frac{1}{x}$, welches wir $=z$ setzen wollen. Denn um irgend ein beliebiges z herauszubringen, hat man die quadratische Gleichung $x-\frac{1}{x}=z$ nach x aufzulösen, wodurch man jederzeit reelle x erhält. Bezeichnen wir die in obiger Gleichung vorkommenden Coefficienten von $(x-\frac{1}{x})$, $(x-\frac{1}{x})^3$ u. s. w. mit a_1, a_3 u. s. f., so finden wir

$$-\frac{1}{z}=a_1z+a_3z^3+a_5z^5+\ldots,$$

was schon syntaktisch falsch ist.

3. Addirt man die Gleichungen (A) und (B) im vorigen Beispiel, so kommt

$$0=x+\frac{1}{x}+(x^3+\frac{1}{x^3})+(x^5+\frac{1}{x^5})+\ldots \quad (D)$$

Nun giebt es für ungerade m und beliebige x folgenden Satz:

$$x^m+\frac{1}{x^m}$$

$$=(x+\frac{1}{x})\,[1+\frac{(m+1)(m-1)}{2.4}(x-\frac{1}{x})^2$$

$$+\frac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{2.4.6.8}(x-\frac{1}{x})^4+\ldots]$$

(Cauchy a. a. O. page 551.), unter dessen Anwendung für $m=1, 3,$ u. s. w. die Gleichung (D) sich so gestaltet:

$$0= \quad (x+\frac{1}{x})$$

$$+(x+\frac{1}{x})\,[1+\ (x-\frac{1}{x})^2]$$

$$+(x+\frac{1}{x})\,[1+3(x-\frac{1}{x})^2+\ (x-\frac{1}{x})^4]$$

$$+(x+\frac{1}{x})\,[1+6(x-\frac{1}{x})^2+5(x-\frac{1}{x})^4+(x-\frac{1}{x})^6]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder wenn man beiderseits mit $x + \frac{1}{x}$ dividirt, $x - \frac{1}{x} = z$ setzt und die Reihen vertical summirt:

$$\begin{aligned} 0 = \; & 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots. \\ & + (1 + 3 + 6 + 10 + \ldots.)z^2 \\ & + (1 + 5 + 15 + 35 + \ldots.)z^4 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mithin müsste nach dem Principe der Coefficientenvergleichung sein:

$$\left.\begin{aligned} & 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots. \\ = & 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots. \\ = & 1 + 5 + 15 + 35 + \ldots. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} = 0,$$

d. h. für ein ungerades m überhaupt:

$$0 = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \ldots.$$

während man aus dem binomischen Satze für negative m und $x = -1$ findet:

$$\infty = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \ldots.$$

also wieder ein Fall, in welchem eine divergente Reihe zwei verschiedene Summen hat.

Uebersieht man die beiden letzten Beispiele genauer, so bemerkt man leicht, dass darin weiter nichts, als ein Schmuggel unter dem Deckmantel des Gleichheitszeichens getrieben worden ist. Denn von den Gleichungen (A) und (B) ist als solche die eine jedesmal falsch, wenn die andere richtig ist, oder mit andern Worten, wenn die eine Reihe convergirt, divergirt die andere, ist also der anderen Seite des Gleichheitszeichens nicht gleich, sondern nur syntaktisch mit derselben verwandt. Brauchen wir das Zeichen ♉ für eine solche syntaktische Gleichheit der Form (d. h. analytische Beziehung, in so fern man durch ein gewisses Verfahren aus der geschlossenen Form so viele Glieder aus der unbestimmt fortlaufenden Reihe entwickeln kann, als man will), so stehen jene Gleichungen für $x < 1$:

$$x + x^2 + x^4 + \ldots. = \frac{x}{1 - x^2} = -\frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \ldots. \;♉\; \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \;♉\; \frac{x}{x^2 - 1}$$

und für $x > 1$;

$$x + x^3 + x^5 + \ldots . \mho \frac{x}{1 - x^2} \mho - \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \ldots . = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

und für $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} x + x^3 + x^5 + \ldots . = \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \ldots . = \end{array} \right\} \infty .$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber: — gar Nichts, weil man mit dem Zeichen $\mho$ nicht weiter rechnen kann. Also war an allen den fehlerhaften Resultaten nur die verkehrte Anwendung des Gleichheitszeichens bei divergirenden Reihen schuld. Dies ist meine Erklärung, die wohl auf den Namen einer genügenden und einfachen Anspruch machen darf. Ich fordere dagegen Herrn Dr. Barfuss auf, die 3 letzten paradoxen Beispiele nach seiner Ansicht zu erklären, wenn ihm diess überhaupt möglich ist. Einem etwaigen Einwande desselben will ich gleich im Voraus begegnen. Er könnte sagen: „Sie haben in der Gleichung $(A) - \frac{x}{x^2 - 1}$ für $\frac{x}{1 - x^2}$ gesetzt und so das Gesetz (?) der Einheit der Form verletzt; wenn auch die Reihe links die syntaktische Entwickelung von $\frac{x}{1 - x^2}$ bildet, so ist sie doch nicht die Entwickelung von $- \frac{x}{x^2 - 1}$." Dann würde aber mein Herr Gegner den ersten Grundsatz der Mathematik: für $A = B$ und $B = C$ ist $A = C$, leugnen. Da ist denn kein anderes Herauskommen möglich, als dass er sagte: ja die erste Gleichung $A = B$ ist nicht als solche, sondern als syntaktische Beziehung zu betrachten. Allerdings, wenn ein Dreieck einem zweiten ähnlich, dieses einem dritten an Fläche gleich ist, so folgt weder daraus, dass das erste dem dritten ähnlich, noch dass es ihm gleich sei. Hiermit würde mir Herr Dr. Barfuss zugeben, was ich eben behaupte, dass man nämlich nicht eher bei Reihen Gleichheitszeichen brauchen dürfe, als bis man von ihrer Convergenz überzeugt ist, und dass für divergente Reihen ein anderes Zeichen, etwa mein obiges $\mho$, nöthig sei, und dass man daher mit divergenten Reihen nicht schlechthin rechnen dürfe.

Ich glaube durch das bisher Gesagte jede der beiden einander gegenüber stehenden Ansichten in ihre rechte Stelle gerückt zu haben. Es wäre gewiss interessant, die Theorie der Reihen consequent nach der Ansicht meines Herrn Gegners bearbeitet zu sehen, wie diess auf unserer Seite durch Cauchy geschehen ist. Nur müsste bei einer solchen Darstellung streng beobachtet werden, was ich über den Gebrauch von Zeichen gesagt habe, damit nicht etwa eine solche für die Wissenschaft höchst gefährliche Pascherei entstände, wie ich sie im zweiten und dritten Beispiele zur Warnung durchgeführt habe.

V.

Ich will endlich noch einem Vorwurfe begegnen, den ich über unsere Partei gehört habe, nämlich dem: „die neuere Schule enthalte zwar geschickte Analytiker (wir danken recht schön), aber eine philosophische Ansicht über die Mathematik, eine Metaphysik des Calculs gehe ihr gänzlich ab." Diese Bemerkung, die übrigens gar nicht die Sache, sondern höchstens einige ihrer Verfechter treffen kann, ist zum Mindesten sehr voreilig. Die ältere Schule bestand sehr lange, ehe sie Jemand, namentlich erst Fries, von ihrer philosophischen Seite betrachtete; wie kann man nun von einer Schule, die noch im Entstehen begriffen ist und dem alten Schlendrian mühsam genug das Terrain abstreiten muss, gleich eine philosophische Betrachtung verlangen? Aber auch diess wird geleistet werden und zwar hoffe ich selbst in einiger Zeit das Meinige hierzu beizutragen. Ich will diesen ohnehin etwas lang gewordenen Aufsatz nicht durch eine solche Entwickelung noch mehr verlängern, kann es mir aber nicht versagen, wenigstens auf eine interessante Analogie hinzuweisen, welche zwischen der Philosophie und Mathematik in ihrer gegenwärtigen Verfassung statt findet. Die jetzige Zeit der Mathematik, in welcher die neuere Schule die ältere mit Recht zu verdrängen sucht, hat die grösste Aehnlichkeit mit jener, in welcher Kant mit seiner Kritik der reinen Vernunft auftrat. Die Philosophen hatten sich bis dahin ohne Kritik der Spekulation überlassen und glaubten an die Allgemeingültigkeit der Denkgesetze, mit denen sie Alles, auch selbst das Gebiet des Uebersinnlichen beherrschen wollten. So die Mathematiker, wenn sie in ihrer sogenannten allgemeinen Arithmetik die unbegränzte Allgemeinheit der analytischen Operationen behaupteten.

Jenem Unwesen stellte sich die Kantische Kritik gegenüber und wies in folgenden Resultaten der Spekulation ihr wahres Gebiet an:

> Die Methaphysik lehrt uns den Gebrauch von vier Grundbegriffen des denkenden Verstandes, nämlich der vier Categorieen Quantität, Qualität, Relation und Modalität. Der Gebrauch derselben erstreckt sich aber nur auf solche Begriffe, für welche in der Erfahrung ein congruirender Gegenstand aufgezeigt werden kann, d. h. ein solcher, der einer reinen Anschauung in den Formen des Raumes und der Zeit fähig ist. Versucht es dagegen der Verstand, jene vier Denkgesetze auf solche Begriffe anzuwenden, welche diese Bedingung nicht erfüllen, also übersinnliche sind (Ideen), so stösst derselbe auf die gröbsten Widersprüche, die Antinomieen, woraus weiter folgt, dass eine solche Anwendung eine durchaus unrechtmässige ist, und dass man von jenen Ideen keinen Gebrauch zur Erweiterung des philosophischen Wissens machen könne.

Ganz ähnlich steht es um die Mathematik.

> Die Arithmetik lehrt uns den Gebrauch von vier Grundoperationen des rechnenden Verstandes, nämlich den vier Species; sie zeigt uns aber denselben nur an solchen Grössen, die entweder endliche sind, oder sich einer endlichen bestimmten Grösse als Gränze nähern (z. B. Reihen, die unter besonderen Fällen convergiren). Versucht es dagegen der Verstand, jene Operationen auf solche Grössen anzuwenden, welche diese Bedingungen nicht erfüllen

(divergirende Reihen), so stösst er auf die gröbsten Widersprüche, woraus weiter folgt, dass eine solche Anwendung eine durchaus unrechtmässige ist und dass man von jenen Reihen, so lange sie divergiren, keinen Gebrauch zur Erweiterung des mathematischen Wissens machen könne.

Es geht uns mit den divergenten Reihen in der Analysis wie mit manchen Ausdrücken in der analytischen Geometrie. Fragt man z. B., welche ist die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$(y+2x)^2+(y+3x)^2+1=0,$$

wenn x die Abscissen, y die Ordinaten bezeichnen, so ist die Antwort: gar keine; denn für jedes reelle x erhält man ein imaginäres y, die Gleichung stellt daher weder einen Punkt, noch eine Linie, noch sonst etwas dar. Sie ist ein Gebilde der combinirenden Algebra, welches von einer gewissen, nämlich der geometrischen Seite betrachtet, gar keine Bedeutung hat, wenn es auch von einer anderen Seite angesehen nicht eben ohne Geltung ist. Ganz ähnlich verhält es sich mit den divergenten Reihen. Für einen Calcul, der es mit Gleichheitszeichen zu thun hat, und das ist fast die ganze Analysis, haben Reihen wie

$$1-2+4-8+16-32+\ldots.$$
$$1-1.2+1.2.3-1.2.3.4+\ldots.$$

gar keine Bedeutung, weil kein Ausdruck gegeben werden kann, dem sie wirklich gleich wären. Eine Betrachtung, die sich am Faden der Identitäten fortspinnt, erreicht hier ihr Ende. Divergente Reihen sind Gebilde, oder um einen hübschen Ausdruck von Fries*) zu brauchen, Figuren der combinatorischen Analysis. Hier hat Fries ganz Recht; er hätte bloss noch einen Schritt thun und unterscheiden sollen, ob der Calcul, in welchen man eine divergente Reihe einführt, sich mit Gleichheiten oder anderweitigen Beziehungen beschäftigt; er würde dann bemerkt haben, dass für eine Betrachtungsweise der ersten Art, und diess ist hauptsächlich die Analysis, bloss die numerische Bedeutung der Reihen zulässig ist, und damit hätte er das Richtige getroffen.

*) Mathematische Naturphilosophie. S. 162.

Digitized by Google

XXXI.

Ueber Aristarchs Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen.

Von

dem **Herausgeber.**

§. 1.

Aristarchs Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen, ist in ihrem Princip so einfach, und zugleich, insofern man die Entfernung des Monds von der Erde, die sich bekanntlich mittelst einer völlig directen Methode mit hinreichender Genauigkeit bestimmen lässt, als bekannt vorauszusetzen berechtigt ist, so direct, dass dieselbe, wenn sie auch für die Wissenschaft selbst von keiner Bedeutung mehr ist, doch beim Unterrichte in der Astronomie sorgfältiger berücksichtigt zu werden verdient, als dies, wie es wenigstens scheint, meistens zu geschehen pflegt. Wenn ich daber diese Methode, die Kepler für so schön hielt, dass er sie in seinen Ephemeriden für das Jahr 1619 dem Galilei und Marius, die schon mit Fernröhren beobachteten, zur Anwendung eifrigst empfahl, zum Gegenstande des vorliegenden Aufsatzes mache, und dieselbe aus einem allgemeineren Gesichtspunkte, als dies von ihrem ersten Erfinder geschah, zu betrachten und darzustellen versuchen werde, so habe ich dabei durchaus nur ihre Bedeutung für den Unterricht in methodischer Beziehung im Auge, indem ich zugleich der Meinung bin, dass dieselbe überhaupt als eine zweckmässige geometrische und trigonometrische Uebung für Schüler dienen kann, und wünsche, dass dieser Aufsatz zunächst auch nur aus diesem Gesichtspunkte beurtheilt werden möge.

§. 2.

Es kann wohl als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden, dass Aristarchs Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen, in ihrer ursprünglichen und einfachsten Gestalt darin besteht, den Mond zur Zeit seiner Viertel, die man daran erkennt, dass die Lichtgränze auf dem Monde genau als eine gerade Linie erscheint, zu beobachten, und in diesem Moment *) die scheinbare

*) In der Schwierigkeit, diesen Moment genau zu treffen, liegt vorzüglich die Unsicherheit der Methode und die geringe Genauigkeit der durch dieselbe erhaltenen Resultate.

Digitized by Google

Entfernung der Lichtgränze von dem Mittelpunkt der Sonne zu messen. Ist dann E der Beobachtungsort, M der Mittelpunkt des Monds, S der Mittelpunkt der Sonne, so ist MES die gemessene scheinbare Entfernung der Lichtgränze von dem Mittelpunkte der Sonne, und da nun wenigstens mit grosser Annäherung EMS ein rechter Winkel ist, so hat man die Gleichung

$$EM = ES \,.\, \cos MES,$$

aus der sich

$$ES = \frac{EM}{\cos MES} = EM \,.\, \sec MES$$

ergiebt. Ist man also die Entfernung EM des Monds vom Beobachtungsorte aus anderweitigen Messungen als bekannt vorauszusetzen berechtigt, so lässt sich mittelst der vorhergehenden Formel die Entfernung ES der Sonne vom Beobachtungsorte berechnen. Ueberhaupt liegt, wie man sogleich übersehen wird, dieser Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen, vorzüglich die Idee zum Grunde, die anderweitig bekannte Entfernung des Monds von der Erde zur Basis oder Standlinie zu machen, auf welche die Messung gegründet wird, weil wegen der grossen Entfernung der Sonne von der Erde der Durchmesser der letzteren eine nicht hinreichend grosse Standlinie darbietet, wenn man eine nur einigermaassen genügende Genauigkeit zu erreichen beabsichtigt.

§. 3.

Indem wir nach diesen vorläufigen allgemeinen Andeutungen die in Rede stehende Methode jetzt zu grösserer Allgemeinheit zu erheben versuchen werden, wollen wir annehmen, dass man zu irgend einer passenden Zeit mit geeigneten Instrumenten, etwa mit einem Spiegelsextanten, die folgenden Grössen gemessen habe:

den scheinbaren Halbmesser des Monds . . . . δ,
den scheinbaren Halbmesser der Sonne . . . . δ_1,
die scheinbare Entfernung der inneren Ränder der Sonne und des Monds von einander . . . . α,
die scheinbare Entfernung der Lichtgränze auf dem Monde von dem erleuchteten Mondrande, da wo diese Entfernung am grössten ist . . . . λ,

die Höhen der obern oder untern Ränder der Sonne und des Monds, woraus man mittelst der bekannten scheinbaren Durchmesser leicht die Höhen der Mittelpunkte der Sonne und des Monds findet.

Da man diese Grössen, wenn nicht mehrere mit gleich guten Instrumenten versehene Beobachter sich mit einander vereinigt haben, nicht alle in einem und demselben Zeitmomente, wie es eigentlich erforderlich ist, messen kann, so muss man in kurzen mit einer Uhr zu bestimmenden Zeitintervallen mehrere Messungen derselben anstellen, und diese Messungen dann auf bekannte Weise durch Interpolation sämmtlich auf ein gewisses mittleres Zeitmoment reduciren.

Dies vorausgesetzt, ist nun $\alpha + (\delta + \delta_1)$ die scheinbare Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und des Monds von einander,

Digitized by Google

welche man mit Hülfe der Höhen der Mittelpunkte wegen der Refraction corrigiren muss, wobei man sich ganz auf dieselbe Weise wie bei der Bestimmung der Längen durch Monddistanzen zu verhalten hat, was, als sich in jedem guten astronomischen Lehrbuche findend, hier wohl als bekannt vorausgesetzt werden kann. Bezeichnen wir die auf diese Weise wegen der Refraction corrigirte scheinbare Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und des Monds von einander durch μ, die scheinbare Entfernung der Lichtgränze auf dem Monde von dem Mittelpunkte der Sonne aber durch ν, so ist offenbar $\nu = \mu + \lambda - \delta$, und daher auch ν eine bekannte Grösse.

Den wahren Halbmesser des Monds und die Entfernung seines Mittelpunkts vom Beobachtungsorte wollen wir im Folgenden durch r und ϱ, den wahren Halbmesser der Sonne und die Entfernung ihres Mittelpunkts vom Beobachtungsorte dagegen durch r_1 und ϱ_1 bezeichnen.

§. 4.

Durch den Beobachtungsort und die Mittelpunkte der Sonne und des Monds denken wir uns jetzt eine Ebene gelegt, welche wir als die Ebene der xy annehmen. Der Beobachtungsort sei der Anfang der xy, die von dem Beobachtungsorte nach dem Mittelpunkte der Sonne gezogene gerade Linie sei der positive Theil der Axe der x, und der positive Theil der Axe der y werde auf der Seite der Axe der x angenommen, auf welcher sich zur Zeit der Beobachtung der Mond befindet; so sind offenbar

$$\varrho \cos \mu \text{ und } \varrho \sin \mu$$

die Coordinaten des Mittelpunkts des Monds, und die Gleichung des Durchschnitts der Ebene der xy mit der Oberfläche des Monds ist also

$$1) \quad (x - \varrho \cos \mu)^2 + (y - \varrho \sin \mu)^2 = r^2.$$

Ferner ist offenbar

$$2) \quad y = x \operatorname{tang} \nu$$

die Gleichung der von dem Beobachtungsorte nach der Lichtgränze gezogenen geraden Linie. Sind nun ξ, η die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser geraden Linie und des durch die Gleichung 1) charakterisirten Kreises, so hat man nach dem Vorhergehenden zur Bestimmung dieser Coordinaten die beiden Gleichungen

$$\eta = \xi \operatorname{tang} \nu,$$
$$(\xi - \varrho \cos \mu)^2 + (\eta - \varrho \sin \mu)^2 = r^2;$$

aus denen sich nach leichter Rechnung mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$3) \begin{cases} \xi = \cos \nu \{\varrho \cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{r^2 - \varrho^2 \sin(\mu - \nu)^2}\}, \\ \eta = \sin \nu \{\varrho \cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{r^2 - \varrho^2 \sin(\mu - \nu)^2}\}; \end{cases}$$

Digitized by Google

oder, weil $r = \varrho \sin \delta$ ist,

$$4)\quad \begin{cases} \xi = \varrho \cos \nu \{\cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{\sin \delta^2 - \sin(\mu - \nu)^2}\}, \\ \eta = \varrho \sin \nu \{\cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{\sin \delta^2 - \sin(\mu - \nu)^2}\}; \end{cases}$$

oder

$$5)\quad \begin{cases} \xi = \varrho \cos \nu \{\cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{\sin(\delta + \mu - \nu) \sin(\delta - \mu + \nu)}\}, \\ \eta = \varrho \sin \nu \{\cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{\sin(\delta + \mu - \nu) \sin(\delta - \mu + \nu)}\}; \end{cases}$$

ergiebt. Berechnet man aber den Hülfswinkel Θ mittelst der Formel

$$6)\quad \tang \Theta = \frac{\sqrt{\sin(\delta + \mu - \nu) \sin(\delta - \mu + \nu)}}{\sin(\mu - \nu)},$$

was jederzeit leicht geschehen kann, so werden die vorhergehenden Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\varrho \cos \nu \cos(\mu - \nu \mp \Theta)}{\cos \Theta}, \\ \eta = \dfrac{\varrho \sin \nu \cos(\mu - \nu \mp \Theta)}{\cos \Theta}. \end{cases}$$

Die Gleichung des nach dem Punkte $(\xi\eta)$ gezogenen Mondhalbmessers ist

$$8)\quad y - \varrho \sin \mu = \frac{\eta - \varrho \sin \mu}{\xi - \varrho \cos \mu}(x - \varrho \cos \mu),$$

und folglich, wenn man die aus 7) bekannten Werthe von ξ und η einführt:

$$9)\quad y - \varrho \sin \mu = \frac{\sin \nu \cos(\mu - \nu \mp \Theta) - \sin \mu \cos \Theta}{\cos \nu \cos(\mu - \nu \mp \Theta) - \cos \mu \cos \Theta}(x - \varrho \cos \mu)$$

wo sich nun frägt, wie man die Zeichen in dieser Gleichung und überhaupt in den obigen Gleichungen zu nehmen hat, worüber sich auf folgende Art eine bestimmte Entscheidung leicht geben lässt.

Bezeichnen wir die Entfernung der Lichtgränze vom Beobachtungsorte durch E, so ist

$$E^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

und folglich nach 5)

$$E^2 = \varrho^2 \{\cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{\sin(\delta + \mu - \nu) \sin(\delta - \mu + \nu)}\}^2.$$

Weil nun $\nu = \mu + \lambda - \delta$, also

$$\mu - \nu = \delta - \lambda, \quad \cos(\mu - \nu) = \cos(\delta - \lambda),$$

und, da im vorliegenden Falle der absolute Werth von $\delta - \lambda$ gewiss niemals 90° übersteigt, $\cos(\delta - \lambda)$, folglich auch $\cos(\mu - \nu)$ stets positiv ist, so liefert das obere Zeichen in vorstehender Glei-

chung für E jederzeit einen grösseren Werth als das untere, weshalb man, da die Lichtgränze natürlich immer dem Beobachter zugekehrt ist, in der vorstehenden Gleichung, und folglich auch überhaupt in allen obigen Gleichungen die unteren Zeichen nehmen muss. Daher muss man

$$10)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\varrho \cos\nu \cos(\mu-\nu+\Theta)}{\cos\Theta}, \\ \eta = \dfrac{\varrho \sin\nu \cos(\mu-\nu+\Theta)}{\cos\Theta} \end{cases}$$

setzen, und die Gleichung des nach dem Punkte $(\xi\eta)$ gezogenen Mondhalbmessers ist

$$11)\quad y-\varrho\sin\mu = \frac{\sin\nu\cos(\mu-\nu+\Theta)-\sin\mu\cos\Theta}{\cos\nu\cos(\mu-\nu+\Theta)-\cos\mu\cos\Theta}(x-\varrho\cos\mu).$$

Nun ist aber, wie man mittelst einiger einfachen goniometrischen Verwandlungen leicht findet:

$$\sin\nu\cos(\mu-\nu+\Theta)-\sin\mu\cos\Theta = \sin(\nu-\mu)\cos(\nu-\Theta),$$
$$\cos\nu\cos(\mu-\nu+\Theta)-\cos\mu\cos\Theta = -\sin(\nu-\mu)\sin(\nu-\Theta);$$

und folglich

$$12)\quad y-\varrho\sin\mu = -(x-\varrho\cos\mu)\cot(\nu-\Theta)$$

die Gleichung des nach dem Punkte $(\xi\eta)$ gezogenen Mondhalbmessers.

Die Gleichung der durch den Punkt $(\xi\eta)$ gezogenen Berührenden des durch die Gleichung 1) charakterisirten Kreises sei

$$y-\eta = A(x-\xi),$$

so ist wegen der Gleichung 12) nach den Principien der analytischen Geometrie

$$1-A\cot(\nu-\Theta)=0,\quad A=\operatorname{tang}(\nu-\Theta);$$

also

$$13)\quad y-\eta=(x-\xi)\operatorname{tang}(\nu-\Theta)$$

die Gleichung der durch den Punkt $(\xi\eta)$ gezogenen Berührenden des durch die Gleichung 1) charakterisirten Kreises.

Da diese Berührende offenbar auch eine Berührende des Kreises sein muss, in welchem die Oberfläche der Sonne von der Ebene der xy geschnitten wird, so ist r_1 die Entfernung des Mittelpunkts der Sonne von der in Rede stehenden Berührenden, und folglich, da $\varrho_1, 0$ die Coordinaten des Mittelpunkts der Sonne sind, nach den Principien der analytischen Geometrie

$$r_1^2 = \frac{\{(\varrho_1-\xi)\operatorname{tang}(\nu-\Theta)+\eta\}^2}{1+\operatorname{tang}(\nu-\Theta)^2}$$

oder

$$r_1^2 = \{(\varrho_1 - \xi)\sin(\nu - \Theta) + \eta\cos(\nu - \Theta)\}^2;$$

also, weil $r_1 = \varrho_1 \sin\delta_1$ ist:

$$\varrho_1^2 \sin\delta_1^2 = \{(\varrho_1 - \xi)\sin(\nu - \Theta) + \eta\cos(\nu - \Theta)\}^2,$$

und folglich

$$\pm\varrho_1 \sin\delta_1 = (\varrho_1 - \xi)\sin(\nu - \Theta) + \eta\cos(\nu - \Theta),$$

woraus sich leicht

$$\varrho_1\{\sin(\nu - \Theta) \mp \sin\delta_1\} = \xi\sin(\nu - \Theta) - \eta\cos(\nu - \Theta),$$

also, wenn man für ξ und η ihre aus dem Obigen bekannten Werthe einführt:

$$2\varrho_1 \sin\tfrac{1}{2}(\nu - \Theta \mp \delta_1)\cos\tfrac{1}{2}(\nu - \Theta \pm \delta_1) = -\varrho\cos(\mu - \nu + \Theta)\tang\Theta,$$

woraus sich

$$14)\quad \frac{\varrho_1}{\varrho} = -\frac{\cos(\mu - \nu + \Theta)\tang\Theta}{2\sin\frac{1}{2}(\nu - \Theta \mp \delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu - \Theta \pm \delta_1)},$$

oder nach 6)

$$15)\quad \frac{\varrho_1}{\varrho} = -\frac{\cos(\mu - \nu + \Theta)\sqrt{\sin(\delta + \mu - \nu)\sin(\delta - \mu + \nu)}}{2\sin(\mu - \nu)\sin\frac{1}{2}(\nu - \Theta \mp \delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu - \Theta \pm \delta_1)}$$

ergiebt, mittelst welcher Formeln ϱ_1 leicht aus ϱ berechnet werden kann.

Bezeichnen wir die Abscisse des Durchschnittspunkts der durch die Gleichung 13) charakterisirten Berührenden mit der Axe der x durch x_1, so ist nach 13)

$$-\eta = (x_1 - \xi)\tang(\nu - \Theta),$$

und folglich

$$x_1 = \frac{\xi\sin(\nu - \Theta) - \eta\cos(\nu - \Theta)}{\sin(\nu - \Theta)}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\xi\sin(\nu - \Theta) - \eta\cos(\nu - \Theta) = \varrho_1\{\sin(\nu - \Theta) \mp \sin\delta_1\}$$

ist, so ist

$$\frac{x_1}{\varrho_1} = \frac{\sin(\nu - \Theta) \mp \sin\delta_1}{\sin(\nu - \Theta)}$$

oder

$$\frac{x_1}{\varrho_1} = 1 \mp \frac{\sin\delta_1}{\sin(\nu - \Theta)}.$$

Offenbar ist aber stets $\frac{x_1}{\varrho_1} < 1$ und $\sin\delta_1$ positiv. Also muss man

Digitized by Google

in der vorstehenden Gleichung, und daher auch in allen obigen Gleichungen die obern oder untern Zeichen nehmen, jenachdem $\sin(\nu-\Theta)$ eine positive oder eine negative Grösse ist, mittelst welches Kriteriums sich also immer sicher entscheiden lässt, wie namentlich in den Formeln 14) und 15) die Zeichen zu nehmen sind.

§. 5.

Entwickelt man die partiellen Differentiale von

$$\tang\Theta=\frac{\sqrt{\sin(\delta+\mu-\nu)\sin(\delta-\mu+\nu)}}{\sin(\mu-\nu)}$$

in Bezug auf δ, μ, ν als veränderliche Grössen, so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$16)\quad\begin{cases}d_\delta\tang\Theta=\dfrac{\sin2\delta\cot\Theta}{2\sin(\mu-\nu)^2}d\delta,\\ d_\mu\tang\Theta=-\dfrac{2\cot(\mu-\nu)}{\sin2\Theta}d\mu,\\ d_\nu\tang\Theta=\dfrac{2\cot(\mu-\nu)}{\sin2\Theta}d\nu;\end{cases}$$

und folglich, weil nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung

$$d_\delta\Theta=\cos\Theta^2d_\delta\tang\Theta,$$
$$d_\mu\Theta=\cos\Theta^2d_\mu\tang\Theta,$$
$$d_\nu\Theta=\cos\Theta^2d_\nu\tang\Theta$$

ist:

$$17)\quad\begin{cases}d_\delta\Theta=\dfrac{\sin2\delta\cos\Theta^2\cot\Theta}{2\sin(\mu-\nu)^2}d\delta,\\ d_\mu\Theta=-\cot(\mu-\nu)\cot\Theta d\mu,\\ d_\nu\Theta=\cot(\mu-\nu)\cot\Theta d\nu.\end{cases}$$

Weil nun bekanntlich

$$d\Theta=d_\delta\Theta+d_\mu\Theta+d_\nu\Theta$$

ist, so ist

$$18)\quad d\Theta=\frac{\sin2\delta\cos\Theta^2\cot\Theta}{2\sin(\mu-\nu)^2}d\delta$$
$$-\cot(\mu-\nu)\cot\Theta d\mu$$
$$+\cot(\mu-\nu)\cot\Theta d\nu.$$

Entwickelt man ferner auch die partiellen Differentiale von

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}=-\frac{\cos(\mu-\nu+\Theta)\tang\Theta}{2\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)}$$

in Bezug auf μ, ν, δ_1, Θ als veränderliche Grössen, so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$19)\quad \begin{cases} d\mu\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = \dfrac{\sin(\mu-\nu+\Theta)\tang\Theta}{2\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)}d\mu, \\ d\nu\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = \dfrac{\cos\mu\pm\sin\delta_1\sin(\mu-\nu+\Theta)}{4\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)^2\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)^2}\tang\Theta d\nu, \\ d_{\delta_1}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = \mp\dfrac{\cos\delta_1\cos(\mu-\nu+\Theta)\tang\Theta}{4\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)^2\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)^2}d\delta_1, \\ d\Theta\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = -\dfrac{\cos\mu\pm\sin\delta_1\sin(\mu-\nu+\Theta)}{4\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)^2\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)^2}\tang\Theta d\Theta \\ \qquad -\dfrac{\cos(\mu-\nu+\Theta)\sec\Theta^2}{2\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)}d\Theta; \end{cases}$$

woraus sich leicht

$$20)\quad d\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = d_\mu\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + d_\nu\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + d_{\delta_1}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + d_\Theta\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)$$

ergiebt.

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$21)\quad A = \frac{\sin 2\delta\cos\Theta^2\cot\Theta}{2\sin(\mu-\nu)^2},$$

$$B = \cot(\mu-\nu)\cot\Theta,$$

$$C = \frac{\sin(\mu-\nu+\Theta)\tang\Theta}{2\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)},$$

$$D = \frac{\cos(\mu-\nu+\Theta)\sec\Theta^2}{2\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)},$$

$$E = \frac{\cos\delta_1\cos(\mu-\nu+\Theta)\tang\Theta}{4\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)^2\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)^2},$$

$$F = \frac{\cos u\pm\sin\delta_1\sin(\mu-\nu+\Theta)}{4\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)^2\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)^2}\tang\Theta;$$

so ist

$$d\Theta = Ad\delta - Bd\mu + Bd\nu$$

und

$$d\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = Cd\mu + Fd\nu \mp Ed\delta_1 - (D+F)d\Theta;$$

also

$$d\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = -A(D+F)d\delta \mp Ed\delta_1$$
$$+\{C+B(D+F)\}d\mu + \{F-B(D+F)\}d\nu.$$

Nun kann man aber nach §. 3. offenbar wenigstens mit grosser Annäherung

$$d\mu = d\alpha + d\delta + d\delta_1,\quad d\nu = d\mu + d\lambda - d\delta;$$

also

$$d\mu = d\alpha + d\delta + d\delta_1, \quad d\nu = d\alpha + d\delta_1 + d\lambda$$

setzen. Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$d\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = -A(D+F)d\delta \mp Ed\delta_1$$
$$+\{C+B(D+F)\}(d\alpha+d\delta+d\delta_1)$$
$$+\{F-B(D+F)\}(d\alpha+d\delta_1+d\lambda).$$

d. i., wie man leicht findet:

$$22)\quad d\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = (C+F)d\alpha$$
$$+\{F-B(D+F)\}d\lambda$$
$$+\{C-(A-B)(D+F)\}d\delta$$
$$+(C+F\mp E)d\delta_1.$$

Auch erhält man hieraus leicht

$$23)\quad \frac{d\varrho_1}{\varrho} = \frac{\varrho_1}{\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{\varrho} + (C+F)d\alpha$$
$$+\{F-B(D+F)\}d\lambda$$
$$+\{C-(A-B)(D+F)\}d\delta$$
$$+(C+F\mp E)d\delta_1.$$

In allen vorhergehenden Gleichungen hat man die obern oder untern Zeichen zu nehmen, jenachdem $\sin(\nu-\Theta)$ eine positive oder eine negative Grösse ist.

§. 6.

Wir wollen nun noch in der Kürze zeigen, wie aus der Entfernung eines Weltkörpers W vom Mittelpunkte C der Erde seine Entfernung von einem beliebigen Orte O auf der Oberfläche der Erde, und umgekehrt wie aus der Entfernung eines Weltkörpers W von einem beliebigen Orte auf der Oberfläche der Erde seine Entfernung von dem Mittelpunkte C der Erde gefunden werden kann, wobei wir grösserer Bestimmtheit wegen im Folgenden annehmen werden, dass der Punkt O in der nördlichen Hälfte der Erdoberfläche liege.

Zu dem Ende sei φ die Polhöhe, φ_1 die sogenannte geocentrische Breite des Orts O, und R sei der nach demselben gezogene Erdhalbmesser *). Ferner seien ω, h das sogenannte scheinbare Azimuth und die sogenannte scheinbare Höhe, dagegen ω_1, h_1 das sogenannte wahre Azimuth und die sogenannte wahre Höhe des Weltkörpers W, wobei die Azimuthe von Süden nach Westen von

*) Wie aus der Polhöhe die geocentrische Breite und der Erdhalbmesser gefunden werden können, ist Archiv. Thl. I. S. 177. gezeigt worden.

0 bis 360° gezählt werden sollen. Die Entfernungen des Weltkörpers W von dem Orte O und dem Mittelpunkte C der Erde seien respective Δ und Δ_1.

Durch den Ort O als Anfang legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz. Die Ebene der xz sei die Ebene des Meridians. Der positive Theil der Axe der x sei nach Süden, der positive Theil der Axe der y sei nach Westen, und der positive Theil der Axe der z sei nach dem Zenith gerichtet. Durch den Mittelpunkt C der Erde als Anfang legen wir ein zweites, dem Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x_1y_1z_1$.

Die Coordinaten des Weltkörpers W im Systeme der xyz sind:

$$\Delta \cos \omega \cos h,$$
$$\Delta \sin \omega \cos h,$$
$$\Delta \sin h;$$

und seine Coordinaten im Systeme der $x_1y_1z_1$ sind:

$$\Delta_1 \cos \omega_1 \cos h_1,$$
$$\Delta_1 \sin \omega_1 \cos h_1,$$
$$\Delta_1 \sin h_1.$$

Die Coordinaten des Punktes O in Bezug auf das System der $x_1y_1z_1$ sind aber, wie durch eine leichte geometrische Betrachtung sogleich erhellen wird:

$$R \sin(\varphi - \varphi_1),\ 0,\ R \cos(\varphi - \varphi_1);$$

und nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten haben wir also die drei folgenden Gleichungen:

$$\Delta_1 \cos \omega_1 \cos h_1 = R \sin(\varphi - \varphi_1) + \Delta \cos \omega \cos h,$$
$$\Delta_1 \sin \omega_1 \cos h_1 = \Delta \sin \omega \cos h,$$
$$\Delta_1 \sin h_1 = R \cos(\varphi - \varphi_1) + \Delta \sin h.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen, und addirt dieselben dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$\Delta_1^2 = R^2 + \Delta^2 + 2R\Delta\{\sin h \cos(\varphi - \varphi_1) + \cos \omega \cos h \sin(\varphi - \varphi_1)\},$$

oder, wenn

$$24)\quad \cos \Omega = \sin h \cos(\varphi - \varphi_1) + \cos \omega \cos h \sin(\varphi - \varphi_1)$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$25)\quad \Delta_1^2 = R^2 + \Delta^2 + 2R\Delta \cos \Omega.$$

Sind nun Δ, ω, h, also auch Ω gegeben, so erhält man Δ_1 mittelst der Formel

$$26)\quad \Delta_1 = \sqrt{R^2 + \Delta^2 + 2R\Delta \cos \Omega},$$

die sich bekanntlich auf verschiedene Arten zur logarithmischen Rechnung bequem einrichten lässt.

Sind dagegen Δ_1, ω, h gegeben, so erhält man Δ durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$\Delta^2 + 2R\Delta \cos \Omega = \Delta_1{}^2 - R^2,$$

wodurch sich

$$27)\quad \Delta = -R \cos \Omega \pm \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

ergiebt.

Das Product dieser beiden Werthe von Δ ist $R^2 - \Delta_1{}^2$, und folglich, da im vorliegenden Falle offenbar immer $\Delta_1 > R$ ist, stets negativ. Daher haben die beiden Werthe von Δ jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen. Ist nun $\cos \Omega$ positiv, so ist

$$-R \cos \Omega - \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

offenbar negativ, also

$$-R \cos \Omega + \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

positiv. Ist dagegen $\cos \Omega$ negativ, so ist

$$-R \cos \Omega + \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

offenbar positiv, also

$$-R \cos \Omega - \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

negativ. Daher muss man, weil Δ seiner Natur nach nur positiv sein kann, in der Gleichung 27) immer das obere Zeichen nehmen, und folglich

$$28)\quad \Delta = -R \cos \Omega + \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

oder

$$29)\quad \Delta = -R \cos \Omega + \sqrt{(\Delta_1 + R \sin \Omega)(\Delta_1 - R \sin \Omega)}$$

setzen.

Nimmt man, was in Folge der Gleichung 24) offenbar verstattet ist, den Hülfswinkel Ω stets positiv und nicht grösser als 180°, so ist $\sin \Omega$ immer positiv, und man kann also

$$\Delta = -R \cos \Omega + R \sin \Omega \sqrt{\frac{\Delta_1{}^2}{R^2 \sin \Omega^2} - 1}$$

setzen. Berechnet man nun den Hülfswinkel Φ mittelst der Formel

$$\sec \Phi = \frac{\Delta_1}{R \sin \Omega}$$

oder mittelst der Formel

$$30)\quad \cos \Phi = \frac{R}{\Delta_1} \sin \Omega,$$

und nimmt Φ positiv und nicht grösser als 90°, was wegen des positiven Vorzeichens von $\sin \Omega$ verstattet ist, so ist

$$\Delta = -R \cos \Omega + R \sin \Omega \operatorname{tang} \Phi,$$

also

$$31)\quad \Delta = -R \frac{\cos(\Omega + \Phi)}{\cos \Phi},$$

mittelst welcher Formeln Δ sehr leicht berechnet werden kann.

Wenn die Sternzeit der Beobachtung bekannt ist, und auch die Rectascension des Weltkörpers W als bekannt angenommen wird, so kann man immer das Azimuth aus der Höhe h und der Polhöhe φ leicht berechnen, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

XXXII.

Einige Bemerkungen über die Reduction der Monddistanzen.

Von

dem Herausgeber.

Wir wollen die wahre und scheinbare Höhe des einen Gestirns durch H, H'; die wahre und scheinbare Höhe des anderen Gestirns durch h, h'; die wahre und scheinbare Distanz durch Δ, Δ' bezeichnen. Werden dann ferner die grössten Kreisbogen, welche die Endpunkte der Höhen H, h' und die Endpunkte der Höhen H', h mit einander verbinden, durch D und $\mathfrak{D}$ bezeichnet, so haben wir offenbar die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \frac{\cos \Delta - \sin H \sin h}{\cos H \cos h} = \frac{\cos \Delta' - \sin H' \sin h'}{\cos H' \cos h'}$$
$$= \frac{\cos D - \sin H \sin h'}{\cos H \cos h'} = \frac{\cos \mathfrak{D} - \sin H' \sin h}{\cos H' \cos h}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich sehr leicht:

Digitized by Google

$$2)\quad \begin{cases} \cos H' \cos D - \cos H \cos \Delta' = \sin(H-H') \sin h', \\ \cos h' \cos \Delta - \cos h \cos D = \sin(h-h') \sin H; \end{cases}$$

so wie

$$3)\quad \begin{cases} \cos h' \cos \mathfrak{D} - \cos h \cos \Delta' = \sin(h-h') \sin H', \\ \cos H' \cos \Delta - \cos H \cos \mathfrak{D} = \sin(H-H') \sin h; \end{cases}$$

und wir haben daher zur Berechnung von Δ aus Δ', H, H', h, h' die folgenden Formeln:

$$4)\quad \begin{cases} \cos D = \frac{\cos H}{\cos H'} \cos \Delta' + \frac{\sin h'}{\cos H'} \sin(H-H'), \\ \cos \Delta = \frac{\cos h}{\cos h'} \cos D + \frac{\sin H}{\cos h'} \sin(h-h') \end{cases}$$

und

$$5)\quad \begin{cases} \cos \mathfrak{D} = \frac{\cos h}{\cos h'} \cos \Delta' + \frac{\sin H'}{\cos h'} \sin(h-h'), \\ \cos \Delta = \frac{\cos H}{\cos H'} \cos \mathfrak{D} + \frac{\sin h}{\cos H'} \sin(H-H'); \end{cases}$$

wo D und $\mathfrak{D}$ als Hülfsgrössen zu betrachten sind.

Eliminirt man aus den Gleichungen 2) die Grösse $\cos D$, und aus den Gleichungen 3) die Grösse $\cos \mathfrak{D}$, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$6)\quad \cos H' \cos h' \cos \Delta - \cos H \cos h \cos \Delta' \\ = \sin(H-H') \cos h \sin h' + \sin(h-h') \sin H \cos H'$$

und

$$7)\quad \cos H' \cos h' \cos \Delta - \cos H \cos h \cos \Delta' \\ = \sin(H-H') \sin h \cos h' + \sin(h-h') \cos H \sin H',$$

durch deren Addition sich ferner die Gleichung

$$8)\quad 2(\cos H' \cos h' \cos \Delta - \cos H \cos h \cos \Delta') \\ = \sin(H-H') \sin(h+h') + \sin(H+H') \sin(h-h')$$

oder

$$9)\quad \cos\Delta = \frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'} \cos\Delta' + \frac{\sin(H-H')\sin(h+h') + \sin(H+H')\sin(h-h')}{2\cos H' \cos h'}$$

ergiebt.

Setzt man in den beiden Gleichungen 4)

$$H = H' + (H-H'),\quad h = h' + (h-h');$$

so werden dieselben

$$\cos D = \cos(H-H')\cos\Delta' + \sin(H-H')\frac{\sin h' - \sin H'\cos\Delta'}{\cos H'},$$

$$\cos\Delta = \cos(h-h')\cos D + \sin(h-h')\frac{\sin H - \sin h'\cos D}{\cos h'}$$

oder

$$\begin{aligned}\cos D = & \cos(H-H')\cos\Delta' - \sin(H-H')\sin\Delta' \\ & + \sin(H-H')(\sin\Delta' + \frac{\sin h' - \sin H'\cos\Delta'}{\cos H'}) \\ = & \cos(H-H')\cos\Delta' + \sin(H-H')\sin\Delta' \\ & - \sin(H-H')(\sin\Delta' - \frac{\sin h' - \sin H'\cos\Delta'}{\cos H'}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\Delta = & \cos(h-h')\cos D - \sin(h-h')\sin D \\ & + \sin(h-h')(\sin D + \frac{\sin H - \sin h'\cos D}{\cos h'}) \\ = & \cos(h-h')\cos D + \sin(h-h')\sin D \\ & - \sin(h-h')(\sin D - \frac{\sin H - \sin h'\cos D}{\cos h'});\end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned}\cos D &= \cos(H-H'+\Delta') + \sin(H-H')\frac{\sin h' - \sin(H'-\Delta')}{\cos H'} \\ &= \cos(H-H'-\Delta') + \sin(H-H')\frac{\sin h' - \sin(H'+\Delta')}{\cos H'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \cos(h-h'+D) + \sin(h-h')\frac{\sin H - \sin(h'-D)}{\cos h'} \\ &= \cos(h-h'-D) + \sin(h-h')\frac{\sin H - \sin(h'+D)}{\cos h'};\end{aligned}$$

also nach einer bekannten Zerlegung:

$$10)\quad \cos D =$$

$$\cos(H-H'+\Delta') + 2\sin(H-H')\frac{\sin\tfrac{1}{2}(h'-H'+\Delta')\cos\tfrac{1}{2}(h'+H'-\Delta')}{\cos H'}$$

$$= \cos(H-H'-\Delta') + 2\sin(H-H')\frac{\sin\tfrac{1}{2}(h'-H'-\Delta')\cos\tfrac{1}{2}(h'+H'+\Delta')}{\cos H'},$$

$$\cos\Delta =$$

$$\cos(h-h'+D) + 2\sin(h-h')\frac{\sin\tfrac{1}{2}(H-h'+D)\cos\tfrac{1}{2}(H+h'-D)}{\cos h'}$$

$$= \cos(h-h'-D) + 2\sin(h-h')\frac{\sin\tfrac{1}{2}(H-h'-D)\cos\tfrac{1}{2}(H+h'+D)}{\cos h'}.$$

Bezeichnen wir die kleinen Veränderungen, welche

$$\cos(H-H'+\Delta'),\ \cos(H-H'-\Delta')$$

Digitized by Google

erleiden müssen, um in cos D überzugehen, durch

$$d\cos(H-H'+\Delta'),\ d\cos(H-H'-\Delta');$$

die kleinen Veränderungen, welche

$$\cos(h-h'+D),\ \cos(h-h'-D)$$

erleiden müssen, um in cos Δ überzugehen, durch

$$d\cos(h-h'+D),\ d\cos(h-h'-D);$$

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$11)\quad d\cos(H-H'+\Delta')=2\sin(H-H')\frac{\sin\frac{1}{2}(h'-H'+\Delta')\cos\frac{1}{2}(h'+H'-\Delta')}{\cos H'},$$

$$d\cos(H-H'-\Delta')=2\sin(H-H')\frac{\sin\frac{1}{2}(h'-H'-\Delta')\cos\frac{1}{2}(h'+H'+\Delta')}{\cos H'},$$

$$d\cos(h-h'+D)=2\sin(h-h')\frac{\sin\frac{1}{2}(H-h'+D)\cos\frac{1}{2}(H+h'-D)}{\cos h'},$$

$$d\cos(h-h'-D)=2\sin(h-h')\frac{\sin\frac{1}{2}(H-h'-D)\cos\frac{1}{2}(H+h'+D)}{\cos h'};$$

und da sich diese kleinen Veränderungen mittelst der vnrstehenden Formeln immer leicht finden lassen, so wird man mit Hülfe der Tafeln auch immer die kleinen Veränderungen leicht finden können, welche

$$H-H'+\Delta',\ H-H'-\Delta'$$

erleiden müssen, um in D, und welche

$$h-h'+D,\ h-h'-D$$

erleiden müssen, um in Δ überzugehen, wird also auf diese Weise immer Δ ohne Schwierigkeit zu berechnen im Stande sein.

Setzen wir

$$\begin{aligned}\cos D &= \cos\{H-H'+\Delta'+d(H-H'+\Delta')\}\\ &= \cos\{H-H'-\Delta'+d(H-H'-\Delta')\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \cos\{h-h'+D+d(h-h'+D)\}\\ &= \cos\{h-h'-D+d(h-h'-D)\};\end{aligned}$$

so ist nach den Principien der Differentialrechnung bekanntlich näherungsweise

$$\begin{aligned}\cos D &= \cos(H-H'+\Delta')-\sin(H-H'+\Delta')d(H-H'+\Delta')\\ &= \cos(H-H'-\Delta')-\sin(H-H'-\Delta')d(H-H'-\Delta'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \cos(h-h'+D)-\sin(h-h'+D)d(h-h'+D)\\ &= \cos(h-h'-D)-\sin(h-h'-D)d(h-h'-D);\end{aligned}$$

Digitized by Google

und zur Bestimmung von

$$d(H-H'+\Delta'),\ d(H-H'-\Delta')$$

und

$$d(h-h'+D),\ d(h-h'-D)$$

hat man also nach 11) offenbar die folgenden Näherungsformeln:

$$12)\quad d(H-H'+\Delta')=-2\sin(H-H')\frac{\sin\frac{1}{2}(h'-H'+\Delta')\cos\frac{1}{2}(h'+H'-\Delta')}{\cos H'\sin(H-H'+\Delta')},$$

$$d(H-H'-\Delta')=-2\sin(H-H')\frac{\sin\frac{1}{2}(h'-H'-\Delta')\cos\frac{1}{2}(h'+H'+\Delta')}{\cos H'\sin(H-H'-\Delta')},$$

$$d(h-h'+D)=-2\sin(h-h')\frac{\sin\frac{1}{2}(H-h'+D)\cos\frac{1}{2}(H+h'-D)}{\cos h'\sin(h-h'+D)},$$

$$d(h-h'-D)=-2\sin(h-h')\frac{\sin\frac{1}{2}(H-h'-D)\cos\frac{1}{2}(H+h'+D)}{\cos h'\sin(h-h'-D)},$$

Wie man diese in Theilen des der Einheit gleichen Halbmessers ausgedrückten Veränderungen auf die einfachste und zweckmässigste Weise in Secunden zu verwandeln hat, kann hier füglich als bekannt vorausgesetzt werden, so wie es an diesem Orte überhaupt unnöthig scheint, in weiteres Detail über die beste Art der Anwendung der obigen Formeln einzugehen.

Dass man übrigens auch aus den beiden Gleichungen 5) ganz ähnliche Formeln ableiten könnte, fällt auf der Stelle in die Augen.

Digitized by Google

XXXIII.

Einige Bemerkungen über die Gleichungen des dritten Grades.

Nach einer Abhandlung des Herrn Professor R. Lobatto zu Delft in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. Mai 1844. p. 177. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

In dieser Abhandlung des Herrn Professor Lobatto kommen ausser anderen interessanten Sätzen einige bemerkenswerthe Formeln vor, durch welche zwei Wurzeln einer cubischen Gleichung durch die dritte ausgedrückt werden. Diese Formeln werde ich im Folgenden mittheilen.

Die gegebene cubische Gleichung sei

$$1)\quad x^3 - px + q = 0.$$

Wenn nun

$$2)\quad \begin{cases} y = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}\right)}, \\ z = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}\right)} \end{cases}$$

gesetzt wird, wo die Grössen y und z bekanntlich immer den Gleichungen

$$3)\quad 3yz = p,\ y^3 + z^3 = -q$$

genügen, und ausserdem offenbar

$$4)\quad y^3 - z^3 = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}$$

ist; so ist bekanntlich nach der Cardanischen Formel immer

$$5)\quad u = y + z$$

eine Wurzel der gegebenen cubischen Gleichung, und die beiden anderen Wurzeln u_1 und u_2 derselben erhält man aus den Gleichungen

$$6)\quad u + u_1 + u_2 = 0,\ uu_1u_2 = -q$$

oder

$$7)\quad u_1 + u_2 = -u,\quad u_1 u_2 = -\frac{q}{u}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$(u_1 + u_2)^2 - 4u_1 u_2 = u^2 + \frac{4q}{u},$$

d. i.

$$(u_1 - u_2)^2 = u^2 + \frac{4q}{u},$$

und folglich

$$u_1 - u_2 = \pm\sqrt{\frac{u^3 + 4q}{u}}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der ersten der beiden Gleichungen 7), so erhält man

$$u_1 = -\tfrac{1}{2}u \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3 + 4q}{u}},$$

$$u_2 = -\tfrac{1}{2}u \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3 + 4q}{u}};$$

und kann also immer

$$8)\quad \begin{cases} u_1 = -\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3 + 4q}{u}}, \\ u_2 = -\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3 + 4q}{u}} \end{cases}$$

setzen.

Weil aber u eine Wurzel der gegebenen Gleichung und folglich

$$u^3 - pu + q = 0$$

ist, so ist

$$u^3 + 4q = pu + 3q = 4pu - 3u^3;$$

also

$$9)\quad \begin{cases} u_1 = -\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\sqrt{p + \frac{3q}{u}} = -\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\sqrt{4p - 3u^2}, \\ u_2 = -\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\sqrt{p + \frac{3q}{u}} = -\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\sqrt{4p - 3u^2}. \end{cases}$$

Nach 3) und 5) ist

$$4p - 3u^2 = 12yz - 3(y + z)^2 = -3(y - z)^2,$$

also

$$\sqrt{4p - 3u^2} = (y - z)\sqrt{-3},$$

und folglich

$$10)\quad \begin{cases} u_1 = -\tfrac{1}{2}\{u - (y-z)\sqrt{-3}\}, \\ u_2 = -\tfrac{1}{2}\{u + (y-z)\sqrt{-3}\}; \end{cases}$$

oder

$$11)\quad \begin{cases} u_1 = -\tfrac{1}{2}\{y + z - (y-z)\sqrt{-3}\}, \\ u_2 = -\tfrac{1}{2}\{y + z + (y-z)\sqrt{-3}\}. \end{cases}$$

Weil, wie man durch Division leicht findet,

$$\frac{y^3 - z^3}{y - z} = y^2 + yz + z^2,$$

$$\frac{y^3 + z^3}{y + z} = y^2 - yz + z^2$$

ist, so ist

$$\frac{y^3 - z^3}{y - z} = \frac{y^3 + z^3}{y + z} + 2yz,$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{2\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}{y - z} = -\frac{q}{u} + \frac{2p}{3} = \frac{2pu - 3q}{3u},$$

also

$$y - z = \frac{6u\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}{2pu - 3q} = \frac{3u\sqrt{q^2 - \tfrac{4}{27}p^3}}{2pu - 3q}.$$

Führt man diesen Werth von $y - z$ in die Gleichungen 10) ein, so erhält man:

$$12)\quad \begin{cases} u_1 = -\tfrac{1}{2}u - \dfrac{u\sqrt{p^3 - \tfrac{27}{4}q^2}}{3q - 2pu}, \\[2ex] u_2 = -\tfrac{1}{2}u + \dfrac{u\sqrt{p^3 - \tfrac{27}{4}q^2}}{3q - 2pu}. \end{cases}$$

Diese Formeln *) sind nach Herrn Lobatto's Angabe von Young in dem Buche: The Analysis and solution of cubic and biquadratic equations. London. 1842. zuerst bekannt gemacht worden.

Um ein Beispiel zu geben, sei

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

die gegebene cubische Gleichung, so ist $p = 7$, $q = 7$, also

$$\sqrt{p^3 - \tfrac{27}{4}q^2} = \sqrt{343 - 330{,}75} = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5;$$

*) In der Abhandlung des Herrn Lobatto sind die Formeln von Druckfehlern nicht ganz frei.

und folglich sind

$$u_1 = -\tfrac{1}{2}u - \frac{3{,}5u}{21-14u} = -\tfrac{1}{2}u - \frac{u}{6-4u},$$

$$u_2 = -\tfrac{1}{2}u + \frac{3{,}5u}{21-14u} = -\tfrac{1}{2}u + \frac{u}{6-4u}$$

oder

$$u_1 = -\frac{2-u}{3-2u}u,\quad u_2 = -\frac{1-u}{3-2u}u$$

zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn u eine Wurzel derselben ist.

Ein anderer englischer Mathematiker, Herr Lockhart, hat von den vorhergehenden verschiedene Ausdrücke zweier Wurzeln einer cubischen Gleichung durch die dritte gegeben, welche im Allgemeinen von der Form

$$\frac{\alpha u + \beta}{\alpha_1 u + \beta_1}$$

sind. Zu diesen bemerkenswerthen Ausdrücken gelangt Herr Lobatto im Wesentlichen auf folgende Weise.

Für $r = \sqrt{p^3 - \frac{27}{4}q^2}$ sei überhaupt

$$13)\quad -\tfrac{1}{2}x \mp \frac{rx}{3q-2px} = \frac{ax+b}{x+c},$$

so erhält man, wenn der Kürze wegen $2a + c = a_1$ gesetzt wird, nach gehöriger Entwickelung dieser Gleichung die Gleichung:

$$14)\quad \left.\begin{array}{l} x^3 + \left(a_1 - \frac{3q \pm 2r}{2p}\right)x^2 \\ \quad + \left(2b - \frac{3qa_1 \pm 2rc}{2p}\right)x \\ \quad - \frac{3qb}{p} \end{array}\right\} = 0.$$

Soll nun diese Gleichung mit der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

identisch sein, so müssen die Grössen a_1, b, c so bestimmt werden, dass sie den drei Gleichungen

$$a_1 - \frac{3q \pm 2r}{2p} = 0,\quad 2b - \frac{3qa_1 \pm 2rc}{2p} = -p,\quad \frac{3qb}{p} = -q$$

genügen.

Aus der ersten und dritten Gleichung ergiebt sich auf der Stelle

$$a_1 = \frac{3q \pm 2r}{2p},\quad b = -\tfrac{1}{3}p.$$

Führt man diese Werthe von a_1 und b in die zweite Gleichung ein, so erhält man

$$4prc + 3q(2r \pm 3q) \mp \tfrac{4}{3}p^3 = 0.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$p^3 - \tfrac{27}{4}q^2 = r^2, \text{ also } 4p^3 = 27q^2 + 4r^2$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$6pc + 9q \mp 2r = 0,$$

also

$$c = -\frac{9q \mp 2r}{6p}.$$

Ferner ist

$$2a = a_1 - c = \frac{3q \pm 2r}{2p} + \frac{9q \mp 2r}{6p} = \frac{9q \pm 2r}{3p},$$

also

$$a = \frac{9q \pm 2r}{6p}.$$

Hieraus sieht man, dass, wenn

$$a = \frac{9q \pm 2r}{6p},\ b = -\tfrac{1}{3}p,\ c = -\frac{9q \mp 2r}{6p}$$

ist, jeder Werth von x, welcher der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

genügt, immer auch der Gleichung

$$-\tfrac{1}{3}x \mp \frac{rx}{3q - 2px} = \frac{ax + b}{x + c}$$

genügt. Da nun nach dem Obigen u eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

ist, so ist auch

$$-\tfrac{1}{3}u \mp \frac{ru}{3q - 2pu} = \frac{au + b}{u + c},$$

und weil nach dem Obigen

$$-\tfrac{1}{3}u \mp \frac{ru}{3q - 2pu}$$

jederzeit Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

sind, so sind auch die beiden Werthe von

$$\frac{au+b}{u+c},$$

welche dieser Bruch erhält, wenn man in ihn die beiden obigen Systeme von Werthen der Grössen a, b, c einführt, Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung. Also kann man die drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3-px+q=0,$$

wie man mittelst des Vorhergehenden leicht findet, immer auch auf folgende Art ausdrücken:

$$15)\quad\begin{cases} u, \\ u_1=\dfrac{(9q+2r)u-2p^2}{6pu-(9q-2r)}, \\ u_2=\dfrac{(9q-2r)u-2p^2}{6pu-(9q+2r)}. \end{cases}$$

Dies sind nach Herrn **Lobatto** die von Herrn **Lockhart** gegebenen Formeln.

Ist $x^3-19x-30=0$ die gegebene cubische Gleichung, so ist $p=19$, $q=-30$, also

$$p^3=6859,\ \tfrac{27}{4}q^2=6075,\ r=\sqrt{784}=28;$$

folglich

$$9q+2r=-214,\ 9q-2r=-326.$$

Also ist in diesem Falle

$$u_1=-\frac{107u+361}{57u+163},\ u_2=-\frac{163u+361}{57u+107}.$$

Den übrigen bemerkenswerthen Inhalt der Abhandlung des Herrn **Lobatto**, welcher vorzüglich die Entwickelung der Wurzeln in Kettenbrüche betrifft, für den Elementarunterricht aber von geringerem Interesse ist, muss man in ihr selbst nachsehen.

Nachschrift.

Das Vorhergehende ruft mir eine schon vor längerer Zeit von mir gefundene goniometrische Transformation einer jeden cubischen Gleichung in's Gedächtniss zurück, die zwar, wenigstens in der Form, in welcher ich sie jetzt zu geben im Stande bin, für die Auflösung der cubischen Gleichungen selbst nicht von besonderer

Bedeutung, dessenungeachtet aber in mehrfacher Beziehung interessant zu sein scheint. Diese Transformation werde ich im Folgenden vorzüglich deshalb mittheilen, weil dadurch vielleicht der eine oder der andere Leser zu weiteren Untersuchungen über diesen Gegenstand, zu denen mir selbst jetzt Zeit und Musse fehlen, veranlasst werden dürfte.

Die gegebene cubische Gleichung sei überhaupt

$$1)\quad x^3-mx^2+nx-k=0.$$

Sind nun

$$\operatorname{tang}\Theta,\ \operatorname{tang}\Theta_1,\ \operatorname{tang}\Theta_2,$$

wo die Bogen Θ, Θ_1, Θ_2 auch imaginär sein können, ihre drei Wurzeln, so hat man bekanntlich die drei folgenden Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\Theta+\operatorname{tang}\Theta_1+\operatorname{tang}\Theta_2=m,\\ \left.\begin{array}{l}\operatorname{tang}\Theta\operatorname{tang}\Theta_1\\ +\operatorname{tang}\Theta\operatorname{tang}\Theta_2\\ +\operatorname{tang}\Theta_1\operatorname{tang}\Theta_2\end{array}\right\}=n,\\ \operatorname{tang}\Theta\operatorname{tang}\Theta_1\operatorname{tang}\Theta_2=k.\end{cases}$$

Weil nun nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$\operatorname{tang}(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)$$

$$=\frac{\operatorname{tang}\Theta+\operatorname{tang}\Theta_1+\operatorname{tang}\Theta_2-\operatorname{tang}\Theta\operatorname{tang}\Theta_1\operatorname{tang}\Theta_2}{1-\operatorname{tang}\Theta\operatorname{tang}\Theta_1-\operatorname{tang}\Theta\operatorname{tang}\Theta_2-\operatorname{tang}\Theta_1\operatorname{tang}\Theta_2}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$3)\quad \operatorname{tang}(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)=\frac{m-k}{1-n},$$

mittelst welcher Formel die reelle Summe $\Theta+\Theta_1+\Theta_2$ immer bestimmt werden kann.

Ferner ist

$$1-n$$

$$=1-\operatorname{tang}\Theta\operatorname{tang}\Theta_1-\operatorname{tang}\Theta\operatorname{tang}\Theta_2-\operatorname{tang}\Theta_1\operatorname{tang}\Theta_2$$

$$=\frac{\cos(\Theta+\Theta_1)}{\cos\Theta\cos\Theta_1}-\frac{\sin(\Theta+\Theta_1)}{\cos\Theta\cos\Theta_1}\operatorname{tang}\Theta_2$$

$$=\frac{\cos(\Theta+\Theta_1)\cos\Theta_2-\sin(\Theta+\Theta_1)\sin\Theta_2}{\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2}$$

$$=\frac{\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2},$$

und folglich nach 2) und 3):

$$4)\quad\begin{cases}\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2=\dfrac{\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n}=\dfrac{\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k},\\[2ex] \sin\Theta\sin\Theta_1\sin\Theta_2=\dfrac{k\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n}=\dfrac{k\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k};\end{cases}$$

so dass man also jetzt zur Bestimmung der Grössen Θ, Θ_1, Θ_2 überhaupt die drei folgenden Gleichungen hat:

$$5)\quad\begin{cases}\operatorname{tang}(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)=\dfrac{m-k}{1-n},\\[2ex] \cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2=\dfrac{\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n}=\dfrac{\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k},\\[2ex] \sin\Theta\sin\Theta_1\sin\Theta_2=\dfrac{k\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n}=\dfrac{k\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k}.\end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt nun

$$\cos\Theta_1\cos\Theta_2=\frac{\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{(1-n)\cos\Theta}=\frac{\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{(m-k)\cos\Theta},$$

$$\sin\Theta_1\sin\Theta_2=\frac{k\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{(1-n)\sin\Theta}=\frac{k\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{(m-k)\sin\Theta};$$

also durch Subtraction und Addition:

$$6)\quad\cos(\Theta_1\pm\Theta_2)=\frac{\sin\Theta\mp k\cos\Theta}{(1-n)\sin\Theta\cos\Theta}\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)$$

$$=\frac{\sin\Theta\mp k\cos\Theta}{(m-k)\sin\Theta\cos\Theta}\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2),$$

mittelst welcher Formeln, da man die Summe $\Theta+\Theta_1+\Theta_2$ nach dem Vorhergehenden als bekannt vorauszusetzen berechtigt ist, $\Theta_1+\Theta_2$ und $\Theta_1-\Theta_2$, also auch

$$\Theta_1=\tfrac{1}{2}(\Theta_1+\Theta_2)+\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2),$$

$$\Theta_2=\tfrac{1}{2}(\Theta_1+\Theta_2)-\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)$$

gefunden werden können, wenn man Θ kennt, so dass also auch auf diese Weise aus jeder Wurzel einer cubischen Gleichung die beiden anderen gefunden werden können.

Aus dem Obigen ergiebt sich auch leicht, dass, wenn der absolute Werth einer der beiden Grössen

$$\frac{\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n}=\frac{\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k},$$

$$\frac{k\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n}=\frac{k\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k}$$

grösser als die Einheit ist, immer sicher geschlossen werden kann, dass die Gleichung 1) nicht drei reelle Wurzeln haben kann, und also eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln haben muss.

Die Gleichungen 2) können auch auf folgende Form gebracht werden:

$$\sin\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2+\cos\Theta\sin\Theta_1\cos\Theta_2+\cos\Theta\cos\Theta_1\sin\Theta_2$$
$$=m\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2,$$
$$\sin\Theta\sin\Theta_1\cos\Theta_2+\sin\Theta\cos\Theta_1\sin\Theta_2+\cos\Theta\sin\Theta_1\sin\Theta_2$$
$$=n\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2,$$
$$\sin\Theta\sin\Theta_1\sin\Theta_2=k\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2.$$

Durch leichte goniometrische Rechnung findet man aber überhaupt:

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$=-\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma),$$
$$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma),$$
$$4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$=\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma),$$
$$4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$
$$=-\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma).$$

Wenden wir diese Relationen auf die drei obigen Gleichungen an, so erhalten wir:

$$\sin(-\Theta+\Theta_1+\Theta_2)+\sin(\Theta-\Theta_1+\Theta_2)+\sin(\Theta+\Theta_1-\Theta_2)$$
$$=4m\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2-3\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)$$
$$=(m+3k)\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2,$$

$$\cos(-\Theta+\Theta_1+\Theta_2)+\cos(\Theta-\Theta_1+\Theta_2)+\cos(\Theta+\Theta_1-\Theta_2)$$
$$=4n\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2+3\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)$$
$$=(n+3)\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2,$$

$$\sin(-\Theta+\Theta_1+\Theta_2)+\sin(\Theta-\Theta_1+\Theta_2)+\sin(\Theta+\Theta_1-\Theta_2)$$
$$-k\{\cos(-\Theta+\Theta_1+\Theta_2)+\cos(\Theta-\Theta_1+\Theta_2)+\cos(\Theta+\Theta_1-\Theta_2)\}$$
$$=\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)+k\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)$$
$$=(m-kn)\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2;$$

wobei sogleich in die Augen fällt, dass die dritte Gleichung eine unmittelbare Folge aus den beiden ersten ist.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$7)\quad\left\{\begin{array}{l}\Theta+\Theta_1+\Theta_2=\sigma,\\ -\Theta+\Theta_1+\Theta_2=\varphi,\\ \Theta-\Theta_1+\Theta_2=\varphi_1,\\ \Theta+\Theta_1-\Theta_2=\varphi_2,\\ (m+3k)\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2=\mu,\\ (n+3)\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2=\nu;\end{array}\right.$$

wo nach dem Vorhergehenden σ, μ, ν bekannte Grössen sind; so ist

$$\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 = \sigma$$

und nach dem Obigen hat man also zur Bestimmung von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ die drei folgenden Gleichungen:

$$8)\quad \begin{cases} \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 = \sigma, \\ \sin\varphi + \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 = \mu, \\ \cos\varphi + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 = \nu. \end{cases}$$

Aus $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ ergeben sich aber leicht $\Theta, \Theta_1, \Theta_2$, weil nach dem Obigen

$$9)\quad \Theta = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2),\ \Theta_1 = \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi),\ \Theta_2 = \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$$

ist.

Aus den Gleichungen

$$\sin\varphi + \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 = \mu,$$
$$\cos\varphi + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 = \nu$$

folgt nach bekannten goniometrischen Sätzen

$$\sin\varphi + 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \mu,$$
$$\cos\varphi + 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \nu$$

oder

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \mu - \sin\varphi,$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \nu - \cos\varphi;$$

folglich

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\mu - \sin\varphi}{\nu - \cos\varphi};$$

also wegen der ersten der Gleichungen 8):

$$10)\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma - \varphi) = \frac{\mu - \sin\varphi}{\nu - \cos\varphi},$$

mittelst welcher Gleichung φ bestimmt werden muss. Hat man aber φ, so hat man auch $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$ durch die Gleichungen

$$11)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \tfrac{1}{2}(\sigma - \varphi), \\ \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{\mu - \sin\varphi}{2\sin\frac{1}{2}(\sigma - \varphi)} = \dfrac{\nu - \cos\varphi}{2\cos\frac{1}{2}(\sigma - \varphi)}; \end{cases}$$

woraus sich dann auch φ_1 und φ_2 mittelst der Formeln

$$12)\quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases}$$

ergeben.

Weil

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\sigma - \varphi) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\sigma - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\sigma \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}$$

und

$$\sin \varphi = \frac{2\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi^2}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi^2}$$

ist, so wird die Gleichung 10):

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\sigma - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\sigma \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi} = \frac{\mu - 2\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi + \mu \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi^2}{\nu - 1 + (\nu + 1) \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi^2},$$

woraus man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung

$$\begin{aligned} 13)\quad 0 = \; & (\mu \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\sigma + \nu + 1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi^3 \\ & + \{\mu - (\nu + 3) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\sigma\} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi^2 \\ & + (\mu \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\sigma + \nu - 3) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi \\ & + \mu - (\nu - 1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\sigma \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 14)\quad 0 = \; & \{\mu \sin \tfrac{1}{2}\sigma + (\nu + 1) \cos \tfrac{1}{2}\sigma\} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi^3 \\ & + \{\mu \cos \tfrac{1}{2}\sigma - (\nu + 3) \sin \tfrac{1}{2}\sigma\} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi^2 \\ & + \{\mu \sin \tfrac{1}{2}\sigma + (\nu - 3) \cos \tfrac{1}{2}\sigma\} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi \\ & + \{\mu \cos \tfrac{1}{2}\sigma - (\nu - 1) \sin \tfrac{1}{2}\sigma\} \end{aligned}$$

erhält, welche wegen ihrer Symmetrie wohl einige Aufmerksamkeit zu verdienen scheint.

Digitized by Google

XXXIV.

Etwas über das Viereck im Kreise.

Von

dem Herausgeber.

In Taf. V. Fig. 1. sei $ABCD$ ein Viereck im Kreise, dessen gegenüberstehende Seiten bis zu ihren Durchschnittspunkten E und F verlängert worden sind. Zieht man hierauf die Diagonalen AB und CD, so wie die Linie EF. und bezeichnet die Winkel BCD, ACD, CEF, CFE, AEC, BFC respective durch α, β, φ, ψ, φ_1, ψ_1; so hat man, weil $A+B=180°$ ist, die Proportionen:

$$CE:AC=\sin A:\sin\varphi_1,$$
$$CF:BC=\sin A:\sin\psi_1;$$

also

$$\frac{CE}{CF}:\frac{AC}{BC}=1:\frac{\sin\varphi_1}{\sin\psi_1}=1:\frac{\sin(A+\alpha+\beta)}{\sin(A-\alpha-\beta)}.$$

Nun ist aber, wie leicht erhellet:

$$CE:CF=\sin\psi:\sin\varphi,$$
$$AC:BC=\sin(B-\beta):\sin(A-\alpha)=\sin(A+\beta):\sin(A-\alpha);$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}:\frac{\sin(A+\beta)}{\sin(A-\alpha)}=1:\frac{\sin(A+\alpha+\beta)}{\sin(A-\alpha-\beta)},$$

und folglich

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{\sin(A-\alpha)\,\sin(A+\alpha+\beta)}{\sin(A+\beta)\,\sin(A-\alpha-\beta)}$$

oder

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{\cos(2\alpha+\beta)-\cos(2A+\beta)}{\cos(2\beta+\alpha)-\cos(2A-\alpha)},$$

woraus sich leicht

Digitized by Google

$$\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi}$$

$$=\frac{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\beta+\alpha)-\cos(2A-\alpha)-\cos(2A+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)-\cos(2\beta+\alpha)+\cos(2A-\alpha)-\cos(2A+\beta)}$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$$

$$=-\frac{\cos\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos\{2A-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\sin\{2A-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

ergiebt.

Es ist aber $\frac{1}{2}(\varphi+\psi)=90^\circ-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, also $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\psi)=\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$$

$$=-\frac{\cos\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos\{2A-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\sin\{2A-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta);$$

also, weil

$$2\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\sin 2(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta),$$
$$2\sin\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\sin 2(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)$$

und

$$\sin 2(\alpha+\beta)=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta),$$
$$\sin(\alpha+\beta)=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

ist:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$$

$$=-\frac{\{2\cos(\alpha+\beta)-1\}\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos\{2A-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}}{\{2\cos(\alpha+\beta)+1\}\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\sin\{2A-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}},$$

oder, weil

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)+\cos\{2A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}=\quad 2\cos A\cos\{A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\},$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)-\sin\{2A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}=-2\cos A\sin\{A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}$$

ist:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)=-\frac{\cos(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos A\cos\{A-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}}{\cos(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos A\sin\{A-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}}.$$

Leicht bringt man diese Gleichung auch auf die folgende Form:

$$\cos(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)\}=\cos A\sin\{A-\tfrac{1}{2}[(\alpha-\beta)-(\varphi-\psi)]\}$$

oder

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\{(\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)\}}{\sin\{A-\frac{1}{2}[(\alpha-\beta)-(\varphi-\psi)]\}}=\frac{\cos A}{\cos(\alpha+\beta)},$$

woraus sich

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)\}+\sin\{A-\tfrac{1}{2}[(\alpha-\beta)-(\varphi-\psi)]\}}{\sin \tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)\}-\sin\{A-\tfrac{1}{2}[(\alpha-\beta)-(\varphi-\psi)]\}}$$

$$=\frac{\cos A+\cos(\alpha+\beta)}{\cos A-\cos(\alpha+\beta)},$$

also

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\{A+(\varphi-\psi)\} \cot \tfrac{1}{2}\{A-(\alpha-\beta)\}$$

$$=-\cot \tfrac{1}{2}\{A+(\alpha+\beta)\} \cot \tfrac{1}{2}\{A-(\alpha+\beta)\},$$

und folglich

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\{A+(\varphi-\psi)\}$$

$$=-\cot \tfrac{1}{2}\{A+(\alpha+\beta)\} \cot \tfrac{1}{2}\{A-(\alpha+\beta)\} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\{A-(\alpha-\beta)\}$$

ergiebt.

Wenn $A=90^\circ$, und folglich $B=90^\circ$, d. h. wenn die Diagonale *CD* des Vierecks *ABCD* eiu Durchmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises ist, so ist $\cos A=0$, und folglich nach dem Obigen $\cot \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)=-\cot \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\cot \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)$, also $\varphi-\psi=\beta-\alpha$. Weil nun $\varphi+\psi=180^\circ-(\alpha+\beta)$ ist, so ist $\varphi=90^\circ-\alpha$, $\psi=90^\circ-\beta$, und die Linie *EF* steht also auf der gehörig verlängerten Dingonnle *CD* seukrecht, woraus sicb der folgende Satz ergiebt:

Die gerade Linie, welche die Durschnittspunkte der gegenüberstehenden Seiten eines in einen Kreis beschriebenen Vierecks, dessen eine Dingonale ein Durchmesser des Kreises ist, mit einander verbindet, steht immer auf dieser gehörig verlängerten Diagonale senkrecht.

Eine zweckmässige Uebung für Schüler wird es sein, einen rein-geometrischen Beweis dieses Satzes zu suchen.

XXXV.
Eine geometrische Aufgabe.

Aus J. F. Pfaff's nachgelassenen Papieren mitgetheilt

von

dem Herausgeber.

Weil es in vielfacher Beziehung interessant ist, die Arbeiten grosser Männer in ihrer ursprünglichen Gestalt kennen zu lernen, so werde ich, wo es mir thunlich zu sein scheint, hin und wieder einige Aufsätze J. F. Pfaff's in unveränderter Form in dem Archive mittheilen, wobei ich bemerke, dass in den von diesem grossen Mathematiker nachgelassenen Heften, in welchen er seine Ideen niederzulegen pflegte, fortwährend deutsche, lateinische und französische Aufsätze mit einander abwechseln. Ich wähle diesmal absichtlich einen französisch geschriebenen Aufsatz über eine ganz elementare geometrische Aufgabe, und ersuche die Leser nur, nicht unbeachtet zu lassen, dass alle diese Aufsätze ursprünglich keineswegs für den Druck bestimmt waren, da Pfaff wohl niemals an deren Veröffentlichung dachte, indem es ganz in seinem trefflichen, höchst anspruchslosen Charakter begründet war, den Genuss lediglich in der Arbeit selbst zu finden, und nach Beendigung einer Arbeit gleich wieder zu einer neuen überzugehen, ohne sich um eine besondere Ausfeilung der beendigten Arbeiten weiter zu bekümmern. Ein Facsimile seiner Handschrift soll vielleicht später einmal gegeben werden.

Problème.

Soient données deux chordes AB, DE (Tab. V. Fig. 2.); l'angle qu'elles font entre eux (étant prolongées) en F; et la distance de leurs milieux ab. Il faut trouver le cercle des deux chordes.

I. Première solution géométrique.

Analyse géométrique.

Soit C le centre du cercle en question: les droites Ca, Cb seront perpendiculaires aux chordes AB, DE. Donc dans le quadrilatère $aCbF$, la somme des 4 angles étant $=4$ droits, les angles C et F ensemble feront deux droits. Donc l'angle C est

donné. D'où il suit, que le lieu géométrique du point C est la circonférence d'un segment donné, parce que la base ab et l'angle C de ce segment sont donnés.

Qu'on mène Ce perpendiculaire à ab, on aura

$$ae^2 - be^2 = Ca^2 - Cb^2;$$

mais

$$Aa^2 + Ca^2 = AC^2 = CD^2 = Db^2 + Cb^2;$$

donc

$$Ca^2 - Cb^2 = Db^2 - Aa^2;$$

donc

$$ae^2 - be^2 = Db^2 - Aa^2.$$

Que la droite ab soit coupée en deux segmens égaux en f, on a

$$ae^2 - be^2 = (ae - be)(ae + be) = 2ab \, . fe = Db^2 - Aa^2.$$

Donc la droite fe et le point e sont donnés. En tirant donc par e la perpendiculaire eC, le centre C sera dans cette perpendiculaire, et comme il est situé aussi dans un segment donné, ce centre lui même sera donné.

Construction.

Décrivez sur la droite donnée ab un segment, dont l'angle C soit $180° - F$ (d'après la solution connue d'Euclide. Livr. III. Prop. 33,). Cherchez à

$$2ab : Db + Aa = Db - Aa (: x)$$

la quatrième proportionelle, et faites la $= fe$, f étant le milieu de ab. Par e élevez eC perpendiculaire à ab, le point où celle-ci coupera le segment construit sera le centre du cercle en question. Ce centre étant trouvé, tout le reste s'en suit immédiatement. Car menant $Aa = \frac{1}{2}AB$, $Db = \frac{1}{2}DE$ perpendiculaires à Ca et Cb, on a les points A, D, etc. etc.

II. Seconde solution géométrique.

L'angle F et la droite ab étant données, le lieu géométrique du point F est un segment donné. Or on a

$$FA \, . \, FB = FD \, . \, FE,$$

donc

$$(Fa - Aa)(Fa + Aa) = (Fb - Db)(Fb + Db),$$

c'est-à-dire

$$Fa^2 - Aa^2 = Fb^2 - Db^2,$$
$$Fb^2 - Fa^2 = Db^2 - Aa^2.$$

Digitized by Google

Qu'on abaisse de F sur ab la perpendiculaire Fg, on aura

$$Fb^2 - Fa^2 = bg^2 - ag^2 = (bg + ag)(bg - ag) = 2ab.fg.$$

Donc on a

$$Db^2 - Aa^2 = (Db - Aa)(Db + Aa) = 2ab.fg,$$

d'où on parvient à une construction tout à fait semblable à la précédente, en décrivant le segment de l'autre coté de ab, qui appartient pourtant au même cercle.

III. Troisième solution algébrique trigonométrique.

Soit $AB = 2a$, $DE = 2b$; le rayon du cercle cherché $AC = x$; la distance $ab = d$. Dans le triangle aCb on a

$$ab^2 = Ca^2 + Cb^2 - 2Ca.Cb.\cos C.$$

Mais $C = 180° - F$, donc $\cos C = -\cos F$; $Ca^2 = AC^2 - Aa^2 = x^2 - a^2$; de même $Cb^2 = x^2 - b^2$. Donc on aura

$$d^2 = x^2 - a^2 + x^2 - b^2 + 2\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}.\cos F.$$

Qu'on mette $2x^2 - a^2 - b^2 = y$, on aura

$$x^2 = \frac{y + a^2 + b^2}{2}, \quad x^2 - a^2 = \frac{y + b^2 - a^2}{2}, \quad x^2 - b^2 = \frac{y + a^2 - b^2}{2};$$

donc

$$d^2 - y = \cos F.\sqrt{(y + a^2 - b^2)(y + b^2 - a^2)}$$

et

$$d^4 - 2d^2y + y^2 = \{y^2 - (a^2 - b^2)^2\} \cos F^2$$

ou

$$y^2 \sin F^2 - 2d^2y = -d^4 - (a^2 - b^2)^2 \cos F^2,$$

une équation quadratique pour y. On aurait pu trouver une telle immédiatement pour x^2.

IV. Quatrième solution trigonométrique.

En désignant les angles Cab, Cba par E, E', et en conservant les dénominations ci dessus mentionnées, on a

$$Ca : ab = Ca : d = \sin E' : \sin F,$$
$$Cb : ab = Cb : d = \sin E : \sin F;$$

donc

$$Ca = \frac{d \sin E'}{\sin F}, \quad Cb = \frac{d \sin E}{\sin F}.$$

Or on a (Sol. I.)

$$Ca^2 - Cb^2 = Db^2 - Aa^2 = b^2 - a^2,$$

donc

$$\frac{d^2}{\sin F^2}(\sin E'^2 - \sin E^2) = b^2 - a^2.$$

Mais

$$\sin E'^2 - \sin E^2 = \frac{1 - \cos 2E'}{2} - \frac{1 - \cos 2E}{2}$$
$$= \frac{\cos 2E - \cos 2E'}{2} = \sin \tfrac{1}{2}(E' + E) \sin \tfrac{1}{2}(E' - E)$$
$$= \cos \tfrac{1}{2}C \sin \tfrac{1}{2}(E' - E) = \sin \tfrac{1}{2}F \sin \tfrac{1}{2}(E' - E).$$

Donc on a

$$\sin \tfrac{1}{2}(E' - E) = \frac{b^2 - a^2}{d^2} \cdot \frac{\sin F^2}{\sin \frac{1}{2}F} \text{*)}.$$

Ayant trouvé la différence des angles $E' - E$, comme on connoit leur somme $= F$, on trouve ces angles eux mêmes; d'où suivent

$$Ca = \frac{d \sin E'}{\sin F}, \quad Cb = \frac{d \sin E}{\sin F}, \quad AC = \sqrt{Aa^2 + Ca^2}.$$

---

*) $\sin \frac{1}{2}(E' - E) = \frac{2(b-a)(b+a)}{d^2} \sin F \cos \frac{1}{2}F.$ G.

XXXVI.
Beweis des umgekehrten ptolemäischen Satzes.

Aus J. F. Pfaff's Papieren mitgetheilt

von

dem Herausgeber.

In dem Vierecke $ABCD$ (Taf. V. Fig. 3.) sei

$$AB.CD+AD.BC=AC.BD.$$

Man soll beweisen, dass sich um dieses Viereck ein Kreis beschreiben lässt.

Liesse sich um das Viereck $ABCD$, dessen Winkel wir der Kürze wegen bloss durch A, B, C, D bezeichnen wollen, kein Kreis beschreiben, so würde, da die Summe aller vier Winkel A, B, C, D vier rechte Winkel beträgt, entweder $A+C<2R$ oder $B+D<2R$ sein. Sei nun einmal $A+C<2R$. Beschreibt man dann, was immer möglich ist, um das Dreieck ABD einen Kreis, so wird dieser Kreis jederzeit die Diagonale AC selbst, nicht deren Verlängerung über den Punkt C hinaus, in einem gewissen Punkte E schneiden. Es ist nämlich, wenn man den Winkel BED der Kürze wegen durch E bezeichnet, $A+E=2R$, und folglich, weil nach der Voraussetzung $A+C<2R$ ist, $E>C$, was nach einem bekannten geometrischen Satze nur dann möglich ist, wenn der Punkt E in der Diagonale AC selbst, nicht in deren Verlängerung über den Punkt C hinaus liegt. Zieht man nun die Linien EF, EG, FG, so ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre vom Kreise:

$$AC:BC=CF:CE,$$
$$AC:CD=CG:CE,$$
$$BC:CD=CG:CF;$$

und weil ausserdem die Dreiecke ABC und CEF, ACD und CEG, BCD und CFG, die Winkel bei C mit einander gemein haben, so ist

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, CEF,$$
$$\Delta\, ACD \sim \Delta\, CEG,$$
$$\Delta\, BCD \sim \Delta\, CFG.$$

Also ist

$$CF : EF = AC : AB,$$
$$FG : CF = BD : CD,$$

woraus

$$1)\quad FG : EF = AC \,.\, BD : AB \,.\, CD;$$

ferner

$$CG : EG = AC : AD,$$
$$FG : CG = BD : BC,$$

woraus

$$2)\quad FG : EG = AC \,.\, BD : AD \,.\, BC.$$

Aus 1) folgt

$$FG : FG - EF = AC \,.\, BD : AC \,.\, BD - AB \,.\, CD,$$

also, weil nach der Voraussetzung

$$AB \,.\, CD + AD \,.\, BC = AC \,.\, BD$$

ist:

$$3)\quad FG : FG - EF = AC \,.\, BD : AD \,.\, BC.$$

Daher ist nach 2) und 3)

$$FG : EG = FG : FG - EF,$$

also

$$EG = FG - EF,$$

und folglich

$$EF + EG = FG,$$

welches unmöglich ist, da zwei Seiten eines Dreiecks nicht dessen dritter Seite gleich sein können. Also ist die Annahme, dass um das Viereck $ABCD$ kein Kreis beschrieben werden könne, falsch, und es lässt sich daher um dieses Viereck unter der Voraussetzung des Satzes immer ein Kreis beschreiben, wie bewiesen werden sollte.

Digitized by Google

XXXVII.

Ueber den zweiten Aufsatz des Herrn Doctor Barfuss. Theil V. Heft 2. S. 155.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Während Herr Dr. Barfuss in seinem ersten Aufsatze eine Kritik der neueren Ansichten versucht, gieht er uns in seiner zweiten Abhandlung eine Probe seiner Darstellung der Analysis, gegen welche eine nur einigermaassen scharf sehende Kritik sehr Vieles einzuwenden haben wird. So viel sich in der Kürze thun lässt, will ich hier erwähnen.

Den Anfang macht der Machtspruch: „es ist wohl zu unterscheiden, ob eine Reihe bloss eine Summe unendlich vieler Glieder, oder ob sie die Entwickelung einer Function sei", d. h. mit anderen Worten, wenn da steht

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots. \quad (1)$$

so können hier zwei Bedeutungen dieser Zeile statt finden. Wirklich! ein Anfang, wie man ihn nicht von einem Mathematiker erwarten sollte. Gleich die ersten Worte belehren uns, dass eine Gleichung wie (1) doppelsinnig ist; zwar wird hinzugesetzt, dass die Convergenz oder Divergenz beide Bedeutungen trenne, aber das hilft uns nichts, wo wir die Form der Reihe noch nicht kennen, wie bei allen Anfängen mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten. Rechnet man aber mit so einer hypothetischen Gleichung weiter, so weiss man keinen Augenblick, ob man es mit einer Identität, oder mit einer syntaktischen Aehnlichkeit zu thun hat, ob also die Rechnungsoperationen, welche die Arithmetik für Identitäten gelehrt hat, hier noch richtig bleiben. Ich werde übrigens nachher auf diesen Punkt zurückkommen. Darauf kommt etwas zur Vertheidigung des Resultates

$$-\tfrac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots.$$

und diese Vertheidigung stützt sich auf die Behauptung, die fragliche Reihe gehe *nicht* aus der Reihe

$$\cos x + \cos 2x + \ldots. + \cos nx$$

Digitized by Google

hervor, wenn man die Zahl n (die Gliederanzahl!) ins Unendliche wachsen lasse, anders wenigstens lassen sich die Worte des Herrn Verfassers nicht interpretiren. Das ist wieder ein durch nichts motivirter Machtspruch; wenn in einer Reihe die Gliederanzahl ins Unendliche wächst, so wird sie eine unendliche, sollte man wenigstens denken; wenn mein Herr Gegner das nicht zugiebt, so lässt sich darauf so wenig antworten, als wenn jemand behauptet, er könne sich eine gerade Linie denken, die länger sei, als ein über ihr construirter Halbkreis.

In §. 5. finden wir etwas ganz Neues; ich bitte die Herren Gauss, Cauchy, Dirichlet u. A., die sich so unnütz mit der Convergenzlehre geplagt haben, hier wohl aufzumerken, denn sie erfahren: dass jede aus der Function $f(x)$ entwickelte Reihe convergirt, wenn ihre Glieder bis zum Verschwinden klein werden. Es ist mir sehr lieb, dass ich das weiss; es handelte sich neulich um den Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$=\int_0^\infty e^{-t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^\infty e^{-2t} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^\infty e^{-3t} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \ldots \text{ in inf.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \text{ in inf.}$$

Ich glaubte erst, derselbe sei unendlich; da aber Herr Dr. Barfuss sagt, die Reihe rechts convergire (denn sie ist eine fallende und auch die Entwickelung einer Function), so wird derselbe wohl ein bestimmter angebbarer sein. Ich hatte nämlich so geschlossen; es ist

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

d. i.

$$> n\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ oder } > \sqrt{n},$$

folglich

$$\text{Lim}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > \text{Lim}\sqrt{n}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \text{ in inf.} = \infty;$$

aber ich sehe eben, dass ich mich hier geirrt habe; die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots \text{ in inf.}$$

geht wahrscheinlich nicht aus $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ hervor,

wenn man die Gliederanzahl n ins Unendliche wachsen lässt. — Aber Herr Dr. Barfuss beweist doch seinen Satz, wie geht es denn zu, dass wir uns widersprechen? Hierauf ist die Antwort folgende.

Die Frage, ob eine Reihe convergire oder nicht, reducirt sich im Grunde auf eine andere, nämlich die, giebt es einen endlichen Ausdruck, welchem die Reihe identisch ist oder nicht. Findet das Erste statt, so muss die Reihe eine fallende und convergente sein; denn wären alle Glieder grösser, als eine angebbare Grösse ε, so wären alle Glieder zusammen ins Unendliche fortgesetzt

$$>\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\ldots.$$

d. i.

$$>\varepsilon(1+1+1+1+\ldots),$$

mithin wäre die Summe der Reihe unendlich und nicht einem endlichen Ausdrucke identisch, wie vorausgesetzt wurde. Ist ferner $u_1+u_2+u_3+\ldots$ in inf. $=S$, so heisst diess nichts Anderes, als $\mathrm{Lim}\,(u_1+u_2+\ldots+u_n)=S$. Hieraus folgt dann unter der Voraussetzung, dass S eine endliche Grösse ist, sehr leicht, dass der Rest der Reihe sich der Null nähern, also die Reihe convergiren müsse. Was thut nun Herr Dr. Barfuss? er zeigt, dass wenn

$$f(x)=X_{(1)}+X'_{(2)}+\ldots.$$

ist, die Reihe convergirt, oder weil convergiren einer endlichen Grösse gleich sein heisst und er unter $f(x)$ doch nichts Unendliches versteht, so zeigt er: wenn eine Reihe einer endlichen Grösse gleich gesetzt wird, so ist sie einer endlichen Grösse gleich. Ja daran zweifelt gewiss Niemand, aber Herr Dr. Barfuss hat seinen Satz doch im Gefühl des Richtigen aufgestellt. Die Sache ist so: das unschuldige Zeichen $=$ ist bei Herrn Dr. Barfuss nicht das gemeine Identitätszeichen, wie wir es nehmen; oh nein! das ist ein gar wunderbares, proteusartiges Wesen; cinmal lässt es sich wohl zu unseren beschränkten Begriffen herab, das andere mal aber bezeichnet es einen höchst geheimnissvollen syntaktischen oder unbestimmt allgemein analytischen Zusammenhang, so etwa, als wenn Schelling hinsetzt: Wärme $=$ Expansion, was wir Anderen Uneingeweihten und weniger Erleuchteten nicht verstehen, auch verstehen zu wollen uns gar nicht anmaassen dürfen. Wenn daher Herr Dr. Barfuss in §. 5. den Beweis mit den Worten eröffnet: Es sei

$$f(x)=X_{(1)}+X_{(2)}+\ldots+X_{(n)}+R_{(n)},$$

so weiss man nicht welche Bedeutung gemeint ist; wahrscheinlich aber ist hier nur von der genannten überschwenglichen, für uns unbegreiflichen Symbolik Gebrauch gemacht. So geht es nun fort und die Bedeutung von $=$ schwankt immer zwischen beiden Extremen und klappt zuletzt in die gewöhnliche Auffassung um. Das Alles lässt sich vermeiden, wenn man auf den im vorigen Aufsatze von mir gemachten Vorschlag eingehen will, diese verschiedenen Bedeutungen durch verschiedene Zeichen auseinander zu halten; ausserdem verwirren sich alle Begriffe und man kann gar nicht einmal mit Jemand sich ordentlich verständigen, weil er sich wech-

Digitized by Google

selweis immer hinter der anderen Bedeutung verkriechen kann, wenn man ihn aus der ersten herausgetrieben hat.

Ich will bloss noch Eines berühren, um zu zeigen, dass der Herr Dr. Barfuss gar nicht einmal weiss, was die neuere Behandlungsweise der Analysis will. Es ist diess die Bemerkung über Cauchy's Beweis für das Binomialtheorem, der darin besteht, dass die Gleichungen

$$f(m) = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots.$$

$$f(n) = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + \ldots.$$

multiplicirt werden, wobei sich durch eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten die Gleichung ergiebt:

$$f(m) f(n) = f(m + n),$$

aus welcher $f(m) = [f(1)]^m = (1 + x)^m$ folgt. Mein Herr Gegner meint, weil dieser Beweis sich auf eine Eigenschaft der Coefficienten gründe, so passe er ganz gleichförmig auch für den Fall der Divergenz und will so zeigen, dass der Beweis ebenfalls die allgemeine Gültigkeit der Binomialreihe darthue. Hier sieht man klar das durchaus unkritische Verfahren meines Herrn Gegners. Ich muss, um diess deutlich zu machen, folgende Punkte hervorheben.

I. Die Arithmetik lehrt uns bloss mit geschlossenen Ausdrücken und Gleichungen i. e. absoluten Identitäten rechnen. Will man nun diese Rechnungsoperationen auf nicht geschlossene Ausdrücke (unendliche Reihen) anwenden, so kann diess, wenn man nicht geradezu Hypothesen machen will, nur dadurch geschehen, dass man ein Princip dieser Anwendbarkeit aufweist, d. h. dass man sich einen Rechtstitel verschafft, welcher die Erlaubniss dazu enthält. Diess ist eine Forderung, welche jede gesunde Kritik machen muss, die sich in der Mathematik ebenso nothwendig herausstellt, wie die ganz verwandten Fragen, welche die Kritik der Vernunft zu beantworten hat. Lässt man sie unberücksichtigt oder nimmt auf Treu und Glauben die allgemeine Gültigkeit aller arithmetischen Operationen über die Gränzen hinaus an, innerhalb deren sie beweisbar sind, so verfallt man wie Herr Dr. Barfuss in den Fehler eines unzeitigen Dogmatismus, ganz wie in der Metaphysik.

II. Woher nehmen wir aber jenes Princip? Hierauf lässt sich antworten, wenn man sich an ein ganz allgemeines Gesetz erinnert, welches sowohl in der Philosophie wie in der Mathematik gilt, und welches dahin lautet, dass wir überhaupt nur von solchen Dingen wissenschaftlich etwas ausmachen können, die uns rein anschaulich gegeben werden können. Dazu gehört aber, dass wir sie als Ganzes zu fassen vermögen. Diess lehrt uns auf der metaphysischen Seite die Nichtigkeit aller sogenannten speculativen Theologie, Kosmologie etc., weil wir weder Gott, noch die Welt etc. uns in Zeit und Raum als Ganzes denken können, und auf der mathematischen Seite bekommen wir dadurch eben jenes Princip, welches so heisst: „einer wissenschaftlichen Behandlung unterliegen ins Unendliche fortlaufende Ausdrücke nur in so fern, als sie sich als geschlossenes Ganzes ansehen lassen". Drücken wir diess in mathematischer Sprache aus, so haben wir den Satz: Alle mögli-

Digitized by Google

chen Rechnungsoperationen sind nur dann auf eine unendliche Reihe anwendbar, wenn dieselbe einer endlichen begränzten Grösse identisch ist, und zwar ist gerade Identität nöthig, weil keine andere Beziehung uns erkennen lässt, ob die fragliche Reihe als endliche Grösse betrachtet werden könne. Soll aber eine unendliche Reihe einer endlichen bestimmten Grösse gleich sein, so muss sie erstlich fallen, wie oben gezeigt wurde, und ausserdem muss sie dann noch die Eigenschaft haben, dass ihre Summe sich jener endlichen Grösse mehr und mehr nähert, je mehr Glieder der Reihe vereinigt werden; Reihen der Art aber nennt man kurz convergirende.

III. Da also die Convergenz der Reihen das Princip der Anwendbarkeit arithmetischer Operationen auf Reihen enthält, so muss die Lehre von der Convergenz der Reihen jeder anderen Betrachtung derselben vorhergehen.

Hieraus sieht man, dass die Hypothese

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots.$$

welche den Anfang der Methode der unbestimmten Coefficienten macht, viel grösser ist, als man gewöhnlich glaubt, weil mit dem Gleichheitszeichen schon die Hypothese der Convergenz und der Anwendbarkeit aller Operationen gemacht ist, während man noch gar nicht weiss, ob man hierzu berechtigt ist. Vor Hypothesen aber hat sich die Mathematik am meisten zu hüten, wenn sie nicht ihren bisherigen Ruhm einbüssen will. Daher ist die umgekehrte Methode vorzuziehen, bei welcher die Form der Reihe $(A, B, C \ldots)$ bekannt ist und folglich auch durch die Convergenz die Anwendbarkeit der zur Summirung nöthigen Operationen gesichert ist. Ebenso einfach sieht man jetzt den Irrthum des Herrn Dr. Barfuss ein; er will für jedes x die beiden Reihen

$$f(m) = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots.$$
$$f(n) = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + \ldots.$$

mit einander multipliciren. Das ist ein Herumtappen im Finstern, so lange er nicht weiss, ob er endliche Dinge vor sich hat oder nicht; mit unendlichen Factoren aber multipliciren lehrt keine Arithmetik, sie lehrt überhaupt nicht mit Grössen rechnen, die sich dem Rechner unter der Hand verändern. Ja schon dadurch, dass er nur sagt, ich will $1 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots.$ mit $f(m)$ bezeichnen, ist schon stillschweigend angenommen, dass $f(m)$ eine endliche Grösse, folglich die Reihe convergent sei, denn diese Bezeichnung hat keinen Sinn, wenn sie nicht eine Identität sein soll. (Hier bleibt freilich dem Herrn Dr. Barfuss immer wieder die Hinterthür der syntaktischen Entwickelung offen.) Gerade die Multiplication zweier Reihen ist eine Klippe, die man nur durch Handhabung scharfer Kritik vermeiden kann. Es kommt nämlich der Fall vor, dass das Product zweier convergenten Reihen, so wie man es gewöhnlich schreibt, eine divergente Reihe wird, wie man bei Cauchy page 149. sehen kann. Cauchy giebt keine weitere Erklärung; dieselbe liegt sehr einfach darin, dass man das Product willkührlich nach einer Regel anordnet, die bei endlichen Reihen richtig ist, bei unendlichen falsch werden kann. Für Herrn Dr. Barfuss will ich noch bemerken, dass er bei seinem Tadel des Cau-

chy'schen Binomialbeweises ganz übersehen hat, dass die Gleichung $f(m)f(n)=f(m+n)$ zwei Auflösungen hat, nämlich $f(m)=[f(1)]^m$ und das Unendliche, von denen die erste dem Falle der Convergenz, die zweite dem der Divergenz entsprechen würde, wenn man sich überhaupt auf den letzteren einlassen dürfte. Was ich hier mittheile, sind nur die Grundgedanken einer kritischen Philosophie der Mathematik, die ich später im Zusammenhange ausarbeiten werde. Dieselbe Frage nach der Anwendbarkeit der arithmetischen Operationen wiederholt sich auch bei den imaginären Grössen, den unendlichen Producten und Kettenbrüchen und lässt sich auf ähnliche Weise auch dort lösen. Einiges davon enthält mein zu Ostern erscheinendes „Handbuch der mathematischen Analysis", bis zu dessen Vorhandensein ich weitere Discussionen über diesen Gegenstand zu verschieben bitte, weil ein Streit nur dann zu etwas führen kann, wenn die Principien der Sache klar und bestimmt ausgesprochen vorliegen.

Noch eine Bemerkung in Bezug auf Fries. In seiner Naturphilosophie sagt Fries einmal ganz richtig, man könne eigentlich nur mit convergenten Reihen sicher rechnen, hinterher aber macht ihn Eulers sorglose Weise stutzig, und er meint nun, da man doch mit divergenten Reihen auch operirt und nichts wesentlich Falsches herausgebracht habe, so müsse es doch ein Princip geben, nach welchem Rechnungen mit diesen Reihen erlaubt seien. Darauf sagt er: mir scheint die Sache in dem Unterschiede der syntaktischen und arithmetischen Bedeutung der Reihen zu liegen. Hier ist die Sache ganz klar; Fries hat den richtigen Grundgedanken, macht aber Eulers Autorität zu Gefallen eine Hypothese, für die er auch nirgend einen Beweis bringt. Das ganze Argument aber fällt weg, wenn man zeigt, dass wirklich allerhand Verkehrtes durch jenes Rechnen in den Tag hinein herauskommt, wie ich diess in dem vorigen Aufsatze gethan habe, und wenn man kritisch untersucht, auf welchem Grunde jene Rechnungen ruhen. Herr Dr. Barfuss, der wie ich glaube auch Friesianer sein will, hat demnach Fries sehr schlecht verstanden. Das Vermächtniss, welches unser, zwar im Greisenalter, für uns aber doch noch zu früh verstorbene Lehrer uns hinterlassen hat, besteht in der Anforderung, die Wissenschaft, der sich jeder einzelne gewidmet hat, nach den Grundsätzen seiner Philosophie, die nicht umsonst die kritische heisst, zu bearbeiten, wie diess für die Pflanzenphysiologie bereits von unserem genialen Schleiden geschehen ist; ebenso hätte Herr Dr. Barfuss, der älter als ich ist und länger das Glück hatte, Fries persönlich zu kennen, die Mathematik kritisch bearbeiten sollen. Statt dessen ergreift derselbe eine unglückliche Hypothese unseres Lehrers und meint wahrscheinlich, weil sie Fries ausgesprochen hat, sei sie unumstössliche Wahrheit; (wie folgt denn nur aus dem Satze, dass die Principien der Mathematik rein anschaulicher Natur sind, die Lehre von der syntaktischen Bedeutung der Reihen?). Da nun an Herrn Dr. Barfuss diese Aufforderung ungehört vorübergezogen ist, so suche ich jetzt derselben nachzukommen, obgleich diese Aufgabe mit meinen Fähigkeiten bei weitem weniger in Einklang zu sein scheint, als mit den seinigen.

Digitized by Google

XXXVIII.

Eine neue analytische Gleichung, und deren Anwendung auf die Bestimmung eines vielfachen Integrals und die Summirung einer Reihe.

Von

Herrn F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Mollweide hat sich in seiner Fortsetzung des Klügelschen Wörterbuchs (Artikel Summirung der Reihen S. 739.) mit der Summation der Reihe beschäftigt, deren allgemeines Glied durch $\frac{x^{\lambda_1+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)(\lambda_3+k)}$ ausgedrückt wird, indem k den von Null bis unendlich wachsenden Index bezeichnet, und stellt die Summe durch drei bestimmte Integrale dar. Indem ich mich nun bemühte, die allgemeinere Reihe zu summiren, deren allgemeines Glied

$$\frac{x^{\lambda_n+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)\ldots.(\lambda_n+k)}$$

ist, wo k seine vorige Bedeutung hat, wurde ich auf die Untersuchung einer Summe mit endlicher Gliederzahl geleitet, und das Resultat, welches ich fand, schien mir merkwürdig genug zu sein, um es im Folgenden mitzutheilen.

1.

Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots. \lambda_n$ beliebige, aber sämmtlich von einander verschiedene Grössen, so findet stets die interessante Relation statt:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned} &+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots.(\lambda_1-\lambda_n)} \\ &+\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\ldots.(\lambda_2-\lambda_n)} \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\frac{1}{(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\ldots.(\lambda_n-\lambda_{n-1})} \end{aligned}\right\}=0$$

Beweis. Aus der Theorie der Zerlegung der gebrochenen Functionen in Partialbrüche*) ist bekannt, dass man setzen kann

$$\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_n)}=\frac{A_1}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{A_2}{\lambda_1-\lambda_3}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{\lambda_1-\lambda_n},$$

und dass dann die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ durch folgende Werthe bestimmt sind:

$$A_1=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_3)\ldots(\lambda_2-\lambda_n)},$$

$$A_2=\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_2)\ldots(\lambda_3-\lambda_n)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n-1}=\frac{1}{(\lambda_n-\lambda_2)\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}.$$

Dividirt man also die Werthe von $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ resp. durch $-(\lambda_2-\lambda_1), -(\lambda_3-\lambda_1), \ldots -(\lambda_n-\lambda_1)$, und summirt, so entsteht

$$\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_n)}=-\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\ldots(\lambda_2-\lambda_n)}$$

$$-\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\ldots(\lambda_3-\lambda_n)}$$

u. s. w.

$$-\frac{1}{(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})},$$

und wenn man die Glieder auf der Rechten auf die Linke bringt, so entspringt das Theorem, welches ich oben ausgesprochen habe.

2.

Zuvörderst ist nun die Bedingung der Convergenz der Reihe festzustellen, deren allgemeines Glied wir oben angegeben haben. Wird dieses durch u_k bezeichnet, so findet man leicht, dass der absolute Werth des Verhältnisses $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ den absoluten Werth von x zu seiner Gränze hat, und nach einem bekannten Theorem von Cauchy (s. die Analyse algébrique p. 134), wird also obige Reihe convergent sein, wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist.

Dies vorausgesetzt, bestimme ich die Summe der unendlichen Gliederzahl

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{x^{\lambda_n+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)\ldots(\lambda_n+k)}$$

auf folgende Art.

*) Grunert Leitfaden für den ersten Unterricht in der höhern Analysis. S. 151.

Zuvörderst ist

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^{\lambda_1+k}}{\lambda_1+k} = \int \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x},$$

das Integral von $x=0$ bis $x=x$ ausgedehnt. Denn differenziirt man den Ausdruck auf der Linken, und summirt die dadurch entstandene geometrische Progression von unendlicher Gliederzahl, so findet sich $\frac{x^{\lambda_1-1}}{1-x}$, welches zwischen den Gränzen 0 und x integrirt werden muss, um den Werth auf der linken Seite wieder zu finden.

Um nun λ_2+k als Factor in den Nenner zu bringen, multiplicire man jene Gleichung mit $x^{\lambda_2-\lambda_1-1}dx$, und integrire, so entsteht

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^{\lambda_1+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)} = \int x^{\lambda_2-\lambda_1-1}dx \int \frac{x^{\lambda_1-1}}{1-x}dx,$$

das neue Integral von 0 bis x ausgedehnt.

Ebenso multiplicire man diese Gleichung mit $x^{\lambda_3-\lambda_2-1}dx$, und integrire; dann erhält man

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^{\lambda_1+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)(\lambda_3+k)}$$

$$= \int x^{\lambda_3-\lambda_2-1}dx \int x^{\lambda_2-\lambda_1-1}dx \int \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}.$$

Geht man auf ähnliche Art fort, so gelangt man zu dem allgemeinen Ausdruck:

$$\text{(b)}\quad \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^{\lambda_n+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)\ldots\ldots(\lambda_n+k)}$$

$$= \int x^{\lambda_n-\lambda_{n-1}-1}dx \int x^{\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2}-1}dx \ldots\ldots \int \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x};$$

alle Integrale von $x=0$ bis $x=x$ erstreckt.

Dieses vielfache Integral gestattet eine Zerlegung in n einfache Integrale.

Denn nach der ersten allgemeinsten Reductionsformel ist zuerst

$$\int x^{\lambda_2-\lambda_1-1}dx \int \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x} = \frac{x^{\lambda_2-\lambda_1}}{\lambda_2-\lambda_1} \cdot \int \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \cdot \int \frac{x^{\lambda_2-1}dx}{1-x}.$$

Multiplicirt man dieses mit $x^{\lambda_3-\lambda_2-1}dx$, integrirt, und bestimmt jedes Doppelintegral auf der Rechten wieder nach der allgemeinsten Reductionsformel, so wird

$$\int x^{\lambda_3-\lambda_2-1}dx\int x^{\lambda_2-\lambda_1-1}dx\int\frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^{\lambda_3-\lambda_1}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}\\
&+ \frac{x^{\lambda_3-\lambda_2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_2-1}dx}{1-x}\\
&+ \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_3-1}dx}{1-x}.
\end{aligned}$$

Setzt man diese Entwickelung noch weiter fort, so vermuthet man leicht das hier obwaltende Gesetz, nämlich:

$$\text{(c)}\quad \int x^{\lambda_n-\lambda_{n-1}-1}dx\int x^{\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2}-1}dx\ldots\int\frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^{\lambda_n-\lambda_1}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\ldots(\lambda_n-\lambda_1)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}\\
&+ \frac{x^{\lambda_n-\lambda_2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)\ldots(\lambda_n-\lambda_2)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_2-1}dx}{1-x}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{x^{\lambda_n-\lambda_{n-1}}}{(\lambda_1-\lambda_{n-1})(\lambda_2-\lambda_{n-1})\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}\cdot\int\frac{x^{\lambda_{n-1}-1}dx}{1-x}\\
&+ \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_2-\lambda_n)\ldots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_n-1}dx}{1-x}.
\end{aligned}$$

Die Factoren der Nenner befolgen das Gesetz, dass zuerst λ_1 von allen übrigen Grössen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$, dann λ_2 von allen übrigen, dann λ_3 u. s. w. abgezogen wird.

Um indessen die allgemeine Gültigkeit dieses Resultates zu erweisen, nehmen wir an, dass die Gleichung (c) richtig sei, und erweisen, dass das Gesetz bleibend ist, wenn n übergeht in $n+1$. In der That, multipliciren wir (c) mit $x^{\lambda_{n+1}-\lambda_n-1}dx$, und integriren nach der allgemeinsten Reductionsformel, so erhalten wir n Differenzen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x^{\lambda_{n+1}-\lambda_1}}{(\lambda_2-\lambda_1)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_1)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}-\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_1)}\\
+&\frac{x^{\lambda_{n+1}-\lambda_2}}{(\lambda_1-\lambda_2)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_2)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_2-1}dx}{1-x}-\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_2)}\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+&\frac{x^{\lambda_{n+1}-\lambda_n}}{(\lambda_1-\lambda_n)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_n-1}dx}{1-x}-\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_n)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}
\end{aligned}\right\}\int\frac{x^{\lambda_{n+1}-1}dx}{1-x}.$$

Da nun aber $-\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_1)}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_{n+1})}$

Digitized by Google

ist, und von den übrigen dieser Coefficienten dasselbe gilt, so ist nach (a) offenbar die Summe der Coefficienten von $\int \frac{x^{\lambda_{n+1}-1}dx}{1-x} =$
$-(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)} = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_{n+1})\ldots(\lambda_n-\lambda_{n+1})}$, und folglich bleibt die Gleichung (c) richtig.

Somit haben wir nun

$$(d)\quad \sum_{k=0}^{k=x} \frac{x^{\lambda_n+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)\ldots(\lambda_n+k)}$$

$$= \frac{x^{\lambda_n-\lambda_1}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\ldots(\lambda_n-\lambda_1)} \cdot \int_0^x \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}$$

$$+ \frac{x^{\lambda_n-\lambda_2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)\ldots(\lambda_n-\lambda_2)} \cdot \int_0^x \frac{x^{\lambda_2-1}dx}{1-x}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{x^{\lambda_n-\lambda_{n-1}}}{(\lambda_1-\lambda_{n-1})(\lambda_2-\lambda_{n-1})\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})} \cdot \int_0^x \frac{x^{\lambda_{n-1}-1}dx}{1-x}$$

$$+ \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_2-\lambda_n)\ldots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)} \cdot \int_0^x \frac{x^{\lambda_n-1}dx}{1-x}.$$

Es fragt sich jetzt, ob diese Reihe noch für $x=1$ gelte. Denkt man sich, um dies zu untersuchen, k schon so gross, dass die Factoren λ_1+k, λ_2+k, u. s. w. sämmtlich positiv sind, und ist $\lambda_\varrho+k$ der kleinste unter ihnen, so ist $\frac{1}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)\ldots(\lambda_n+k)} < \frac{1}{(\lambda_\varrho+k)^n}$, und folglich $\sum_{k=a}^{k=\infty} \frac{1}{(\lambda_1+k)\ldots(\lambda_n+k)} < \sum_{k=a}^{k=\infty} \frac{1}{(\lambda_\varrho+k)^n}$, wenn a der Werth von k ist, von welchem alle Factoren anfangen positiv zu sein. Da nun nach einem bekannten Satze die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{(\lambda_\varrho+k)^n}$ ist, convergirt, wenn $n>1$ ist, so gilt die Formel (d) für $x=1$ unter der Voraussetzung, dass $n>1$ ist.

Ist endlich $n=1$, so wird die Reihe $\frac{1}{\lambda_1+k} + \frac{1}{\lambda_1+k+1}$ + u. s. w., welche bekanntermassen divergent ist.

3.

Mittelst der Gleichung (d) lässt sich noch eine andere bemerkenswerthe Reihe summiren.

Bezeichnet man den Ausdruck auf der Linken in der Relation (d) durch s_n, multiplicirt ihn mit $x^{\alpha-\lambda_n}$ und differenziirt das Product auf bekannte Weise, nämlich $\frac{d(x^{\alpha-\lambda_n}.s_n)}{dx} = (\alpha-\lambda_n)x^{\alpha-\lambda_n-1}.s_n + x^{\alpha-\lambda_n} . \frac{d.s_n}{dx}$, so erhält man wegen (b) $\frac{d(x^{\alpha}-\lambda_n . s_n)}{dx}$

$= (\alpha - \lambda_n) x^{\alpha - \lambda_n - 1} . s_n + x^{\alpha - \lambda_n} . x^{\lambda_n - \lambda_{n-1} - 1} . s_{n-1}$
$= (\alpha - \lambda_n) x^{\alpha - \lambda_n - 1} . s_n + x^{\alpha - \lambda_{n-1} - 1} . s_{n-1}$. Führt man nun die aus (d) sich ergebenden Ausdrücke für s_n und s_{n-1} ein, und zieht zusammeo, so gelangt man zu

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(\alpha + k) x^{\alpha + k - 1}}{(\lambda_1 + k)(\lambda_2 + k) \ldots (\lambda_n + k)}$$

$$= \frac{(\alpha - \lambda_1) x^{\alpha - \lambda_1 - 1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \ldots (\lambda_n - \lambda_1)} . \int \frac{x^{\lambda_1 - 1} dx}{1 - x}$$

$$+ \frac{(\alpha - \lambda_2) x^{\alpha - \lambda_2 - 1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) \ldots (\lambda_n - \lambda_2)} . \int \frac{x^{\lambda_2 - 1} dx}{1 - x}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(\alpha - \lambda_n) x^{\alpha - \lambda_n - 1}}{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n) \ldots (\lambda_{n-1} - \lambda_n)} . \int \frac{x^{\lambda_n - 1} dx}{1 - x}$$

sämmtliche Integrale zwischen den Gränzen 0 und x genommen.

Die Convergenz dieser Reihe ist besonders festzustellen, da man von der Reihe in 2. auf sie keinen Schluss machen kann, indem sie durch Differenziation abgeleitet ist.

Dass aber unsere Reihe convergent ist, wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist, erhellt aus dem schon oben angewandten Theorem von Cauchy.

XXXVIII.

Miscellen.

A l'occasion d'nne communication de M. Masson sur la photométrie, M. Abel Transon signale un phénomèoe curieux que chacun peut vérifier très facilement. Si on fait pirouetter une pièce du jeu de domino sur le petit clou qui fait ordinairement saillie au centre de la face noire, on verra les points de la face numérotée échanger, à un certain degré de vitesse très faible, leur couleur noire pour une teinte d'un rouge assez vif (Société philomatique de Paris).

XVII.
Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Libri, Guglielmo. Storia delle scienze matematiche in Italia. Versione di Luigi Masieri dottore in fisica e matematica. I.—IV. Milano. 1843. In-8.

Schriften über Unterrichtsmethode.

Bjering, C. H.: Plan og Methode for Underviisningen i Mathematik ved de laerde Skoler. Programm for Aalborg Skole. Aalborg. 1843. 16 sz.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Petzhold, Wilh.: Elementarcursus der Elementar-Mathematik, Arithmetik und ebenen Geometrie, mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Jugend und als Leitfaden für Lehrer bearbeitet. gr. 8. nebst 1 Figurentafel. Berlin. 1844. 20 ggr.

Blum, August: Cours complet de Mathématiques à l'usage des aspirants à toutes les écoles du gouvernement, renfermant toutes

Digitized by Google

les connaissances mathématiques exigées pour l'admission militaire, forestière, des arts et manufactures etc. 3 vol. In-8. Paris. 1843—44.

Hutton, C.: A Course of Mathematics; composed for the use of the Royal Military Academy. A new and carefully corrected Edition, entirely remodelled, and adapted to the course of instruction now pursued in the Royal Military Academy. By William Rutherford. 1 very large vol. 8vo. London. 1843. 16 s.

De Sinno. Corso completo di matematiche, ec. Napoli. 1843. Tomo 1. In-8.

Arithmetik.

Lindenroth, G.: Leitfaden für den Unterricht im Rechnen mit gemeinen und Decimal-Brüchen. 8. Elbing. 1843. geh. 4 ggr.

Rosenberg, J. Th. H.: Kaufmännische Arithmetik. Enthaltend die Gold- und Silbermünzen, das Papier-, Rechnungs- und Wechselgeld, die Wechsel- und Staatspapier-Course und die höhere Zinsrechnung nebst Aufgaben. gr. 8. Hamburg. 1843. geh. 12 ggr.

Raynaud, P. et. V. Leroque: Arithmétique théorique et pratique. In-12. de 7 feuilles. Draguignan. 1844. 60 c.

Cirodde: Leçons d'arithmétique. 5me éd. In-8. Paris. 1843. 4 fr.

George fils, Nouveau traité élémentaire d'arithmétique décimale. Sept. édit. In-18. de 5 feuilles. Paris. 1844. 75 c.

Glanger, J. B.: Traité complet d'arithmétique raisonnée et appliquée à l'usage des écoles primaires et des institutions d'enseignement moyen; 1re partie, contenant le calcul des nombres entiers, décimaux, fractionnaires et complexes; avec plus de 600 exercises et applications usuelles. In-18. Bruxelles. 1843. 12 ggr.

George, L. J.: Cours d'arithmétique théorique et pratique, comprenant, etc. Troisième édition. In-8. Paris. 1843. 3 fr.

Beck, C.: Traité d'arithmétique à l'usage des élèves qui se destinent à l'école militaire, à l'école des mines, au génie civil et à la marine, 1re partie. Nombres abstraits; grand in-8. Bruxelles. 1843. 2 Thlr.

Vigneau, M.: Traité d'arithmétique théori-pratique. In-12. de 9 feuilles. Paris. 1844.

Hutton, G.: Manual of Arithmetic, adapted for the use of Schools, Private Tutors, and Families. London. 1844. 12mo. cloth. 3 s. 6 d.

Leer, G.: Elements of Fractional Arithmetic; being introductory to the study of **Mathematics. 12mo. Edinburgh.** 1843. cloth 2 sh. 6 d.

Amanti, Elementi di aritmetica. Napoli. 1843. In-8.

Romeo: Lezioni elementari di aritmetica. Napoli. 1843. In-8.

Scarpati, Trattato elementare di aritmetica. Napoli. 1843. In-8.

Aritmetica mercantile, o Nuovo abbaco per la gioventù che si dedica al commercio, di Artidoro Zanobetti. Con tavole di pesi e mesure, raggnagli di monete e loro confronto con le principali piazze d'Europa. Livorno. 1843. In-12.

Pflanz, J. A.: Arithmetik (und Algebra) für Realschulen, für höhere Bürger- und Gewerbeschulen etc. 2ter Theil. Höhere Arithmetik. gr. 8. Stuttgart. 1843. geh. 12 ggr. (M. vergl. Literar. Ber. No. XII. S. 178.)

Doppler, Christ.: Arithmetik und Algebra. Mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des praktischen Lebens und der technischen Wissenschaften, nebst einem Anhange von 450 Aufgaben (der Elementar-Mathematik erster Bd.). Lex. 8. Prag. 1844. 2 Thlr. 12 ggr.

Amadieux, P. F.: Notions élementaires d'algèbre. In-12. de 9 feuilles. Paris. 1844. 2 fr.

Elémens d'Algèbre, rédigés spécialement pour les aspirans au baccalauréat ès-lettres; par L. J. George. Sixième éditon. In-8. de 17 feuilles. Paris. 1844.

Scott, W.: Elements of Arithmetic and Algebra. 8. London. 1844. bound. 16 sh.

Young, Professor: The Analysis of cubic and biquadratic Equations. 12mo. London. 1844. cloth 6 sh.

Derselbe: Researches respecting the imaginary Roots of numerical Equations: being a Continuation of Newtons Investigations on that subject, and forming an Appendix to the Theory and solution of Equations of the higher orders. London. 1844. 3 sh. 6 d.

Derselbe: The general Theory and Solution of Equations of the higher Orders: wherein it is attempted to bring the methods of Horner, Budan, Sturm and Fourier especially the latter nearer to perfection as respects their practical application to advanced equations, with many original researches and improvements in various parts of the Science. 2d Ed. London. 1844. 15 sh.

Elementi di aritmetica generale, desunti e compendiati da varii autori, e proposti quale studio preparatorio ai sistematici trattati prescritti ad uso degli ii. rr. licei e delle università dal professore dr. Giuseppe Frapporti. Trento. 1842 — 1843. Due parti in - 8.

Proposita di un corso di lezioni per l'insegnamento dell' algebra elementare nelle scuole techniche. Milano. 1843. Fasc. II. III. ed ultimo. In-12.

Hecht, D. F.: Beispiele und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und gemeinen Geometrie. 2te Aufl. Freiberg. 1844. 8. 8 ggr.

Johansen, J.: Udvikling og Oploesning af de i J. N. Meiers Kortfattade Fremstilling af Hovedregningens Vaesen og Vaerd forekommende Exempler og Opgaver. Eet Bidrag til dette Skrifts almindeligere Eerkjendelse og Popularitet. 8. Svendborg. 1843. 88 sz.

Encyclopaedia Metropolitana. Part. 57. 1 Pfd. 1 sh. contents: Integral Calculus, by A. Levy. — Calculus of Variations and of finite Differences by T. G. Hall. — Calculus of functions and Theory of Probabilities by A. de Morgan. — Definite Integrals by H. Moseley. London. 1844.

Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale, von C. Gudermann. Berlin. 1844. 4. 5 Thlr. 12 ggr.
Dieses wichtige Werk ist ein besonderer Abdruck der bekannten in Crelle's Journal veröffentlichten Abhandlungen des Verfassers, über den fraglichen Gegenstand.

Huber, L.: Reductions-Tabellen, enthaltend: theils Verwandlungen der Münzen-, Maasse- und Gewichttheile in Decimalbrüche, theils Uebertragung früher gebräuchlich gewesener Flächenmaasse in das neue württemb. Maass etc. nebst einer kurzen Anleitung zur Decimalrechnung. gr. 8. Stuttgart. 1843. geh. 10 ggr.

Hannover, Ad.: Tableau micrométrique pour servir à la comparaison et la réduction des diverses mesures, qui sont employées dans la micrométrie microscopique. Folio. Copenhague. 1843. 8 ggr.

Barlow's Tables of Squares, Cubes, Square Roots, Cube Roots, Reciprocals of all integer numbers up to 10,000. Stereotype edition, examined and corrected. London. 1843. 8 sh.

Digitized by Google

Geometrie.

August, Dr. E. F., Director des Cöln. Real-Gymn.: Zor Keontniss der geometrischen Methnde der Alten. In besooderer Beziehung anf die Plntonische Stelle im Meoo 22. d. gr. 8. Nebst 1 Figurentaf. io 4. Berlin. 1843. 8 ggr.
(Ein neuer Abdruck einer frühern Abhandlung.)

Unger, Dr. E. S.: Der erste Unterricht in der Genmetrie. Ein Leitfnden zor Entwickelung und Uebung der Fassungskraft der Jugend. Für den Lehrer der Volksschnlen, snwie für diejenigen, die sich selbst unterrichteo wnllen. Nach einer eigenthüml. Methode bearbeitet. gr. 8. Erfurt. 1844. 20 ggr.

Mnellinger, O.: Stereometrische Waodtafelo nebst einem erklärenden Texte, enthalteod: die Grnndzöge eines stercometrischen Lehrkurses nach Lneroix und Legendre. Für die Schulen bearbeitet. 5 Tnfeln in Folio und Text in 8. Snlothuro. 1844. 14 ggr.

Cirodde, P. L.: Leçons de Génmétrie, soivies de notioos élémentaires de génmétrie descriptive. Deuxième édition. Io-8. de 28 feoilles, plus 16 pl. Paris. 1844. 7. 50.

Willisms, J. M.: Elements of Eoclid; coutnining Book 1 — 6 and the first Tweoty-one Propnsitinns nf the Eleventh Book (with the Planes shaded), chiefly from the Text nf Dr. Simsoo; adapted to the nse of Students hy means nf Symhols. 7th editinn, with an Appendix. 18mo. London. 1843. 6 sh. 6 d.

Calnmel, A.: Ln Qundratore dn Cercle, par les constructioos élémentaires de la géométrie, c'est-à-dire au moyen de la règle et dn compas. 8. Avignon. 1844.

Götz, Dr. J.: Lehrbuch der Mathematik für die höheren Klassen der Gymnasien. 1ster Theil: die Elemente der Kegelschnitte. gr. 8. nebst 5 Figurentafelo in 4. Leipzig. 1844. 12 ggr.

Pasi, C.: Sunto di lezioni di genmetria descrittiva. Pavin. 1843. 4 L. 35 cent.

Strootman, H.: Gronden der heschrijvende Meetkunst vnor de Kadetteo van alle wapeoen. gr. 12mo. Te Bredn. 1843. 1 fr.

Klein, Karl Ang., Frh. v.: Die Chnrographimetrie, das ist: Vereiniguog der Zeichenkunst mit der Genmetrie, sn wie anch populäre Geometrie. 4te Aufl. Neu benrbeitet uod mit Naturansichten nebst 1 Tabelle vervollstäodigt. Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. Mainz. 1842. geh. 15 ggr.

Lamntte, M.: Cnnrs méthndique de dessin linéaire et de génmetrie usuelle. In-8. de 13 feuilles plns un atlas in-4. d'une demi-feuille et 19 pl. Paris. 1844. 6 fr.

Digitized by Google

Dissertatio inauguralis philosophica de curvis lemniscatis. Scripsit G. C. H. Vechtmann. Gottingae. 1843. 4. 12 ggr.

Praktische Geometrie.

Trattato di geodesia elementare, del professore Antonio Bordoni. Seconda edizione. Pavia. 1843. In-8. 21 tavole.

Soldau, C.: Theoretisch-praktische Anleitung zum perspectivischen Zeichnen für angehende Künstler, Gymnasien, Realschulen und technische Bildungsanstalten. Mit 30 Tafeln in Fol. gr. Lex. 8. Giessen. 1843. geh. 3 Thlr. 8 ggr.

Hampel, J. C. G.: Geometrische Constructionen. Ein Handbuch sowohl für Bau- und Gewerbeschulen, als auch für den Selbstunterricht, für Architekten, Bergleute, Forstmänner, Ingenieurs etc. 2te Ausg. Mit 15 Steintafeln (in Folio). gr. 8. Weimar. 1844. 2 Thlr. 12 ggr.

Montucci, Enrico, dott.: Geometria e meccanica applicate alle arti e mestieri; e discorsi de chimica applicate alle arti e mestieri di Policarpo Bandini sulle tracce della pubblica elementare istruzione data dai medesimi ai manifattori senesi nelle sale dell i. e. r. accademia Tegea. Siena. 1843. Disp. I. II. e III. In-8.

Trigonometrie.

Tables trigonométriques, donnant pour tous les angles du quart du cercle calculés de cinq en cinq minutes centésimales et appliqués à toutes les hypoténuses possibles. Par Mazure et Bellinault. In-8. Paris. 1843. 6 fr.

Mechanik.

Hecht, D. F.: Erste Gründe der mechanischen Wissenschaften. 2te Aufl. Freiberg. 1843. 8. 1 Thlr. 16 ggr.

Nuove ricerche per una risoluzione più rigorosa di varii problemi sul moto dell' acqua; memoria di Gabria Piola inserita nel primo volume delle „Memorie dell' i. r. istituto lombardo di scienze, lettere ed arti", la quale fu letta nelle adunanze dei giorni 16 luglio 1840 e 21 luglio 1843. Milano. 1843. In-4.

Praktische Mechanik.

Bresson, C.: Lehrbuch der Mechanik in ihrer Anwendung auf die physischen Wissenschaften, die Künste und Gewerbe. Aus dem Franz. 6te Liefer. gr. 4. nebst 3 lith. Tafeln in ½ Fol. Leipzig. 1844. 12 ggr.

Bernoulli, Prof. Christoph: Vademecum des Mechanikers, oder praktisches Handbuch für Mechaniker, Mühlenbauer, Ingenieurs, Techniker und Gewerbsleute. 4te Aufl. umgearb. und stark verm. von Joh. Gust. Bernoulli, Maschinenfabrikant zu Immendingen. Stuttgart. 1844. 8. 1 Thlr.

Weisbach, J.: Untersuchungen im Gebiete der Mechanik und Hydraulik. Auf eigene Beobachtungen gegründet. 2te Abtheilung. A. u. d. T. Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers beim Ausfluss desselben aus Röhren und Gefässen. Mit 3 Figurentafeln. 4. Leipzig. 1843. 2 Thlr. 16 ggr.

Woelfer, M.: Die neuerfundene Pumpenmühle, oder: Anweisung, alle Arten von Mühlen an Brunnen oder stehenden Gewässern anzulegen und durch Pumpenwerke in Betrieb zu setzen. Mit 10 lithog. Tafeln (in gr. 4.). gr. 8. Quedlinburg. 1843. 1 Thlr. 8 ggr.

Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente von Poncelet. Aus dem Französischen übersetzt und mit einem Anhange vermehrt von J. W. Lahmeyer. Braunschweig. 1844. 8. 1 Thlr. 20 ggr.

Maschinentafel in Farben, eine Dampfmaschine darstellend. Für höhere und niedere Lehranstalten. In gr. Imper. Folio. Mannheim. 1843. Auf Leinwand mit Holzstäben. 4 Thlr.
Erklärung dazu. 4. Ebend. 1843. geh. 3 ggr.

Werkzeichnungen, oder praktische und detaillirte Zeichnungen, Beschreibungen und Erläuterungen der verschiedenen Arten von ausgeführten Maschinen und Maschinerien. Herausgeb. v. C. T. N. Mendelssohn, unter Mitwirkung mehrerer Techniker. 2r Bd. 1s Heft; enth. Furnier-Sägemaschine nach franz. Princip. Kreissäge für Tischler, Instrumentenmacher etc. nach A. Galloway. — Transportable eiserne Winde nach engl. Construction. (6 lithogr. Blätter. gr. Fol.) gr. 8. Berlin. 1843. 1 Thlr. 12 ggr. (Man vergl. Liter. Ber. No. XIV. S. 215.)

Digitized by Google

Mallets Bericht über die atmosphärische Eisenbahn von Dublin nach Dalkey in Irland, ausgeführt und in Betrieb gesetzt von den Herren Clegg und Samuda. Mit einem Stahlstich: Ansicht der atmosphärischen Eisenbahn von Dublin nach Dalkey. Darmstadt. 1844. 8. 6 ggr.

Taffe: Application de la mécanique aux machines le plus en usage, mues par l'eau, la vapeur, le vent et les animaux et à diverses constructions. 3me édit. In-8. Paris. 1843. 10 fr.

Lewesky, N. B.: Notice sur la machine à compression atmosphérique à triple moteur, suivie de réflexions, lettres, pétitions etc. avec 4 feuilles. Paris. 1844.

Fourneyron, M. B.: Table pour faciliter les calculs des formules relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux de conduite, et principalement destinée à abréger les calculs et à éviter les tâtonnemens, etc. In-4. de 2 feuilles. Paris. 1844.

Astronomie.

Möbius, A. F.: Die Hauptsätze der Astronomie zum Gebrauche bei Vorlesungen für Gebildete. 2te Aufl. Leipzig. 1844. gr. 8. 4 ggr.

Stiefel, E.: Das Planetensystem, durch ein Drathgerippe, Breitebahn genannt, dargestellt, wodurch die interessanten Erscheinungen an den 11 Planeten und 4 Kometen, namentlich die schiefe Lage ihrer Bahnen, die gefährliche Stellung mehrerer Kometen, die Bewegung der Sonne und der Sonnenflecken, sogar der Umlauf der Sternschnuppen um die Sonne, Jedermann, besonders der Schuljugend, aufs Deutlichste veranschaulicht werden können. (Auf Pappe in einer Kiste.) Nebst Anweisung in 8. Schwäbisch Hall. 1843. 5 Thlr. — Die Anweisung allein 8 ggr.

Betrachtungen über die Anordnung des Sternsystems. Ein Vortrag im wissenschaftlichen Vereine zu Berlin am 3. Februar 1844 gehalten von J. F. Encke. Berlin. 1844. 8. 6 ggr.

Mutel: Elémens d'astronomie ou cosmographie. 2me édition. In-12. Paris. 1843. 1 fr. 80 c.

Les usages de la sphère, des globes célestes et terrestres; par Delamarche. Huitième édition. In-8. de 15 feuilles ½ plus 8 cartes. Paris. 1844. 3 fr.

Schumacher, C. A. v.: De vigtigste af Astronomiens Hovedlaerdomme, populaert fremsatte. 1. Levering. 8. Frolund og Flinch. Copenhagen. 1843. 6½ A. 48 ß. (compl. i 2 Lev.)

Fluth und Ebbe von F. H. Germar. Nach den englischen Beobachtungen. Magdeburg. 1842. 8. 16 ggr.

Kleiner astronomischer Almanach auf das Jahr 1844. Vorzüglich zum Gebrauch der Seeleute herausgegeben von Herrmann Karsten. Rostock und Leipzig. 8. 12 ggr.
Die Einrichtung ist aus den früheren Jahrgängen bekannt.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Herausgegeben von C. L. Edlen von Littrow und F. Schaub. 22. Th. (Neuer Folge 2. Bd.) Mit 3 lith. Tafeln. gr. 4. Wien. 1843. 2 Thlr. 16 ggr.

Middelboe, S.: Haandbog for den practiske Navigateur. 8. Copenhagen. 1843. 4 R. 48 s.

Physik.

Anfangsgründe der Physik. Vom Professor A. von Ettingshausen. Zweite Lieferung.
M. vergl. Literar. Bericht. No. XV. S. 237.

Brandes, H. W.: Vorlesungen über die Naturlehre für Leser, denen es an mathematischen Kenntnissen fehlt. 2te verm. u. verb. Auflage, besorgt von C. W. H. Brandes und W. J. H. Michaelis. Mit Kupfern. 1ste Lieferung. gr. 8. Leipzig. 1844. geh. 1 Thlr.

Pouillet: Lehrbuch der Experimentalphysik und der Meteorologie. Nach der 3ten Original-Ausgabe aus dem Französischen übersetzt, mit Zusätzen und Ergänzungen versehen von C. H. Schnuse. Band 2. Mit 18 Tafeln Abbildungen. gr. 8. Quedlinburg. 1843. 2 Thlr. 20 ggr.

Derselbe: Lehrbuch der Physik und Meteorologie, für deutsche Verhältnisse frei bearbeitet von Dr. Joh. Müller. 9—12 Lief. oder II. Bd. 4—6 Lief. Braunschweig. 1844. gr. 8. à 12 ggr.

Lautenschläger, Dr. G.: Figurentafeln zur Physik, nebst ausführlicher Erklärung. 1. Heft. 3. Aufl. Lex.-8. Mit 12 Tafeln. Darmstadt. 1843. 12 ggr.

Sammlung von Lehrsätzen, Formeln und Aufgaben aus der gewöhnlichen Rechenkunst, Mathematik und Physik von Dr. J. Götz. Vierter Theil (Sammlung von Lehrsätzen, Formeln und Aufgaben aus der Physik, Astronomie und mathematischen Geographie). Berlin. 1844. 8. 1 Thlr. 4 ggr.
M. vergl. Literar. Bericht. No. XV. S. 227.

Digitized by Google

Osann, Dr. G. W.: Neue Beiträge zur Chemie und Physik, mit galvanokaustischen Abbildungen. Des 1sten Beitrags 2te Liefer. 8. Würzburg. 1843. 8 ggr.

Deguin, M.: Cours élémentaire de physique. 4 édit. 2 volls. in 8. ensemble de 57 feuilles, plus 12 pl. Paris. 1844. 10 fr.

Bouchardat, A.: Cours des sciences physiques à l'usage des élèves de philosophie rédigé d'après le programme du conseil royal de l'instruction publique. Partie 1. 2. Paris. 1844. 7 fr.

Becquerel, M.: Traité de Physique considérée dans ses rapports avec la chimie et les sciences naturelles. Tom. 2. 8. de 41 feuilles. Paris. 1844. 7 fr. 50 c.

Sommerville: On the Connexion of the physical sciences. 5th edit. London. 1844. 10 sh. 6 d.

Bird, G.: Elements of Natural Philosophy, being an experimental Introduction to the Study of the Physical Sciences. 2d edition, revised and enlarged. 1843. 12 sh. 6 d.

Trattato di fisica elementare, dell' abate Francesco Zantedeschi. Venezia. 1843. Vol. 1. In-12.

Mozzoni: Elementi di fisica generale ad uso delle scuole di filosofia. Settima edizione con nuove aggiunte e correzioni per cura di L. Masieri. Milano. 1843. In-8.

Ducoin-Girardin: Trattenimenti sulla fisica e sue più curiose applicazioni. Versione di Carlo A. Valle. Torino. 1843. In-8. 2 tavole litografiche.

Scinà, abbate Domenico. Elementi di fisica. Seconda edizione milanese con aggiunte. Milano. 1842. Tomo III. In-12. e 5 tavole. Tomo IV. ed ultimo. 1843. In-12. 4 tavole.

Scarpati: Catechismo di fisica, ec. Napoli. 1842. In-8.

Trattato di fisica elementare, complicato dal professore Carlo Rossari. Milano. 1843. In-16. 2 tavole.

Elementi fisico-chimici, del dr. Maurizio Reviglio, professore di botanica e materia-medica nella r. scuola veterinaria, ad uso degli allievi della medesima. Fossano. 1843. In-8.

Fardely, Will.: Der elektrische Telegraph, mit besonderer Berücksichtigung seiner praktischen Anwendung für den gefahrlosen und zweckmässigen Betrieb der Eisenbahnen, nebst Beifügung der neuesten Einrichtungen und Verbesserungen, und einer ausführlichen Beschreibung eines elektro-magnetischen Drucktelegraphen. Mit erläuternden Zeichnungen. gr. 8. mit 2 Taf. in ½ Fol. Mannheim. 1844. 1 Thlr.

Galletti, B. et Jouain: De l'Electricité en général et de ses

applications en particulier. 1. partie, avec 2 feuilles. Paris. 1844. 8.

Lardner, D. and C. V. Walker: Manual of Electricity and Meteorology. Vol. 2. London. 1844. 8. 6 s.

Francis, G.: Electrical Experiments illustrating the Theory, Practice and Application of the Science of Free or Frictional Electricity, containing the Methods of Making and Managing Electrical Apparatus of every description, with numerous Illustrative Engravings. London. 1844. 8. cloth. 4 sh.

Noad, H. M.: On Electricity, comprising Galvanism, Magnetism, Electro-Magnetism, Magneto-and Thermo-electricity. New edition illustr. by nearly 300 woodcuts. 8. London. 1844. 14 sh.

Intorno ai processi meccanici atti a sviluppare ne'corpi solidi l'elettricità statica, e di alcune applicazioni che ne derivano, memoria di Antonio Perego, professore di fisica e storia naturale nell' i. r. liceo di Brescia. Brescia. 1843. In-8.

Scoresby, W.: Magnetical Investigations. Part 2, comprising Investigations concerning the Laws or Principles affecting the power of Magnetic Steel Plates or Bars in combination as well as singly, under various conditions as to mass, hardness, quality, form etc. as also concerning the comparative powers of hast Iron. 8. London. 1843. cloth 10 sh. 6 d.

Palmieri, Luigi e P. Santi Linari: Nuove esperienze sulle induzioni del magnetismo terrestre. Napoli. 1843. In 4.

Instructions pour le daguerréotype et l'usage de l'appareil Gandin, suivi d'une Notice abrégée de l'électroplastique et le travail au bain d'argent. In-8. de 3 feuilles. Paris. 1844.

Kiener, Jos.: Almanach théorique et pratique de l'éclairage par le gaz. In-12. 3 feuilles. Paris. 1844.

Nahl, Dr. F. G.: Meteorologische und naturhistorische Annalen des Jahres 1843. 2 Thlr. 12 ggr. 2. Heft. gr. 8. Darmstadt. 1844.

Annalen für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenständ, redigirt von Grunert, Koller, Kreil, Lamont, Plieninger, Quetelet, Sticffel, herausgegeben von Dr. J. Lamont.

Jahrgang 1843. Heft VI. München. 1843. 8. Magnetische Terminbeobachtungen in Mailand, München, Prag, Kremsmünster 1842. — Meteorologische und magnetische Beobachtungen in Cracau, 1841 und 1842, von Herrn Professor Weisse. — Meteorologische Beobachtungen, angestellt an der kgl. Sternwarte in Neapel in den Jahren 1841 und 1842 von Herrn Capocci. — Resultate der magnetischen Messungen des Herrn Kreil in Böhmen. — Stündlicher Gang der Temperatur und des Luftdruckes, beobachtet im Jahre 1843 an der königl. Sternwarte bei München, erste Jahreshälfte. Meteorologische Beobachtungen zu Ofen 1842, von Herrn Professor Mayer. — Vermischte Nachrichten vom Herausgeber.

Digitized by Google

Jahrgang 1843. Heft VII. Magnetische Störungen, beobachtet im magnetischen Observatorium in München während des Jahres 1842. — Meteorologische Beobachtungen an der k. Sternwarte in Mailand, angestellt im Jahre 1842, mitgetheilt von Herrn Capelli. — Regenmenge zu Carlsruhe. Von Herrn Prof. Stieffel. — Monatliche Resultate der Windrichtung und Stärke in Regensburg, Würzburg, Hof, Schönthal, Mergentheim, Schussenried, Giengen an der Brenz, Tuttlingen, Issny, 1841. — Tägliche Beobachtungen der Windrichtung und Stärke in Wien, Salzburg, Stuttgart, Bensberg und Cronberg, 1842. — Meteorologische Beobachtungen in Breda von Herrn Wenkebach. — Meteorologische Beobachtungen in Grätz, 1842. Von Herrn Professor Dr. Gintl. — Uebersicht der meteorologischen Beobachtungen zu Bodenbach im Jahre 1842 von dem k. Forstmeister Herrn Seidl. — Zusammenstellung der monatlichen Mittel der Temperatur und des Luftdruckes in Prag und Schössl 1841, dann in Wien, Salzburg, Hohenpeissenberg, Landsberg, Freysing, Dillingen, Mallersdorf, Burglengenfeld, Gunzenhausen, Ansbach, Neustadt a. d. A., Würzburg, Hof, Cronberg, Bensberg, Prag, Schössl, Bodenbach, Utrecht, 1842. — Menge des meteorischen Wassers 1841 in Lyon, Parma, Hohenpeissenberg, München, Regensburg, Landsberg, Neustadt a. d. A., Issny, Giengen an der Brenz, Schussenried, Schönthal, Schössl, Prag. — Monatliche Mittel des Dunstdrucks in Wien, Schussenried, Hof, Würzburg, Bissingen, Giengen an der Brenz, Ansbach, Burglengenfeld, 1841. — Meteorologische Beobachtungen in Carlsruhe, 1842, von Herrn Professor Stieffel.

Froebel, Dr. J.: Grundzüge eines Systemes der Krystallologie oder der Naturgeschichte der unorganischen Individuen. 8. Zürich und Winterthur. 1843. geh. 21 ggr.

Geinitz, Dr. H. B.: Ueber die in der Natur möglichen und wirklich vorkommenden Krystallsysteme. gr. Lex.-8. Mit 3 lith. Tafeln. Dresden. 1843. geh. 8 ggr.

Hartmann, Dr. C.: Grundzüge der Geologie in allgemein fasslichem Vortrage. Mit 107 (eingedruckten) Abbildungen. gr. 8. Leipzig. 1843. geh. 2 Thlr. 16 ggr.

Burmeister, Dr. H.: Geschichte der Schöpfung. Eine Darstellung des Entwickelungsganges der Erde und ihrer Bewohner. gr. 8. Leipzig. 1843. geh. 1 Thlr. 19¼ ggr.

Bertrand, Dr. A.: Die Revolutionen des Erdballs. Nach der 5ten verm. und mit neuen Anmerkungen von Arago, Elie de Beaumont, Alex. Brongniard u. A. bereicherten Ausgabe des französischen Originals für das Bedürfniss deutscher Leser frei bearbeitet von Dr. P. von Maack. Mit 5 Steindrucktafeln. gr. 8. Kiel. 1844. geh. 1 Thlr. 12 ggr.

Hugi, F. J.: Die Gletscher und die erratischen Blöcke. Lex.-8. Solothurn. 1843. geh. 1 Thlr. 18 ggr.

Hopkins, E.: On the Connexion of Geology with Terrestrial Magnetism, showing the general Polarity of Matter, the Meridional

Structure of Crystalline Rocks, their Transitions, Movements, and Dislocations, including the Sedimentary Rocks, the Laws regulating the Distribution of Metalliferous Deposits, and other Magnetic Phenomena. London. 1844. 8. 24 engravings. 10 sh. 6 d.

Vermischte Schriften.

Videnskabernes Selskabs naturvidenskabelige og mathematiske Afhandlinger, X. 4. Med 28 Tavler. Copenhagen. 1843. 2 Rbd. 48 Sk.

Astronomisch-meteorologisches Jahrbuch für Prag von K. Kreil. Dritter Jahrgang. 1844. Prag. 1 Thlr. 8 ggr.

Ausser der gewöhnlichen astronomischen Ephemeride enthält dieser Jahrgang die drei folgenden lesenswerthen Aufsätze: Magnetische Störungen. Bessel's Bestimmung der Parallaxe eines Fixsterns. Doppler's Erklärung des farbigen Lichts der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne. Diese wahrhaft populär gehaltenen Aufsätze sind in jeder Beziehung geeignet, richtige Ansichten über die behandelten Gegenstände auch in grösseren Kreisen gebildeter Leser zu verbreiten, und genügen den Bedürfnissen und Anforderungen der Zeit.

Jahrbuch für 1844. Herausgegeben von H. C. Schumacher, mit Beiträgen von Steinheil, Moser und Argelander. Stuttgart und Tübingen. 1844. 8.

Diese Abtheilung des Jahrbuchs enthält ausser den gewöhnlichen Tafeln drei interessante Abhandlungen. Zuerst ein Schreiben des Herrn Professor von Steinheil in München an den Herausgeber über mehrere von demselben theils neu erfundene, theils verbesserte ältere Instrumente, welche wir hier nur dem Namen nach aufführen können, die Leser des Archivs aber dringend aufzufordern nichtunter lassen können, sich mit diesen neuen sinnreichen Einrichtungen bekannt zu machen. Die einzelnen Rubriken sind folgende: Meridiankreis; Astrograph; Heliotrop (eine neue sehr einfache Einrichtung dieses bekannten von Gauss erfundenen Instruments, auf welche wir besonders die Geodäten aufmerksam machen); Mikrometer; Beiträge zur Optik (der Verf. hat Frauenhofers Fernröhre sorgfältig untersucht und ihre Dimensionen ermittelt); Correctionsfernrohr; Prismenkreise; Photometer; Technik; Galvanische Uhren; Pyroscop (eine Vorrichtung, den Ort eines Feuers in der Nacht mit Sicherheit zu bestimmen, welche sehr einfach ist und wohl der Aufmerksamkeit der Behörden empfohlen zu werden verdient; eine von der v. Steinheil'schen, so viel uns noch erinnerlich ist, ganz verschiedene Einrichtung zu gleichem Zwecke ist früher von Littrow in einer besondern Schrift beschrieben worden); Optische Probe (zur Prüfung des Gehalts der Biere); Weingeistprobe (Branntweinwaage).

— Hierauf folgt der zweite Aufsatz von Moser über seine Entdeckung des sogenannten unsichtbaren Lichts. — In dem dritten Aufsatze ist ein von uns seit längerer Zeit eifrig gehegter Wunsch von Herrn Professor Argelander in Bonn auf eine ausgezeichnete Weise erfüllt worden. Der Herr Verf. hat nämlich in diesem ziemlich langen und sehr deutlich geschriebenen Aufsatze Liebhabern der Astronomie, welche nicht im Besitz kostbarer Instrumente und vieler mathematischer Kenntnisse sind, eine Anweisung ertheilt, auf welche Himmelserscheinungen sie ihr Augenmerk vorzüglich zu richten und wie sie dieselben zu beobachten haben, wenn sie durch ihre Beobachtungen der Wissenschaft so viel als möglich nützen wollen, und betrachtet nach einer allgemeinen Einleitung über die Art zu beobachten überhaupt nach und nach die folgenden Erscheinungen mit hinreichender Ausführlichkeit: das Nordlicht, das Zodiacallicht, die Sternschnuppen, die Dämmerung, die Milchstrasse, die Grössen und Farben der Sterne, die veränderlichen Sterne. Ein Aufsatz wie der vorliegende hat uns längst gefehlt, und wir legen das aufmerksame Studium desselben Liebhabern der Astronomie dringend an's Herz. Dann wird es hoffentlich auch fernerhin nicht mehr Leute geben, die, nur mit einem sehr mässigen Fernrohre versehen, vielleicht viele Nächte damit verschwenden, einen in einer gewöhnlichen Zeitung angekündigten telescopischen Cometen aufzusuchen, und, wenn sie denselben gefunden zu haben glauben, dann doch nicht wissen, ob sie an dem angegebenen ungefähren Orte nicht einen blossen Nebelfleck gesehen haben, weil es ihnen sowohl an allen Mitteln, als auch an allen Kenntnissen zu einer genauen Ortsbestimmung fehlt. Noch bedauerlicher aber ist es, wenn dann dergleichen Leute, wie sie uns leider wirklich vorgekommen sind, sich wohl gar für Astronomen halten, indem sie doch genaue winkelmessende Instrumente kaum dem Namen nach kennen, und nur mit Mühe den pythagoräischen Lehrsatz zu beweisen im Stande sind. Wir hoffen daher zuversichtlich, dass auch in dieser Beziehung der treffliche Aufsatz des Herrn Professor Argelander sehr wohlthätig wirken und Leute wie die vorher näher charakterisirten veranlassen werde, ihre Thätigkeit auf nützlichere Dinge zu richten und jene schwierigern Beobachtungen den eigentlichen Astronomen zu überlassen.

The Cambridge mathematical Journal. No. XX. February. 1844. — I. On the Lunar Theory. Continued from Vol. III. p. 257. — II. On the Equation $(D+a)^n y = X$. — III. Elementary Demonstration of Dupin's Theorem. — IV. Note on a Definite Multiple Integral. — V. Note on some Points in the Theory of Heat. — VI. On the Intensity of Light in the Shadow of a very small Circular Disk. — VII. On the Motion of the Centre of Gravity of Broken Bodies. By W. Walton. M. A. Trinity College. — VIII. On the inverse Calculus of Definite Integrals. By George Boole. — IX. On a New Species of Equations of Differences. — X. Notes on Magnetism. By R. L. Ellis, M. A. Fellow of Trinity College. — XI. Addendum to Art. II.

Digitized by Google

Bitte.

Bei dem Erscheinen dieser Nummer des Literarischen Berichts, welche die erste des fünften Theils des Archivs ist, ersuche ich die geehrten Leser dieser Zeitschrift, mir etwanige Wünsche wegen der Einrichtung des Literarischen Berichts mitzutheilen, und mich mit desfallsigen Rathschlägen gütigst zu unterstützen, indem es mein eifrigster Wunsch ist, durch denselben, so wie durch die Herausgabe der Zeitschrift überhaupt, dem betreffenden Publikum so viel als möglich zu nützen. Alle mir zu machenden Zusendungen werden auf dem Wege des Buchhandels sicher und auch stets in möglichst kurzer Zeit in meine Hände gelangen.

Der Herausgeber.

Digitized by Google

XVIII.
Literarischer Bericht.

Schriften über Unterrichtsmethode.

Ueber Zweck und Methode des mathematischen Unterrichts auf Gymnasien nebst angeknüpftem Versuche einer einfacher begründeten Auflösung der sectio aurea von Joseph Helmes, Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Celle. Hannover. 1844. 4.

Dieses manche gute Bemerkung enthaltende Schulprogramm enthält namentlich auch eine Würdigung einer unter dem 28. Februar 1843 in Betreff des mathematischen Unterrichts erlassenen Verfügung des Churfürstlich-Hessischen Ministeriums des Innern auf ein von der Schul-Commission für Gymnasialangelegenheiten eingezogenes Gutachten. Selten ist wohl eine das wahre Wesen einer Wissenschaft und deren Bedeutung für den Schulunterricht so durch und durch verkennende Verordnung erlassen worden. Nun es giebt ja in Churhessen auf dessen Landes-Universität und Gymnasien treffliche Mathematiker und ausgezeichnete, völlig mit dem Wesen der Mathematik und ihrer Bedeutung als Unterrichtsmittel vertraute Lehrer genug, welche die Wissenschaft doch nach wie vor in ihrem Geiste behandeln und vortragen werden, wenn sie auch in Bezug auf den Umfang des Unterrichts in materieller Beziehung sich innerhalb der vorgeschriebenen Gränzen zu bewegen genöthigt sind, was man sich aber auch leicht gefallen lassen kann, da bei dem mathematischen Schulunterrichte am Ende doch Alles auf die Methode und den Geist ankommt, in welchem derselbe ertheilt wird. Ueberdies wird ja auch, wofür sich u. A. Th. II. S. 212. des Archivs ein sehr in die Augen fallender höchst erfreulicher Beweis findet, in Churhessen von den höchsten Personen dem mathematischen und physikalischen Unterrichte so viele Aufmerksamkeit und Theilnahme geschenkt, dass von der in dem vorliegenden Programme gehörig gewürdigten Verordnung ein dauernder nachtheiliger Einfluss auf das Gedeihen des mathematischen Unterrichts auf den Churhessischen Lehranstalten nicht befürchtet werden darf.

Die im Anhange zu diesem Programme (S. 27 — 34.) abgedruckten Bemerkungen über die sectio aurea stimmen im Ganzen mit dem Inhalte des im Archive Thl. IV. S. 15. abgedruckten Aufsatzes überein. Damit es nun nicht scheine, als habe der Herr Verfasser wissentlich ein und denselben Gegenstand an zwei verschiedenen Orten veröffentlicht, so ist der Herausgeber des Archivs, in dessen Händen der erwähnte Aufsatz sich mindestens ein ganzes Jahr vor seinem Abdrucke befand, gern erbötig, in dieser Beziehung alle Schuld, wenn überhaupt eine daraus erwachsen kann, auf sich zu nehmen.

Sind die Naturwissenschaften ein Bildungsmittel? Eine literärische Streitfrage, der öffentlichen Beurtheilung vorgelegt von Dr. Elias Fries, Professor an der Universität zu Upsala. Aus dem Schwedischen vom Professor Hornschuch. Dresden und Leipzig. 1844. 8. 8 ggr.

Allerdings war diese kleine Schrift eines der ersten schwedischen Naturforscher der Uebersetzung, zu deren Herausgabe der Herr Uebersetzer durch Herrn Hofrath Reichenbach in Dresden besonders veranlasst wurde, und der Verpflanzung auf deutschen Boden werth. Das Original findet sich in der unter dem Titel: Botaniske utflygter. En samling af strödda tillfällig hetsskrifter. Första bandet. Upsala. 1843. 8. erschienenen Sammlung kleiner Schriften des Herrn Prof. Elias Fries. Möge der Inhalt dieser Schrift immer mehr beherzigt, und den Naturwissenschaften immer allgemeiner der hohe Rang als Bildungsmittel des jugendlichen Geistes und Herzens angewiesen werden, welcher denselben in jeder Beziehung so sehr gebührt, wie nur derjenige gehörig zu beurtheilen versteht, der durch eignes sorgfältiges Studium selbst bis zu einer gewissen Tiefe in diesen Zweig der menschlichen Kenntnisse eingedrungen ist. Andere sollten sich ein Urtheil nicht anmassen, wie leider namentlich nur zu oft von einer gewissen Seite her geschieht. Man kann nur mit Bedauern auf solche aus Unkenntniss und Unwissenheit hervorgegangene Urtheile herabsehen.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Versuch einer heuristischen Entwickelung der Grundlehren der reinen Mathematik zum Gebrauche bei dem Unterrichte auf Gelehrtenschulen von Carl Gustav Wunder, Professor und Lehrer der Mathematik und Physik an der Königlichen Landesschule St. Afra zu Meissen. Zweite durchaus umgearbeitete und um Vieles vermehrte Ausgabe. Leipzig. 1844. 8. 1 Thlr. 15 ggr.

Dieses vorzügliche, mit grosser Gründlichkeit und zweckmässiger Kürze verfasste Schulbuch erscheint in dieser neuen Auflage in einer vielfach veränderten Gestalt mit beträchtlichen Ver-

mehrungen. So viel uns die erste, jetzt gerade nicht vor uns liegende Auflage noch im Gedächtnisse ist, sind in dieser neuen Auflage die Beweise der verschiedenen Sätze, ohne dieselben vollständig zu entwickeln, mit allen nöthigen Hinweisungen auf frühere Sätze etwas weiter ausgeführt worden, was nur gebilligt werden kann, da das Buch nun mehr die Gestalt eines eigentlichen Compendiums erhalten hat. Der Inhalt desselben erstreckt sich über die gemeine und allgemeine Arithmetik, die Elemente der Analysis, die Algebra bis einschliesslich zu den Gleichungen des dritten Grades, die unbestimmte Analytik, die ebene und sphärische Trigonometrie, die Elemente der analytischen Geometrie, und die Kegelschnitte. In einem Anhange ist eine Reihe zweckmässig gewählter Uebungsaufgaben beigegeben.

Rocco, Carlo: Catechismo di matematiche pure ad uso degli studii generali. Napoli. 1842. In·8.

Arithmetik.

Neun Abhandlungen über eben so wichtige als interessante Gegenstände aus der Algebra und niedern Analysis. Für höhere Lehranstalten, so wie zum Selbstunterrichte. Von den Professoren Leféhure de Fourcy, M. Vincent, L. F. Ritter. Stuttgart. 1844. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Ständen nicht die Worte: „Für höhere Lehranstalten, so wie vorzüglich zum Selbstunterrichte" auf dem Titel, so könnte man durch dessen übrige Fassung wohl zu der Vermuthung verleitet werden, in dieser Schrift etwas Neues in materieller oder formeller Beziehung zu suchen, worin man sich aber getäuscht finden würde, da dieselbe nichts als allgemein bekannte Dinge enthält. Ihr Inhalt ist folgender. Die Anwendung der quadratischen Gleichungen zum Bestimmen des Maximums und Minimums der Functionen. Von L. F. Ritter. — Die Auflösung der unbestimmten quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten. Von L. F. Ritter. — Die combinatorischen Grundoperationen. Von L. F. Ritter. — Die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von L. F. Ritter. — Die höheren arithmetischen und geometrischen Reihen. Von L. F. Ritter. Der S. 108. gegebene Begriff der höheren arithmetischen und geometrischen Reihen ist ziemlich unbestimmt; überhaupt sieht man aus dem ganzen Aufsatze gar nicht, was der Verfasser unter höheren geometrischen Reihen verstanden wissen will, in einem so völlig bestimmten Sinne nämlich, in welchem gewöhnlich der Begriff der höheren arithmetischen Reihen gefasst wird. — Trigonometrische Formeln und Reihen, welche in der höheren Mathematik eine grosse Anwendung finden. Von Leféhure de Fourcy. In einer Note zu dieser Abhandlung (S. 160.) sagt Herr Ritter: „Die Zahl 2,7182818

Digitized by Google

machte Neper (geboren zu Marchiston *) in Schottland 1550, gestorben 1618), der Erfinder der Logarithmen, zur Basis seines Logarithmensystems", und nennt auch nachher immer Nepersche Logarithmen die Logarithmen, deren Basis die obige Zahl e ist. Das ist falsch. Bekanntlich ist schon vor ziemlich langer Zeit ein Streit über die Neperschen Logarithmen zwischen Karsten und Kästner geführt worden. In der zweiten Sammlung astronomischer Abhandlungen. Göttingen. 1774. S. 68. hat Kästner die Basis der Neper'schen Logarithmen, die Zahl nämlich deren Neper'scher Logarithmus die Einheit ist, berechnet, und für dieselbe den Werth 9999999,00000005 gefunden. Die einzig richtige Benennung für die Logarithmen, deren Basis die Zahl e ist, ist der auch ganz gewöhnliche Name natürliche oder hyperbolische Logarithmen. Wozu also eine neue und dazu falsche Benennung? Von der Convergenz und Divergenz der Reihen ist in der vorliegenden Abhandlung überhaupt nicht die Rede. — Die trigonometrische Auflösung der binomischen Gleichungen von jedem Grade. Von Lefébure de Fourcy. — Die trigonometrische Auflösung der allgemeinen Gleichungen des dritten Grades. Von Lefébure de Fourcy. — Von der Berechnung des Fehlers, welcher aus der Anwendung der Proportion entspringt, die der Gebrauch der Logarithmentafeln vorschreibt. Von M. Vincent. — Uebrigens ist die Darstellungsweise in dieser Schrift deutlich, und dieselbe kann denjenigen Anfängern, welche über die ganz gewöhnlichen Elemente der Algebra hinausgehen wollen, immerhin empfohlen werden, welches wahrscheinlich auch der Zweck ist, den der Verfasser durch dieselbe zu erreichen beabsichtigte, da ein anderer nicht wohl denkbar ist. Für Lehrer enthält sie, wie schon bemerkt worden ist, in keiner Beziehung etwas Neues.

Leichte und sichere Methode sämmtliche Wurzeln einer höhern numerischen Gleichung aufzusuchen und zu berechnen. Für Schüler und praktische Rechner. Von G. A. Jahn. Leipzig. 1844. 8. 12 ggr.

Laut der Einleitung hat der Verfasser durch dieses eine ziemliche Anzahl vollständig ausgeführter Beispiele enthaltende Schriftchen vorzüglich praktischen Rechnern zu nützen gesucht, und sich daher in demselben weniger auf Demonstrationen als auf Rechnungsregeln eingelassen, überhaupt so wenig als möglich Vorkenntnisse vorauszusetzen gestrebt. Schülern der Algebra, wenn der Verfasser darunter Schüler auf wissenschaftlichen Lehranstalten versteht, möchten wir aber doch die Beweise nicht zu erlassen geneigt sein. Denn eine wahre Einsicht in das Wesen einer Methode, welche doch auf höheren Lehranstalten zunächst und vorzugsweise der Zweck alles Unterrichts sein muss, wird nur durch völlig strenge Beweise aller aufgestellten Sätze erreicht.

Colenso. J. W.: The Elements of Algebra, designed for the use of Schools. 4th edition, revised and corrected. 12mo. Cambridge. 1844. cloth. 4 sh. 6 ds.

Bonnycastle's Introduction to Algebra. 12th edition, corrected and improved by Maynard. London. 1844. 12mo. 4 sh. boards. A Key to the same. 12mo. 4 sh. 6 ds.

*) Merchiston.

Bonnycastle's Treatise on Algebra. 2d edition. 2 vols. 8vo. London. 1844. 1 L. 5 sh. 6 ds.

Nicholson and Rowbotham, Practical System of Algebra, designed for the use of Schools and Private Students. 5th edition, carefully examined. 12mo. London. 1844. boards. 5 sh.

Toffoli: elementi di algebra. Venedig. 2,⁰¹ L.

Tweene Grader Algebra i sammandrag af G. R. Weidenhielm, Loirent, Lärare wid Militärskolun i Jönköping. Jönköping, J. P. Lundström; 103 sid. 8to. h. 28 sk.

W. Croll (Onderwyzer aan het Voorbereidings-Institut te Medemblik): Algebraische toepassingen op de beginselen der stelkunst van S. F. Lacroix, van $ 1 tot $ 200. Eerste deel. gr. 8vo. Te's Gravenhage en te Amsterdam, bij Gebr. van Cleef. f. 1,00.

Der zweite, die erste Abtheilung der Integralrechnung enthaltende Theil der in No. II. S. 28. des Literarischen Berichts angezeigten trefflichen Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées principalement d'après les méthodes de M. A. F. Cauchy, et étendues aux travaux les plus récens des géomètres par M. l'Abbé Moigno. 10 fr. ist nun erschienen.

Connel, J.: The Elements of Differential and Integral Calculus; with Numerous Examples and Familiar Illustrations. Designed for the Use of Schools and Private Students. London. 1844. 8vo. cloth. 9 sh.

Ramus, C.: Differential-og Integral-Regning. 4. Copenhagen. 5 Rbd. 32 sk.

Theorema Taylorianum. Dissertatio inauguralis mathematica, quam etc. auctoritate et consensu amplissimi Philosophorum ordinis in Literarum Universitate Jenensi ad magisterii dignitatem rite impetrandam publice defendet auctor Oskar Schlömilch. Jenae. MDCCCXXXXIV. 4.

Diese Dissertation eines jüngeren Mathematikers, der sein Talent schon durch mehrere ausgezeichnete Arbeiten bewährt hat, und von dem die Wissenschaft noch manche schöne Frucht zu erwarten berechtigt ist, betrifft zwar einen bekannten, aber für die neuere strengere und gründlichere Behandlung der Differentialrechnung höchst wichtigen Gegenstand. Auch ist der von dem Verfasser für den Taylorschen Satz gegebene Beweis von dem von Cauchy gegebenen Beweise nicht wesentlich verschieden, und kann dies auch eigentlich nicht sein, weil es nach unserer Ueberzeugung schwerlich von den durch Cauchy in Anwendung gebrachten verschiedene Fundamente geben dürfte, auf denen sich das Taylor'sche Theorem, ohne über die natürlichen Gränzen der Differentialrechnung hinaus liegende Sätze in Anwendung zu bringen, mit gleicher Sicherheit aufführen liesse. Dessenungeachtet scheint uns diese Abhandlung in mehrfacher Beziehung verdienstlich zu sein, und zwar

u. A. deshalb, weil der Verfasser den Beweis unter einer mehr analytischen Form als dies von Cauchy, dessen Beweis eigentlich eine ganz synthetische Form hat, geschehen ist, dargestellt hat, was ganz der Natur der Wissenschaft gemäss ist. In's Einzelne können wir hier nicht weiter eingehen, empfehlen aber die Abhandlung allen denen, welche sich für die neueren so wichtigen Fortschritte der Wissenschaft interessiren. Dass übrigens der Verfasser gerade diesen Satz zum Gegenstande einer Habilitationsschrift wählte, kann nur vollkommen gebilligt werden, weil er dadurch am besten zeigen konnte, in welchem Geiste er einen der wichtigsten Theile der Mathematik bei seinen Vorträgen zu behandeln gesonnen sei; und dass auf diese Weise die Universität Jena einen mit den Fortschritten, welche in Bezug auf wahrhaft strenge und gründliche Behandlung die Wissenschaft in neuerer Zeit gemacht hat, so vollkommen vertrauten Lehrer wie den Verfasser gewinnt: dazu können wir derselben nur in jeder Beziehung Glück wünschen.

Santini, G.: Tavole dei logaritmi dei numeri naturali dall' 1 sino al 101000 e dei logaritmi dei seni, coseni, tangenti e cotangenti di minuto in minuto coi principali gradi di 10 in 10 secondi, precedute da un trattato elementare di trigonometria piana e sferica. Edizione seconda, augmentata, delle tavole logaritmiche per la somma e per la differenza del cel. Gauss. Padua. 1844. 6°° L.

Christison, J.: Mathematical Tables, consisting of the Logarithms of Numbers, Logarithms of Sines, Tangents and Secants, Natural Sines, and various other Tables, useful in Business, and in Practical Geometry, together with Tables of Interest, Probabilities of Life, and Annuities. — Carefully revised and corrected by John Christison, Mathematician. 8vo. Edinburgh. 1844. cloth. 4 sh. 6 ds.

In No. 503. der astronomischen Nachrichten hat Herr Th. Clausen zu Dorpat den folgenden Satz ohne Beweis mitgetheilt:

Alle Combinationen von ganzen Zahlen, deren Summe n ist, seien

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots.$$
$$\beta + \beta' + \beta'' + \ldots.$$
$$\gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots.$$

u. s. w.

und die Anzahl der gleichen $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots.$ seien $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots.$; der gleichen $\beta, \beta', \beta'', \ldots.$ seien $\mu, \mu', \mu'', \ldots.$; der gleichen $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots.$ seien $\nu, \nu', \nu'' \ldots.$; so ist

$$\frac{1}{\alpha.\alpha'.\alpha''\ldots.}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.\lambda}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.\lambda'}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.\lambda''}\ldots.$$
$$+\frac{1}{\beta.\beta'.\beta''\ldots.}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.\mu}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.\mu'}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.\mu''}\ldots.$$
$$+\frac{1}{\gamma.\gamma'.\gamma''\ldots.}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.\nu}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.\nu'}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.\nu''}\ldots.$$
$$+ \text{u. s. w.} = 1.$$

Zum Beispiel:

$$\begin{array}{ll}
7=7, & 7=3+2+2, \\
\quad 6+1, & \quad 3+2+1+1, \\
\quad 5+2, & \quad 3+1+1+1+1, \\
\quad 5+1+1, & \quad 2+2+2+1, \\
\quad 4+3, & \quad 2+2+1+1+1, \\
\quad 4+2+1, & \quad 2+1+1+1+1+1, \\
\quad 4+1+1+1, & \quad 1+1+1+1+1+1+1; \\
\quad 3+3+1; &
\end{array}$$

und

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1.2}+\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4.2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1.2.3}$$
$$+\frac{1}{3.3}\cdot\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.2.2}\cdot\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.2}\cdot\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1.2.3.4}$$
$$+\frac{1}{2.2.2}\cdot\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.2}\cdot\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2.3.4.5}$$
$$+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}=1.$$

In No. 485. derselben Zeitschrift hat Herr Clausen folgendes Theorem ebenfalls ohne Beweis mitgetheilt:

Die Summe der Reihe

$$1-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}+\ldots,$$

bis ein Glied verschwindet, ist

$$\frac{3}{n+3},\ \frac{2}{n+3},\ 0,\ -\frac{1}{n+3},\ 0,\ \frac{2}{n+3},$$

jenachdem n beziehungsweise von der Form

$$6v,\ 6v+1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

ist.

Geometrie.

Rump, Fr. H., Oberlehrer am Königl. Gymnasium in Coesfeld: Lehrbuch der ebenen Geometrie, zunächst für Gymnasien. 1. Bd.; enth. das System (zum Gebrauche für Schüler). gr. 8. mit 5 Figurentafeln. Coesfeld. 1844. 16 ggr.

Digitized by Google

Brettner, Prof. Dr. H. A.: Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien, Realschulen und höhere Bürgerschulen. Mit 7 Steintafeln. 3te Aufl. gr. 8. Breslau. 1844. 1 Thlr. 4 ggr.

Holzapfel: Grundlehren der Elementar-Geometrie. 3te Aufl. Constanz. 1843. 8 ggr.

Sonnenburg, O. A.: Leitfaden der gesammten Elementar-Geometrie für höhern Schulunterricht bearbeitet. Mit 5 Figurentafeln. gr. 8. Bremen. 1¼ Thlr.

Vincent, A. J. H.: Abrégé du cours de géometrie rédigé conjointement par l'auteur et par M. Bourdon. Ouvrage adopté par l'université. In-8. Paris. 1844. 4 fr. 50 c.

Mahistre, A.: Les Analogies de la géométrie élémentaire, ou la Géométrie dans l'espace, ramenée à la géométrie plane. Deuxième édition. In-8. de 5 pl. Chartres et Paris. 1844. 5 fr.

Lafremoire, H. Ch. de: Traité élémentaire de géométrie descriptive, renferment la partie exigée pour l'admission aux écoles Polytechnique, militaire, navale et forestière etc. Tome I. In-8. Tome II. In-8. Avec 15 planches. Paris. 1844. 5 fr.

Wichmann, M. L. G.: Proprietates maxime insignes pentagoni sphaerici cujus singulae quinque diagonales quadranti aequales ejusque projectionum in planum tum centralis tum stereographicae. (Mit 1 Figurentafel.) Göttingen. ⅔ Thlr.

Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie. Eine Beilage zu allen stereometrischen Lehrbüchern. Von Karl Koppe, Oberlehrer am Gymnasium zu Soest. Essen. 1843. 8. 6 ggr.

Diese kleine Schrift liefert einen elementaren Beweis des schon früher von dem Verfasser mit Hülfe der Integralrechnung gefundenen, und in Crelle's Journal Bd. XVIII. Heft 3. mitgetheilten Satzes über eine gewisse Art von Körpern, die der Verfasser nach dem Vorschlage des Herrn Geheimen Oberfinanzraths Beuth in Berlin jetzt Obelisken genannt hat. Ein anderer elementarer Beweis dieses Satzes von Steiner findet sich in Crelle's Journale Bd. XXIII. H. 3., dürfte sich aber seiner Scharfsinnigkeit ungeachtet allerdings für den Elementarunterricht nicht so eignen wie der in der vorliegenden Schrift gegebene Beweis. Wir empfehlen daher diese kleine Schrift den Lehrern der Mathematik, da wir der Meinung sind, dass der Satz in den stereometrischen Elementarunterricht aufgenommen zu werden verdient. In einem Anhange ist noch über die Ausmessung der Fässer auf elementarem Wege gehandelt. Hiebei denkt sich der Verfasser ein Fass als einen Theil eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre Hauptaxe entstandenen Sphäroids, abgeschnitten durch zwei auf der Axe senkrechte und vom Mittelpunkte gleich weit entfernte Ebenen. Die von dem Verfasser gefundene Regel ist ihrem Ausdrucke nach mit der nach Lambert benannten Fassregel einerlei. Nur aber müssen wir bemerken, dass dieser letzteren Regel eine ganz andere Entstehung der Fässer zum Grunde liegt. als die vom Verfasser angenommene, indem nach Lambert ein Fass auf folgende Art erzeugt wird.

Digitized by Google

AB sei ein aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser $AC = BC$ beschriebener Kreisbogen, und CM sei der nach dem Mittelpunkte M dieses Kreisbogens gezogene Halbmesser desselben. Errichtet man nun in einem beliebigen Punkte dieses Halbmessers eine senkrechte Linie DE, fällt auf dieselbe von den Endpunkten A und B des Bogens AB die Perpendikel AD und BE, und denkt sich die Figur $ABDE$ um die Linie DE wie um eine feste Axe herumgedreht, so stellt der auf diese Weise entstandene Körper ein Fass dar. Für solche Fässer ist die Lambert'sche Regel, die bekanntlich bei der Berechnung des Inhalts dieser Gefässe bei Weitem am häufigsten gebraucht wird, schwerer zu beweisen. Dass der von dem Verfasser für seine Regel bei der von ihm angenommenen Entstehungsart der Fässer gegebene Beweis so leicht und einfach ausfallen konnte, ist nicht zu verwundern, weil, wie aus der elementaren Lehre von den Kegelschnitten bekannt ist, die Formel für den cubischen Inhalt eines elliptischen Sphäroids ohne alle Schwierigkeit gefunden werden kann. Immerhin wird aber auch die von dem Verfasser gegebene Fassregel bei'm mathematischen Elementarunterrichte zweckmässig benutzt werden können, und zwar um so mehr und mit desto grösserem Nutzen, weil dieselbe mit der vielgebrauchten Lambert'schen Regel einerlei ist, wenn auch letztere allerdings eine andere Entstehungsart der Fässer voraussetzt, was nie unbeachtet bleiben darf. Uebrigens aber wird man auch der Natur der Sache nach über die eigentliche Entstehungsart dieser Gefässe nie ganz auf's Reine kommen können, und jede Fassregel nothwendig auf einer willkührlichen Voraussetzung beruhen müssen.

O'Brien, M.: Treatise on Plane Coordinate Geometry; or, the Application of the Method of Coordinates to the Solution of Problems in Plane Geometry. Part. I. 8. London. 1844. Plates, boards. 9 sh.

Grundzüge der Theorie der Kegelschnitte auf rein elementare Betrachtungen gegründet von A. Jacobi, Lieutenant in der Preussischen 6. Artillerie-Brigade. Breslau. 1844. 8. 6 ggr.

In dieser kleinen empfehlenswerthen, übrigens zum Theil nur Andeutungen enthaltenden Schrift, sind die Haupteigenschaften der Kegelschnitte im Sinne der neueren Geometrie entwickelt.

Lehrbuch der Mathematik für die höheren Klassen der Gymnasien u. s. w. von Dr. J. Götz. Erster Theil. Die Elemente der Kegelschnitte. Leipzig. 1844. 8. 12 ggr.

Die Lehre von den Kegelschnitten ist in dieser Schrift nach der gewöhnlichen gemischten algebraisch-geometrischen Methode abgehandelt. Hin und wieder hätte der Herr Verfasser wohl auf die Quellen verweisen können, aus denen er allem Anscheine nach geschöpft hat. Indess kommt darauf bei einem Elementarbuche nichts an, und es soll daher hiedurch keineswegs ein Tadel der Schrift an sich ausgesprochen sein.

Anhang zu dem Elementar-Lehrbuch der dynamischen Wissenschaften von A. Brix. Enthaltend eine Zusammenstellung der wichtigsten Theorien aus der niedern Analysis, Curvenlehre und Stereometrie.

Digitized by Google

Diese neue Auflage des Anhangs zu des Herrn Verfassers in vielen Beziehungen ausgezeichneten Elementar-Lehrbuche der Statik fester Körper, dessen erste Auflage 1831 erschienen ist, ist früher gedruckt worden als die neue Auflage der Statik selbst, und wohl noch nicht in den Buchhandel gekommen. Der Herr Verfasser hat aber diesen Anhang dem Herausgeber des Archivs vorzüglich aus folgendem Grunde schon jetzt mitzutheilen die Güte gehabt.

In §. 49. und §. 50. sind nämlich die nachstehenden dem Verfasser eigenthümlichen Sätze von der Ellipse bewiesen.

Die Berührungslinien, welche durch die Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser einer Ellipse an dieselbe gezogen werden können, nennt der Herr Verfasser der Kürze wegen conjugirte Tangenten, und beweist dann zunächst den folgenden interessanten Satz:

Die Durchschnittspunkte aller conjugirten Tangenten einer Ellipse liegen in dem Umfange einer mit derselben concentrischen Ellipse, deren Achsen die Diagonalen von den Quadraten aus den Achsen der ersten Ellipse sind; woraus sich ferner die folgenden Zusätze ergeben:

1. Die sich gegenseitig begränzenden Tangenten der innern Ellipse sind für die äussere Ellipse conjugirte Sehnen.

2. Das von diesen Sehnen gebildete Parallelogramm hat einen für alle Lagen desselben unveränderlichen Inhalt, welcher gleich dem Rechtecke aus den beiden Axen der innern Ellipse ist.

3. Verlängert man die conjugirten Durchmesser der innern Ellipse bis an den Umfang der äussern, so bilden sie für letztere ebenfalls conjugirte Durchmesser, deren Längen man findet, wenn man die der innern Ellipse mit $\sqrt{2}$ multiplieirt.

Wegen dieser verschiedenen Analogien nennt Herr Brix die äussere Ellipse die conjugirte der innern, und beweist dann in §. 50. noch den folgenden Satz:

Der Inhalt der äusseren oder conjugirten Ellipse ist immer doppelt so gross wie der der innern Ellipse.

Weil nun in dem im 4ten Hefte des 4ten Theils des Archivs abgedruckten Aufsatze des Herrn L. Mossbrugger zu Aarau nahe verwandte Gesetze vorkommen, so hat Herr Brix schon unter dem 10ten April d. J. gerade um die Zeit, wo das erwähnte Heft des Archivs ausgegeben worden war, den Herausgeber des Archivs aufgefordert, das obige Verhältniss aufzuklären, und namentlich auch zu bemerken, dass die neue Auflage des Anhangs zu der Statik schon vor 8 Monaten gedruckt worden ist, um sich bei dem späteren Erscheinen der neuen Auflage seines Buchs im Buchhandel in keiner Weise dem Vorwurfe auszusetzen, Herrn Mossbruggers Arbeit mit Stillschweigen übergangen zu haben. Dass sich der Herausgeber dieser Pflicht gegen Herrn Brix durch das Obige sehr gern und bereitwilligst entledigt hat, braucht derselbe wohl nicht erst noch besonders zu versichern.

Digitized by Google

Praktische Geometrie.

Lehrbuch einer neuen Methode des Feldmessens. Von E. Schott. Berlin. 1844. 1 Thlr. 8 ggr.

Diese neue Methode des Feldmessens kommt, um sie nur ganz in der Kürze einigermaassen zu charakterisiren, darauf hinaus, dass mittelst eines eignen in der Schrift beschriebenen Instruments unmittelbar die Verhältnisse der Seiten rechtwinkliger Dreiecke zu einander bestimmt, und dann diese Data zur Berechnung der gesuchten Grössen benutzt werden. Ausser der Beschreibung der Einrichtung und des Gebrauchs des Instruments ist der ganze übrige Inhalt der Schrift — deren Preis, beiläufig gesagt, im Verhältniss zu ihrem Umfange und Inhalte unverantwortlich hoch ist — für einen Jeden, wer mit den Elementen der Mathematik bekannt ist, — und diese Kenntnisse sollte man doch wohl billig von jedem Feldmesser verlangen — völlig unnütz. Dass übrigens diese neue Messungsmethode Beifall finden werde, müssen wir in jeder Beziehung sehr bezweifeln. Auch hätte der Verfasser theoretische Untersuchungen über den Grad der von derselben gewährten Genauigkeit anstellen sollen, was ganz unterlassen worden ist.

Bonnycastle, J.: An Introduction to Mensuration and Practical Geometry, with Notes containing the reason of every rule. — 19th edit. corrected and improved by S. Maynard. 12mo. London. 1844. 4 sh. 6 d.

A Key to the same. 12mo. 4 sh.

Mechanik.

Hart, A. S.: An Elementary Treatise on Mechanics. Dublin. 1844. 6½ sh.

Stamkart, J. F.: Iets over het grondbeginsel der virtuele snelheden, toegepast op de beweging der wipbruggen, voorgedragen in de wetenschappelijke wintervergaderingen van het wiskundig genootschap: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven," den 13den Maart 1843. gr. 8vo. Te Amsterdam, bij Weijtingh en van der Haart. f. 1, 20.

Manuale pratico di idrodinamica. Con un appendice contenente il testo di alcune leggi relative alle acque. Ad uso degli ingegneri ed agenti di campagna. Di F. Colombani. Milano. 1842. In-8.; tabella a stampa e tavole intagliate in foglio. 6.

Ueber den Anhang zu Brix Elementarlehrbuche der dynamischen Wissenschaften s. m. Geometrie.

Praktische Mechanik.

Elementare Berechnung des Widerstandes prismatischer Körper gegen Biegung. Von Herrn Brix. Aus den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen besonders abgedruckt. Berlin. 1844. 4.

In dieser besonders allen den Lehrern, denen eine elementare, die höhere Analysis nicht in Anspruch nehmende Behandlung der mechanischen Wissenschaften bei ihren Vorträgen obliegt, zu empfehlenden Schrift hat der Verfasser den auf dem Titel genannten wichtigen Gegenstand der praktischen Mechanik auf ganz elementarem Wege behandelt, und ist dabei, wie dies immer zu geschehen pflegt, wenn man bei der Behandlung eines Gegenstandes einen neuen Weg einschlägt, auch auf manche neue Sätze geführt worden, in welcher Beziehung wir den Leser u. A. auf die in §. 4. und §. 5. aufgestellten allgemeinen Gesetze hinweisen, durch welche die elementare und einfache Darstellung des fraglichen Gegenstandes in dem Umfange, in welchem der Verfasser dieselbe in dieser Schrift durchgeführt hat, vorzüglich möglich gemacht und bedingt wurde. Daher ist die Wissenschaft auch in materieller Beziehung in dieser beachtungswerthen Schrift keineswegs ganz leer ausgegangen.

Demme, Andr. Valent.: Der praktische Maschinenbauer. 16te Liefer. 8. Mit 20 Tafeln Abbildungen. Quedlinburg. 1844. 2 Thlr. 12 ggr.

Optik.

Hunt, researches on light: an examination of all the phenomena connected with the chemical and molecular changes produced by the influence of the solar rays, embracing all the known photographic processes, and new discoveries in the art. London. 1844. 10 sh. 6 d.

Astronomie.

Stern, Moriz A.: Himmelskunde, Volksfasslich bearbeitet. 1. Bdchn. 8. Karlsruhe. 1844. 9 ggr.

Poppe, Dr. J. H. M.: Die Erd- und Himmelskunde, im Lichte der neuesten Zeit. Eine gedrängte populäre Darstellung der astronomischen Wissenschaften für Leser aus allen Ständen. Mit 13 Abbildungen auf 4 Taf. 1. Lief. gr. 8. Zürich. 1844. 13 ggr.

Sachs, S., Königl. pension. Bauinspector zu Berlin: Axen-Parallelismus. Eine Denkschrift über die wahre Lage der Sonnen- und Erdachse im Weltraume. Durch eine Maschine erläutert. gr. 8. Berlin. 1844. 4 ggr.

Derselbe: Diagonon, eine Maschine zur versinnlichten Anschauung der sphärisch-astronomischen Kreise und Winkel, wie solche in Folge der täglichen Axendrehung der Erde am Himmel gedacht werden. Berlin. 1844. gr. 8. 8 ggr.

Astronomie. Le Planétaire, pour servir à démontrer différens phenomènes qui ont lieu dans notre système solaire; par M. le baron de Montchauvel. In-4. Paris. 1844.

Bonnycastle's Introduction to Astronomy. New Edition, by Professor Young. London. 1844. 12mo. 9 sh. cloth.

Pinnock's Astronomy made Easy; intended for the use of Young Children. 18mo. London. 1844. With numerous engravings, cloth 1 sh. 6 d.

Kerigan, T.: Practical Treatise on the Eclipses of the Sun and Moon, and the Deflection of the Moon and Planets, explaining their Calculation by Simple and Direct Methods, with Remarks on the Anomalies of the Present Theory of the Tides, the Superior Attraction of the Sun over that of the Moon at the surface of the Earth etc. 8. cloth. 4 sh.

Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno bisestile 1844, calcolate dall' abate Giovanni Capelli e da Curzio Buzzetti. Con appendice di memorie ed osservazioni astronomiche. Mailand. 1844.

Almanacco nautico per l'anno 1843, con numerose tavole astronomico nautiche, un planisfero celeste ed una carta magnetica, pubblicato dal dott. Vincenzo Gallo professore di matematiche etc. Anno terzo. Le appendici contengono: 1) Aggiunte all' astronomia nautica del dottore C. L. di Littrow astronomo aggiunto all' i. r. specula di Vienna; 2) Trattati e convenzioni di commercio e di navigazione fra l'Austria e le diverse potenze. Venezia. 1842.

Almanacco nautico per l'anno 1844, pubblicato dal ingegnere dott. Vincenzo Gallo. 8. Triest. 1843.

Digitized by Google

Physik.

Peschel, C. F.: Lehrbuch der Physik, nach dem gegenwärtigen Standpunkte dieser Wissenschaft bearbeitet, zum Gebrauche bei Vorlesungen auf höheren Gymnasien und mit besonderer Berücksichtigung von Militairbildungsanstalten. gr. 8. Mit 13 Steintafeln in gr. 4. und 25 Tab. Dresden. 1844. Cart. in Leinw. 6 Thlr.

Das Werk ist nun vollständig erschienen. M. vergl. Literar. Ber. No. VII. S. 113. Auch die zweite Abtheilung lässt keine besonderen Eigenthümlichkeiten erkennen. Der Preis ist sehr hoch.

Brandes: Vorlesungen über die Naturlehre für Leser, denen es an mathematischen Vorkenntnissen fehlt. 2te verm. und verb. Ausgabe, besorgt von C. W. H. Brandes und W. J. H. Michaelis. Mit Kupfern. 2te Lief. gr. 8. Leipzig. 1844. 1 Thlr.

Meissas: La physique facilement apprise. Notions élémentaires de physique. Pet. in 18. (Aussi: No. 151. du Panthéon classique et littéraire) avec figures. Bruxelles. 1844. 6 ggr.

Om den fördelaktigaste construction af thermo-elektriska apparater. Präs. Adolf Ferdinand Svanberg, Physices Professor; Resp. Adolf Törnsten. Stockholm. 1844. 8 sid 4to, med 1 pl.

Annalen für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände, redigirt von Grunert, Koller, Kreil, Lamont, Plieninger, Quetelet, Stieffel, herausgegeben von Dr. J. Lamont.

Jahrgang 1843. Heft VIII. Windrichtung und Stärke und Bewölkung des Himmels, 1841 und 1842, beobachtet an der k. Sternwarte bei München. — Stündlicher Gang der Temperatur und des Luft- und Dunstdruckes, beobachtet im Jahre 1843 an der k. Sternwarte bei München. Zweite Jahreshälfte. — Resultate aus den Beobachtungen der Temperatur des Bodens, welche in den Jahren 1837 — 1842 in Upsala aufgezeichnet wurden, mitgetheilt von Herrn Dr. Angström, Observator der Sternwarte in Upsala. — Meteorologische Beobachtungen in Leipzig und Würzburg. — Magnetische Beobachtungen vom Juni bis December 1843, aufgezeichnet im magnetischen Observatorium der k. Sternwarte bei München. — Meteorologische Beobachtungen zu Freising, angestellt vom Hrn. Lycealprofessor Meister. — Höhe der Isar bei Freising, aus den täglichen Beobachtungen des k. Werkmeisters Herrn Lang, berechnet und mitgetheilt von Herrn Professor Meister. — Vermischte Nachrichten vom Herausgeber: Herrn Sabines Contributions to Terrestrial Magnetism No. IV. und V. Observations on days of unusual magnetical disturbance made at the British colonial observatories. Meteorologische Beobachtungen des Herrn P. Stephan Postlmayer, Prior des Benedictinerklosters in Ottobeuern. Gleichzeitige Temperaturbeobachtung der Moosach und Isar, 1842; von Hrn. Lyceal-

Digitized by Google

professor Meister in Freysing. Auszüge aus zwei Briefen des Herrn Colla, Directors des meteorologischen Observatoriums in Parma, an den Herausgeber. Uebersicht der meteorologischen Beobachtungen in Grönland und Labrador, dann in Kishnagur in Bengalen. Beobachtungen von Herrn Professor Loomis in Hudson.

Jahrgang 1844. Heft IX. Meteorologische Beobachtungen in Aschaffenburg im Jahre 1842 von Herrn Rector und Professor Dr. Kittel. Monatmittel der meteorologischen Beobachtungen zu Schössl im Jahre 1841 und 1842 nach den Beobachtungsstunden, und allgemeine Zusammenstellung für die Jahre 1839, 1840, 1841, 1842, von Herrn Anton Bayer. — Tägliche meteorologische Beobachtungen in Hof, dann Bewölkung und Windrichtung in Würzburg und Bewölkung in Leipzig im Jahre 1842. — Tägliche meteorologische Beobachtungen in Ofen im Jahre 1842, von Herrn Prof. Mayer, Director der Sternwarte. — Meteorologische Beobachtungen in Salzburg 1843, von Herrn Prof. Kottinger. — Meteorologische Beobachtungen in Bensberg bei Köln am Rhein im Jahre 1843, von Herrn Voigt, k. preuss. Lieutenant und Lehrer im Cadetten-Corps. — Versuch einer ersten genäherten Bestimmung der Höhe von München über dem mittleren Spiegel der Ostsee, von Herrn Professor Grunert in Greifswald *). — Magnetische Declination in Brüssel, von Herrn Director Quetelet. — Monatliche Mittel der meteorologischen Beobachtungen an der k. Saline in Reichenhall. — Magnetische Störungen, beobachtet in München im Jahre 1843. — Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen in Breda 1843, von Herrn Prof. Wenckebach. — Meteorologische Beobachtungen in Utrecht 1843, von Herrn Prof. van Rees. — Bemerkung über die Berechnung des mittleren Barometer- und Thermometerstandes, nebst Tafel für 1841, 1842, 1843, vom Herausgeber. — Lufttemperatur in hunderttheiligen Graden, und Luftdruck in Millimetern auf dem Faulhorn in der Schweiz, von Herrn Prof. Martins in Paris. — Meteorologische Beobachtungen auf dem Hohenpeissenberg 1843, von Herrn Pfarrer Ott. — Monatliche Mittel der meteorologischen Beobachtungen in Gunzenhausen, Burglengenfeld, Uffenheim, Ansbach, Neustadt a. d. A. und Mallersdorf. — Meteorologische Beobachtungen in Western, Reserve College in Hudson, angestellt von Herrn Prof. Loomis. — Bemerkungen über die in Upsala während der Jahre 1838 — 1841 beobachteten Bodentemperaturen von Herrn Dr. Angström, Observator der Sternwarte in Upsala. — Vermischte Nachrichten vom Herausgeber. Magnetischer Theodolit. Mittheilungen von Herrn Hofrath Mädler und Herrn Professor Meister.

Schumacher: Die Krystallisation des Eises. gr. 8. Leipzig. 2 Thlr.

*) Das Resultat dieser meiner ersten Bestimmung der Höhe von München über dem Nullpunkte meines Barometers ist 1625,4 par. Fuss. Die Höhe des Nullpunkts meines Barometers über dem mittlern Spiegel der Ostsee ist erst noch durch ein Nivellement auszumitteln, und wird später mitgetheilt werden.

Digitized by Google

Vermischte Schriften.

Bulletin de la classe physico-mathématique de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg. Tome III. en 24 Nrs. gr. in-4. St. Petersburg. 1844. R. 2.

The Senate House Problems. For 1844. With solutions by Matthew O'Brien, Rubert Leslie Ellis, Moderators. Cambridge. 1844. 4. 4 sh. 6 d.

Cambridge Mathematical Miscellany. Edited by Pruf. Pierre. 1844. Quarterly. Cambridge. 5 Thlr. 8 ggr.

Preisaufgabe der Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig für 1845.

Es sind noch einige Bruchstücke einer von Leibnitz erfundenen geometrischen Charakteristik übrig, in welcher die gegenseitigen Lagen der Orte, ohne die Grösse von Linien und Winkeln zu Hülfe zu ziehen, unmittelbar durch einfache Symbole bezeichnet und durch deren Verbindung bestimmt werden, und die daher von unserer algebraischen und analytischen Geometrie gänzlich verschieden ist. Es fragt sich, ob nicht dieser Calcul wieder hergestellt und weiter ausgebildet oder ein ihm ähnlicher angegeben werden kann, was keineswegs unmöglich zu sein scheint. Gött. Anzeigen. 1834. S. 1940. (Einsendungstermin 1ste November 1845. An den Sekretair der Gesellschaft. Die Preisschriften können auch deutsch verfasst sein. Vorzüglich hat man nachzusehen: Ch. Hugenii aliorumque seculi XVII. virorum celeberrimorum exercitationes mathematicae, edd. J. Uylenbroek. Hagae. 1823. Fasc. II. p. 6. Diese Preisaufgabe scheint uns besondere Aufmerksamkeit zu verdienen, und die Lösung derselben eine sehr verdienstliche Arbeit zu sein. G.)

Digitized by Google

XIX.
Literarischer Bericht.

Schriften über Unterrichtsmethode.

Programme officiel des matières d'examen du baccalauréat ès sciences mathématiques et physiques. In-12. Paris. 1844.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Ohm, M.: Die reine Elementar-Mathematik, zum Gebrauche an höhern technischen Lehranstalten, besonders aber an Gymnasien und zum Selbstunterrichte bearbeitet und mit sehr vielen Uebungsbeispielen versehen. 1. Bd. Die Arithmetik bis zu den höhern Gleichungen. 3te mit einer vollständigen Beispielsammlung versehene Auflage. 8. Berlin. 1844. $2\frac{1}{4}$ Thlr.

Grundriss der reinen Mathematik, oder Leitfaden für den Unterricht in der gesammten Elementar-Mathematik. Zum Gebrauch für die oberen Klassen der Gymnasien und böheren Lehranstalten. Von J. C. H. Ludowieg, Artillerie-Capitain a. D., Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Stade. Erste Abtheilung. Arithmetik und Algebra. Mit Einschluss der Combinationslehre und einiger Theile der höhern Algebra. Hannover. 1844. 8. 1 Thlr. 4 ggr.

Nach der Angabe des Herrn Verfassers in der Vorrede ist dieser Grundriss, dessen erste Abtheilung hier vorliegt, im Sinne seiner grösseren Lehrbücher (Lehrbuch der Arithmetik und der An-

Digitized by Google

fangsgründe der Algebra. 2te Auflage. Hannover. 1835. — Lehrbuch der ebenen Geometrie und Trigonometrie. 2te Aufl. Hannover. 1839. — Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. Hannover. 1840.), und mit Bezugnahme auf dieselben ausgearbeitet. Dieser ersten Abtheilung sind für den Unterricht in Prima einige Kapitel aus der höheren Algebra beigefügt worden. Der Vortrag des Verfassers ist deutlich, wie schon aus seinen früheren Lehrbüchern hinreichend bekannt ist.

Leitfaden für den mathematischen Elementarunterricht in Handels- und höhern Bürgerschulen. Von Dr. Julius Michaelis, Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Handelslehranstalt zu Leipzig. Leipzig. 1844. 8. 12 ggr.

Ein ganz kurzer, völlig elementar gehaltener, deutlich geschriebener Leitfaden für den Unterricht in den Anfangsgründen der ebenen Geometrie, Stereometrie, Buchstabenrechnung und Algebra, und der ebenen Trigonometrie, der seinen nächsten, auf dem Titel angegebenen Zweck gut zu erfüllen scheint. Die Beweise und Auflösungen sind nirgends ausgeführt, sondern überall nur angedeutet. Die auf S. 70. und S. 71. angegebenen Näherungsconstructionen und manche andere für das geometrische Zeichnen nützliche Constructionen sind in der vorliegenden Schrift ganz an ihrem Orte. Der Druck und das Papier, so wie auch die eingedruckten Holzschnitte lassen nichts zu wünschen übrig.

Benecken: Lehrbuch der Mathematik. 1ster Theil: die ebene Geometrie. gr. 8. Mit 1 Figurentafel. Quedlinburg. 1844. 10 ggr.

Arithmetik.

Handbuch der besondern und allgemeinen Arithmetik für Praktiker, zunächst für das Selbststudium gemeinverständlich abgefasst von Dr. L. C. Schulz v. Strassnitzki, öffentl. ordentl. Professor der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien. Wien. 1844. 8. 3 Thlr.

Der Inhalt dieses empfehlenswerthen, sehr deutlich geschriebenen, mit vielen Beispielen ausgestatteten Handbuchs entspricht ganz seinem auf dem Titel angegebenen Zwecke.

Leitfaden der allgemeinen Arithmetik für Gymnasien, Real- und höhere Bürgerschulen, so wie für Hauslehrer und zum Gebrauche beim Selbstunterrichte. Von Dr. A. Wigand, Lehrer der Mathematik und zweitem Collegen an der Realschule im Waisenhause zu Halle. Halle. 1844. 8. 10 ggr.

Dieser deutlich verfasste kurze Leitfaden erstreckt sich über

die gewöhnlichen Elemente der allgemeinen Arithmetik und Algebra in ziemlicher Vollständigkeit. Auf die Auflösung der quadratischen Gleichungen mittelst der goniometrischen Functionen ist noch Rücksicht genommen. Ein Nachtrag enthält die Lehre von den Decimalbrüchen, wofür der Grund in der Vorrede angegeben ist.

Thomson, J.: An Elementary Treatise on Algebra, Theoretical and Practical. 12mo. London. 1844. cloth. 5 s.

Watson, W.: Easy and Comprehensive Introduction to Algebra, designed for the use of Schools, with plain and familiar Examples, and numerous Notes and Observations, intended as Aids to Private Students. 2d edition, much improved and enlarged. 12mo. bound. 3 sh.

Elementar-Lärobok i Algebra af E. G. Björling. Sednare Delen. Andra upplagan af Författarens „Elementar-Afhandling om Logar. och Serier. Upsala. 1844.
M. vergl. Literar. Bericht. No. XIII. S. 195.

Schortrede, R.: Logarithmic Tables to Seven Places of Decimals; containing Logarithms to numbers from 1 to 120,000, numbers to Logarithms from 0 to 100,000, Logarithmic Sines and Tangents to every Second of the Circle, with Arguments in Space and Time, and new Astronomical and Geodetical Tables. Royal - 8vo. Edinburgh. 1844. cloth 4 L. 4 s.

Theorie der Lotterie-Anlehen nebst einer Methode den Werth eines Kapitals bei verschiedenem Zinsfusse und den hieraus sich ergebenden Curs zu bestimmen, mit Rücksicht auf die Grossherzoglich Badischen Staats-Anlehen. Von Dr. L. Oettinger, ord. öffentl. Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg in Breisgau. Freiburg. 1844. 8.

Da die Theorie der Lotterie-Anlehen noch nicht gegeben ist, so ist diese Schrift unstreitig für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und politische Arithmetik schon in dieser Beziehung von nicht geringem Interesse. Dies gilt aber auch von ihrem zweiten Theile, über welchen sich der Herr Verfasser in dem Vorwort auf folgende Art äussert: „In keiner der bisher über politische Arithmetik erschienenen mir bekannten Schriften ist die Frage aufgestellt und beantwortet, in welchen Fällen des Geschäftslebens Zinses-Zinsen gerechnet werden müssen. Man liess die Frage unberührt und deswegen unentschieden, vielleicht mit aus dem Grunde, weil die Gesetze Zinseszins im gewöhnlichen Leben nicht zulassen, und glaubte, sie dem Vertrag oder der Willkühr anheim geben zu müssen. Die Untersuchungen des §. 9. zeigen, wann mit Zinses-Zinsen gerechnet werden muss, und wann die Rechnung mit einfachen Zinsen nicht zugelassen werden kann. Die Fälle, worin dies geschehen kann, sind dort genau bezeichnet. Hiebei ist wohl zu bemerken, dass der Calcul über die Frage keine Antwort giebt, ob bei einem, auf einen bestimmten, spätern Zeitpunkt und auf einmal heim zu zahlenden Kapitale, das mehrere Jahre vor der Verfallzeit nach etwaiger Uebereinkunft abgetragen werden soll, Zinses-Zinsen oder einfache Zinsen gerechnet werden sollen? Er kann hierauf nicht

antworten, denn hier entscheiden äussere Gründe, wie die Grösse des Kapitals; die richtige Zahlung der Zinsen auf den Verfalltag; die Möglichkeit, erhobene Zinsen sogleich nutzbringend anzulegen. Sind die Zinsen von der Bedeutung und ist die Möglichkeit vorhanden, dass sie sogleich wieder zinstragend angelegt werden können, wie an einem grossen Geldmarkte; bei Anstalten, worin grosse Geldmassen verwaltet werden; bei gegenseitig, zu bestimmten Zeiten wiederkehrender, Abrechnung; so wird wohl kein Grund vorhanden sein, die Rechnung mit Zinses-Zinsen als unzulässig zu erklären. Eine weitere Erörterung dieser Sache gehört jedoch nicht hieher, sondern nur die Resultate, zu welchen der Calcul führt."

Schnuse, Dr. C. H.: Sammlung ausgewählter allgemeiner Formeln und Aufgaben aus der Differentialrechnung und deren Anwendung auf Geometrie. Ein Hülfsbuch für Lehrer und Schüler an höhern Unterrichtsanstalten. 2te Liefer. Mit 1 Tafel. gr. 8. Braunschweig. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Die erste Lieferung ist Literar. Ber. No. XVI. S. 242. angezeigt. Die zweite ist noch nicht in unsere Hände gelangt, und wird, sobald dies geschieht, ausführlicher angezeigt werden.

Calculi differentiarum finitarum inversi exercitationes. Auctore E. G. Björling, Phil. Mag., ad Reg. Acad. Upsal. Math. Doc. Pars I. (Ex Actis Reg. Societ. Scient. Upsal.). Upsaliae. MDCCCXLIV. 4o.

Der Verfasser beschäftigt sich in dieser Abhandlung vorzüglich mit der Auflösung der vier folgenden Probleme.

Problema I. Invenire $\dfrac{d^n(\frac{1}{e^x-1})}{dx^n}$.

Problema II. Invenire $\dfrac{d^n(\frac{1}{e^x+1})}{dx^n}$.

Problema III. Invenire valorem z generalem, quo fiat satis conditioni $\Delta z = e^x y$, y denotante functionem ipsius x rationalem ac integram mti gradus positoque $\Delta x = h$ (haud $= 0$).

Problema IV. Invenire valorem z generalem, quo fiat satis conditioni $\Delta z = e^{rx} y$, y denotante functionem ipsius x rationalem ac integram mti gradus, r constantem quamlibet (realem aut imaginariam) excepto 0, positoque $\Delta x = h$ (haud $= 0$).

Geometrie.

Die Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie; von A. M. Legendre. Aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von A. L. Crelle. Vierte Auflage der Uebersetzung

(nach der 12ten Auflage des Originals). Berlin. 1844. 8. 2 Thlr.

Scheint ein ganz unveränderter Abdruck der vorhergehenden Auflage dieser empfehlenswerthen Uebersetzung des immer noch als ausgezeichnet anerkannten Werks von Legendre zu sein.

Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien. Von C. Meyer, Professor am Königlichen Gymnasium zu Potsdam. Erster Theil. Planimetrie. Dritte Auflage. Zweiter Theil. Stereometrie. Zweite Auflage. Potsdam. 1843. 8.

Dieses Lehrbuch enthält die gewöhnlichen Elemente der ebenen und körperlichen Geometrie in deutlicher und strenger Darstellung. Was den Vortrag der Lehre von den Parallellinien betrifft, so wird dieselbe hauptsächlich auf den Satz gegründet, dass zwei einer und derselben dritten Linie parallele gerade Linien einander jederzeit selbst parallel sein müssen. Diesen Satz stellt der Verfasser als einen Lehrsatz auf, und gegen den Beweis desselben an sich kann allerdings auch eigentlich nichts Wesentliches eingewendet werden. Gewünscht hätten wir aber, dass der Verfasser, was uns bei diesem vielbesprochenen Gegenstande von ganz besonderer Wichtigkeit zu sein scheint, recht deutlich und bestimmt hervorgehoben hätte, welches Axiom der von ihm gegebenen Darstellung eigentlich zum Grunde liegt; denn dass man ohne ein solches besonderes Axiom in der Lehre von den Parallellinien nicht auskommen kann, scheint nun einmal gewiss zu sein. Zergliedert man aber die Darstellung des Verfassers, so findet man allerdings, dass in derselben ein solcher besonderer Grundsatz versteckt, aber nicht als ein solcher aufgestellt worden ist, welcher bei dem Beweise von §. 21. Zusatz. in Anwendung gebracht werden muss, wenn derselbe in völlig strenger Form gegeben werden soll. Dieser Satz ist hier übrigens kein eigentliches Axiom, sondern vielmehr ein Postulat, und kann auf folgende Art ausgesprochen werden:

Wenn zwischen den Schenkeln eines Winkels ein Punkt gegeben ist, so lässt sich immer eine die beiden Schenkel des Winkels schneidende gerade Linie ziehen, die in Verbindung mit den beiden Schenkeln des gegebenen Winkels ein Dreieck bildet, innerhalb dessen der gegebene Punkt liegt.

Insofern man die Möglichkeit des in diesem Satze, der übrigens wenigstens in ähnlicher Form auch schon anderen Parallelentheorien zum Grunde gelegt worden ist, Geforderten ohne Beweis zugiebt, und demselben den Namen eines eigentlichen Postulats nicht streitig macht — was wir aber allerdings zu thun geneigt sein möchten — lässt sich gegen die von dem Verfasser gegebene Darstellung, wie es uns scheint, nichts Wesentliches einwenden. Nur sind wir, wie schon erinnert, der Meinung, dass der Verfasser namentlich in einem Schulbuche dieses Postulat hätte förmlich aufstellen und auf diese Weise den Schülern die Schwierigkeit, die in der Lehre von den Parallellinien nun einmal vorhanden ist, und nach unserer innigsten Ueberzeugung nur durch ein dieser Lehre eigenthümliches Axiom oder Postulat, da die gewöhnlichen blosse Grössenvergleichungen betreffenden Axiome hier, wo man es mit blossen Lagenbeziehungen zu thun hat, nicht mehr ausreichen, ge-

hoben werden konn, hätte klar und deutlich vor Angen legen sollen. Leider wird in dieser Lehre immer noch in vielen Lehrbüchern ein solches Versteckcspielen mit Sätzen gehandhabt, was derselben gewiss schon zu grossem Schaden gereicht und den grössten Theil der öfters ganz verunglückten Versuche zu ihrer besseren Begründung hervorgerufen hat. Keineswegs soll übrigens hiedurch ein indirecter Tadel der von dem Verfasser gegebenen Darstellung an sich ausgesprochen werden, die wir im Gegentheil ganz zweckmässig finden, wenn nur das in derselben versteckte, oben näher bezeichnete Postulat bestimmt hervorgehoben worden wäre.

Zur Empfebiung gereichen dieser Schrift auch 'gutes Papier, schöner Druck, und die in den Text eingedruckten, sehr gut ausgeführten Holzschnitte.

Leitfaden der gesammten Elementar-Geometrie für höhern Schulunterricht, bearbeitet von Dr. A. Sonnenburg, ordentlichem Lehrer der Mathematik und Physik an der Hauptschule zu Bremen. Bremen. 1844. 8.

(Schon vorläufig Literar. Ber. No. XVIII. S. 280. angezeigt.)

Dieser Leitfaden erstreckt sich über die ebene Geometrie und ebene Trigonometrie, Stereometrie und sphärische Trigonometrie. In der Vorrede erklärt sich der Verfasser näher über die Methode seines Unterrichts, welches die Methode eines jeden guten Lehrers ist, und sagt dann über das vorliegende Buch: „Es galt hier erstens, um das die Aufmerksamkeit störende Niederschreiben einzelner Punkte (von Seiten der Schüler) in den Lehrstunden zu verhindern, die wichtigsten Erklärungen und die Haupt-Lehrsätze bestimmt und scharf, die Beweise der letzteren dagegen nur in ihren vorzüglichsten Punkten hinzustellen, alles weniger Wichtige aber jenen unterzuordnen und anzudeuten, jedoch so, dass der denkende Schüler allein, der schwache mit einiger Hülfe, sich hindurchfinden könne; zweitens dem Schüler einen leichten Ueberblick über das weitläuftige Gebiet der Elementar-Geometrie zu verschaffen und ihn bei vorgekommenen Versäumnissen den Zusammenhang leicht wieder auffinden zu lassen; drittens zu häuslichen Arbeiten statt der schriftlichen Ausarbeitung des in den Lehrstunden Durchgenommenen (wo ja das Abschreiben, selbst bei strenger Ueberwachung, immer eine bedeutende Rolle spielt), solche Sätze und Aufgaben zu den Haupt-Lehrsätzen auszuwählen, an denen der Schüler sein jedesmaliges Wissen und Können bewähre; viertens überall da, wo Beispiele die Sache verdeutlichen und befestigen, diese auch in hinreichender Anzahl beizufügen; endlich galt es, nicht einen besondern Theil der Elementar-Geometrie, sondern das gesammte Gebiet derselben so gedrängt wie möglich, übersichtlich und praktisch zusammenzustellen." Wir glauben, dass das Buch allen diesen Anforderungen gut entspreche, und dass der Verfasser namentlich rücksichtlich der zu sehr oder zu wenig ausführlichen Darstellung einen glücklichen Mittelweg eingeschlagen habe, empfehlen dasselbe daher aus Ueberzeugung zu weiterer Beachtung. Auf die sogenannte neuere Geometrie ist in einem Anhange zur ebenen Geometrie (S. 95. — S. 100.) so weit Rücksicht genommen, als es die Natur eines solchen Schulbuches gestattet. Den Euler'schen Satz von den Polyedern hätte der Verfasser wohl noch mit aufnehmen können, da sich derselbe nach

dem jetzigen Stande der Wissenschaft so leicht beweisen lässt. Auch verdient der von Gauss gegebene schöne Beweis des Legendre'schen Theorems von dem sphärischen Excess (M. s. Archiv. Thl. I. S. 436.) immer mehr Eingang in die Elemente zu finden, als derselbe bisher gefunden hat. Uebrigens konnte der Verfasser des vorliegenden Lehrbuchs diesen schönen Beweis schon deshalb nicht in dasselbe aufnehmen, weil er die trigonometrischen Reihen von dem Vortrage der Trigonometrie ausgeschlossen hat, was bei der Tendenz und der ganzen Anlage dieser Schrift nicht gemissbilligt werden kann.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Eine Sammlung methodisch geordneter und aufgelöster geometrischer Aufgaben mit 155 dem Texte beigedruckten Holzschnitten, für Lehrer und zum Selbstunterricht, insbesondere für Volksschulen und Schullehrer-Seminarien. Bearbeitet und herausgegeben von F. W. Pietzsch, Lehrer an der Raths-Töchterschule zu Dresden. 1844. 8. 12 ggr.

Diese Schrift verdient nur den Namen einer Anleitung zum geometrischen Zeichnen, aber nicht eines Lehrbuchs der Elementar-Geometrie.

Fülle: Lehrbuch der Stereometrie für die obern Klassen der Gymnasien und Realschulen. Mit 6 Figurentafeln. gr. 8. Breslau. 1844. ½ Thlr.

Derselbe: Auszug aus Vorstehendem. Mit 6 Figurentafeln. gr. 8. Ebendaselbst. ¼ Thlr.

Teyssèdre, A.: Elémens de géométrie populaire. Avec 6 planches. 8. Paris. 3 f. 50 c.

Planches, Jules: Cahiers de géométrie élémentaire, pour servir de complément au Traité de Legendre. Quatrième cahier. In-8. Paris. 1844.

Adhémar, J.: Traité de géométrie. Géométrie plane. In-8. Paris. 1844. 10 fr.

Dulague: Leçons de navigation, contenant les élémens de géométrie et de trigonométrie. Reproduction de la dixième édition, revue etc. par V. Bagay. In-8. Paris. 1844.

Brasse, J.: The Enunciations and Figures belonging to the Propositions in the First, Sixth, and part of the Eleventh Books of Euclid's Elements, usually read in the Universities. 5th edition. 46 cards in a case. London. 1844. 5 s. 6 d. or, sewed. 3 s. 6 d.

Wedgwood: The Principles of Geometrical Demonstration deduced from the Original Conception of Space and Form. London. 1844. 2 s.

Kauffmann und Schwenk: Aufgaben aus der darstellenden Geometrie. Mit 60 lith. Tafeln. 8. Stuttgart. 1844. 2¼ Thlr.

Digitized by Google

Bünau, H. von: Die Elemente der Projectionslehre. Ein Leitfaden für den Unterricht an gewerblichen Lehranstalten bearbeitet. Mit 20 Kupfertafeln. 8. Leipzig. 1844. 1⅔ Thlr.

Leroy, C. F. A.: Traité de Stéréotomie, comprenant les applications de la géométrie descriptive à la théorie des ombres, la perspective linéaire, la gnomonique, la coupe des pierres et la charpente. In-4., plus un atlas in folio de 74 pl. Paris. 1844. 34 fr.

Tabacci: Applicazioni di geometria descrittiva al disegno architettonico e delle macchine e formule per calcolare le superficie delle volte composte. Fasc. I. 2 tavole litogr. 8. Padova. 1844. 2. 61.

Considérations générales sur les courbes algébriques. Par M. Steichen, Professeur à l'Ecole Militaire de Bruxelles.

Wahrscheinlich ist diese mir von dem Herrn Verfasser gütigst zugesandte Abhandlung aus einem Journal entlehnt, welches ich aber anzugeben ausser Stande bin. G.

Praktische Geometrie.

Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie. Von C. F. Gauss. Aus dem zweiten Bande der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1844. 4. 12 ggr.

Der berühmte Verfasser beabsichtigt in einer Reihe von Abhandlungen seine durch die im Königreiche Hannover ausgeführten grossen Messungen veranlassten geodätischen Untersuchungen zu veröffentlichen, und äussert sich rücksichtlich dieser vorliegenden ersten Abhandlung auf folgende Weise.

Von der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, habe ich im Jahre 1822 eine allgemeine Auflösung gegeben, welche Herr Conferenzrath Schumacher im 3. Heft der Astronomischen Abhandlungen hat abdrucken lassen. Bei der Anwendung dieser Aufgabe auf die höhere Geodäsie, für welche sie eine vorzüglich ergiebige Hülfsquelle wird, macht sich das Bedürfniss fühlbar, Abbildungen, welche unter der angegebenen Bedingung stehen, durch eine besondere Benennung auszuzeichnen, und ich werde dieselben daher conforme Abbildungen oder Uebertragungen nennen, indem ich diesem sonst vagen Beiworte eine mathematisch scharf bestimmte Bedeutung beilege.

In der angeführten Schrift ist die allgemeine Auflösung, welche eine willkürliche Function einschliesst, auf mehrere bestimmte Flächen angewandt; das letzte dort behandelte Beispiel betrifft die

conforme Uebertragung der Oberfläche des Umdrehungsellipsoids auf die Kugelfläche, und es ist S. 21. zugleich eine solche Bestimmung der arbiträren Function angegeben, die zu einer sehr brauchbaren Anwendung auf die höhere Geodäsie benutzt werden kann. Diese Benutzung war a. a. O. nur kurz angedeutet, und eine ausführlichere Entwickelung vorbehalten. Ich werde jedoch anstatt dieser speciellen Auflösung eine etwas abgeänderte und für die geodätischen Anwendungen noch viel mehr geeignete Methode zur conformen Uebertragung der ellipsoidischen Fläche auf die Kugelfläche in der gegenwärtigen Abhandlung entwickeln, und damit zugleich alles zu einer solchen Benutzung Erforderliche verbinden.

Reinhold, C.: Anweisung zum praktisch-richtigen Nivelliren oder Wasserwägen; bestehend in der Beschreibung und Abbildung eines verbesserten Nivellir-Instruments mit Fernrohr und Röhrenlibelle, dessen Einrichtung die möglichst genaue Horizontalstellung der Visir-Axe ohne äussere Hülfsmittel leicht und sicher gewährt, und in der Darstellung einer sichern und richtigen Nivellirmethode mit Selbstcontrole. (Besonders abgedruckt aus dem 20sten Bande von „Crelle's Journal für Baukunst.) Mit 3 Figurentafeln. 4. 1844. Berlin. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

Regnault, E. E.: Traité di topographie et de géodésie forestières. Avec 8 pl. In-8. Nanci. 1844. 10 fr.

Principii elementari de geometria pratica, ed applicazioni al disegno, raccolti ad uso degli artieri allievi della gratuita scuola di disegno in Vercelli. In-4. gr. 15 tavole. Vercelli. 1843. 5. —.

Hummel, J. E.: Anleitung zum Projections- oder geometrischen Zeichnen. Nebst einem Anhange der nöthigsten Constructionen krummer Linien, hauptsächlich in Bezug auf das Praktische bearbeitet. Mit 16 Kupfertafeln. gr. 8. Berlin. 1844. $1\frac{1}{4}$ Thlr.

Trigonometrie.

Nübel, Chr.: Lehrbuch der Trigonometrie. Für die höhern Klassen der Gymnasien und Schulen, so wie zum Selbstunterricht. gr. 8. Mit 1 Figurentafel. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Mechanik.

Kulik, J. Ph.: Anfangsgründe der höhern Mechanik mit Rücksicht auf ihre technischen Anwendungen. 1. 2. Lieferung. Mit

8 Figurentafeln. 8. Leipzig. 1844. Preis für das vollständige Werk 4 Tblr.

Chapmans Paraboliska Konstruktions-System, tillämpadt på Handelsfartyg, af G. C. Witt, Secund-Löjtnant i Kongl. Maj:ts Flottas Konstruktions-Korps. Denna Afhandling tillhör den Högwederbörligen fastställda Lärokursen wid Skeppsbyggeri-Institutet i Carlskrona. Carlskrona. 1844. 8:o. med 1 planch.

Praktische Mechanik.

Schubert: Elemente der Maschinenlehre. 2te Abth.: Von der Bearbeitung fester Körper im Allgemeinen, von den einfachen Werkzeugen und von den Werkzeugsmaschinen. gr. 8. Mit 35 Steintafeln in Folio. Dresden. 1844. 10 Tblr.

Théorie de l'équilibre de la vis à filet triangulaire, eu égard au frottement. (Extrait d'un travail plus étendu). Par M. Steichen, Professeur à l'École Militaire de Bruxelles.

Wahrscheinlich ist diese von dem Herrn Verfasser mir gütigst zugesandte Abhandlung aus einem Journal entlehnt, welches ich aber anzugeben ausser Stande bin. G.

Westphalen: Anwendung der Turbinen im Vereine mit stehenden Dampfmaschinen beim Ersteigen, und der Wasserdruckwerke beim Herunterkommen der Convois auf Gebirgseisenbahnen. Vergleichung dieses Systems mit der Anwendung der atmosphärischen Eisenbahn zur Uebersteigung der Berge. gr. 4. Dresden. 1844. 1⅙ Tblr.

Redtenbacher, F., Prof.: Theorie und Bau der Turbinen und Ventilatoren. Mit 6 kleinen und 11 grossen Taf. Lex.-8. Mannheim. 1844. 7 Tblr.

Westphalen: Ueber die Gebirgseisenbahnen mit stehenden Maschinen und Anwendung von Gegengewichten. gr. 4. Mit 4 lith. Beilagen. Dresden. 1844. 1⅓ Thlr.

Majocchi, G. A.: Cenni storici intorno all' elettro-magnetismo considerato come forca motrice. In-8.

Walther: Vorlegeblätter zum Unterrichte und zur Selbstübung im Maschinenzeichnen. Folio (12 Blätter). Augsburg. 1844. 1½ Tblr.

Digitized by Google

Optik.

Merz: Die neuern Verbesserungen am Mikroskope nebst den sie begleitenden Aenderungen in der Dioptrik. gr. 8. München. 1843. ½ Thlr.

Astronomie.

Bode, J. E.: Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels, herausgegeben von C. Bremiker. 10te vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 3 Kupfern und einer allg. Himmelskarte nebst transparentem Horizont. gr. 8. Berlin. 1844. 3⅔ Thlr.

Hieraus für die Besitzer früherer Auflagen besonders abgedruckt:

Nachtrag, enthaltend den Lauf und die Erscheinungen der Planeten in den Jahren 1844 bis 1854 und die Finsternisse. gr. 8. Ebendaselbst. ½ Thlr.

Frege, V. E.: Planetensystem der Sonne, für Schulen. 12 Wandtafeln in gr. Fol. Meissen. 1844. 1¼ Thlr.

Ife, O. A.: Die Vorkenntnisse der Astronomie, Geographie und Naturlehre. Ein Lehrbuch zum Gebrauch in Elementarschulen und Erziehungsanstalten, so wie auch bei häuslichem Unterricht. 8. Berlin. 1844. ½ Thlr.

Wirth, Dr.: populäre Darstellung der physikalischen und mathematischen Verhältnisse unserer Sonne und ihrer Planeten. 4. Bamberg. 1842. ¼ Thlr.

Guy's Elements of Astronomy, 6th Edition, enlarged and corrected throughout, royal 18mo. 1844. 18 plates. bound 6 s.

Struve: Expédition chronométrique exécutée par ordre de S. M. l'empereur Nicolas I. entre Poulkova et Altona pour la détermination de la longitude géographique relative de l'observatoire central de Russie. Rapports faits à l'acad. imp. des sciences de St. Petersbourg. 1844. 1⅔ Thlr.

Astronomische Beobachtungen, auf der Königl. Sternwarte zu Berlin. Herausg. von F. Encke. 2. Band. Fol. Berlin. 1844. 5 Thlr.

Mädler, J. G.: Beobachtungen der Kaiserl. Universitäts-Sternwarte zu Dorpat. 10. Bd. (N. Folge 2. Bd.) 4. Dorpat. 1844.

Quetelet, A.: Annuaire de l'observatoire royal de Bruxelles. XIe année. In-18. Bruxelles. 1844. ¾ Thlr.

Physik.

Wicher: Lehrbuch der Physik für die obern Klassen der Gymnasien und höhern Bürgerschulen. gr. 8. Mit 8 Figurentafeln. Breslau. 1844. 1⅙ Thlr.

Brandes, H. W.: Vorlesungen über die Naturlehre für Leser, denen es an mathematischen Vorkenntnissen fehlt. 2te verm. und verb. Aufl. von C. W. H. Brandes und W. J. H. Michaelis. Mit Kupfern. 3te Lieferung. Lex.-8. Leipzig. 1844. 1 Thlr.

Menge, A.: Physik. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten. 8. Graudenz. 1838. 1⅙ Thlr.

Soubeiran, E.: Précis élémentaire de physique. 2me édition. 8. Paris. 1844. 6 fr. 50 c.

Majocchi, G. A.: Elementi di fisica per uso delle scuole elementari maggiori del regno Lombardo-Veneto. Seconda edizione con tavole in rame. In-8. con 6 tavole. Milano. 1843. 2. 61.

Mémoire sur la constitution physique du calorique et sur la prétendue force répulsive. In-12. Reims. 1844.

Schwaab, Dr. W.: Versuch einer neuen Theorie der Hagelbildung. 8. Cassel. 1844. ¼ Thlr.

Vermischte Schriften.

Chassarant, J. Th.: Opinions nouvelles en matière de physique et d'astronomie. In-8. Nîmes. 1844.

Santini, Francesco: Memorie matematiche. Ferrara. 1843. In-4.

Abhandlung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Baier. Akademie der Wissenschaften. III. Bd. 3. Abth. gr. 4. Mit vielen lith. Beilagen. 1843. München. 2 Thlr.

Afhandlinger, det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs naturvidenskabelige og mathematiske. 10e Deel. Med 28 Tavler. gr. 4. Kjöbenhavn. 1843. 2$\frac{7}{12}$ Thlr.

XX.
Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Wörterbuch der angewandten Mathematik. Ein Handbuch zur Benutzung bei'm Studium und Betriebe derjenigen Wissenschaften, Künste und Gewerbe, welche Anwendungen der reinen Mathematik erfordern. Zugleich als Fortsetzung von G. S. Klügel's Wörterbuch der reinen Mathematik. Im Vereine mit mehreren Gelehrten und Praktikern bearbeitet von G. A. Jahn, Dr. philos. und Lehrer der Mathematik in Leipzig. I. 2. Lief. gr. 8. Leipzig. 1844. à 18 ggr.

Eine ausführlichere Anzeige dieses Werks scheint zweckmässig bis dahin ausgesetzt zu werden, wo mehrere Lieferungen erschienen sein werden, da dieselben schnell auf einander folgen zu sollen scheinen.

Arithmetik.

Desmarest, V.: Nouveau traité d'arithmétique. In - 8. Compiègne. 1844.

Forster: Elements of Algebra. 2 Edition. London. 1844. 2 sh.

Hill, Mag. C. J. Prof. i Math.: Prolegomena till hvarje blifvande allmän storhetslära. Lund. 1844. 4.

Derselbe: Utkast till' en allmän theorie för binomiska imaginära rütter säsom grund för de trigonometriska functionernes algebraiska härledning samt lösning af casus irreducibilis. Lund. 1844. 8.

Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Für Gymnasien, höhere Bürgerschulen und Gewerbschulen in systematischer Folge bearbeitet von Eduard Heis, Oberlehrer der Mathematik, Physik und Chemie an der combinirten höheren Bürger- und Provincial-Gewerbschule zu Aachen. Dritte, vermehrte Auflage. Köln. 1844. 8. 1 Thlr.

Von diesem ausgezeichneten Schulbuche wird in einem der nächsten Hefte eine ausführlichere Beurtheilung geliefert werden, weshalb jetzt die vorläufige Anzeige von dem Erscheinen der dritten vermehrten Auflage desselben genügen mag.

Grundriss der höheren Analysis. Herausgegeben von Joseph Salomon, ö. o. Professor der gesammten reinen Mathematik am k. k. polytechnischen Institute in Wien. Wien. 1844. 8. 3 Thlr.

Dieses sehr deutlich geschriebene, und, besonders in Bezug auf das Publikum, für welches es besonders bestimmt ist, ziemlich vollständige und reichhaltige Lehrbuch der sogenannten Analysis des Endlichen, der Differenzialrechnung und der Integralrechnung, ist weder ganz im Geiste der älteren, noch ganz im Geiste der neueren Behandlungsmethode der Analysis verfasst, sondern es finden sich vielmehr in demselben beide Methoden mit einander vereinigt, was wir in Rücksicht auf das Publikum, für welches der Verfasser zunächst geschrieben hat, nur vollkommen billigen können, da z. B. die Methode der unbestimmten Coefficienten bei allen ihren Unvollkommenheiten dem Praktiker, dem es oft weniger auf die Methode an sich, als vielmehr auf die Auffindung eines Resultats ankommt, in vielen Fällen vortreffliche Dienste leisten kann. Dabei hat aber der Verfasser die Unvollkommenheiten der älteren Methoden durchaus nicht verschwiegen, sondern vielmehr nicht unterlassen, an geeigneten Stellen besonders auf dieselben hinzuweisen, und die neueren Methoden keineswegs, wie dies leider nur zu oft noch geschieht, ignorirt, sondern denselben, so weit es seinem nächsten Zwecke angemessen und entsprechend war, mit Recht eine ganz besondere Aufmerksamkeit geschenkt, sich dabei auch selbst als einen mit den grossen Fortschritten, welche die Analysis in neuerer Zeit namentlich in Beziehung auf strengere theoretische Begründung gemacht hat, vollkommen vertrauten Gelehrten gezeigt. Daher findet man denn in diesem Werke so Manches, was man in vielen anderen neueren Werken, selbst in solchen, die eine bloss theoretische Richtung verfolgen, vergebens sucht, wie z. B. die Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen; die, wenn man bei eigenen Untersuchungen vor Fehlschlüssen gesichert sein will, so wichtigen Bedingungen der Ungleichheit; die eben so wichtige Lehre von den Mittelgrössen; eine genauere Theorie der imaginären Grössen; eine sehr gut durchgeführte allgemeine Theorie der Gleichungen, u. A. also natürlich auch den wichtigen Satz, dass jede Gleichung mit beliebigen reellen oder imaginären Coeffi-

cienten immer wenigstens eine reelle oder imaginäre Wurzel von der Form $p+q\sqrt{-1}$ hat, auf welchen am Ende Alles ankommt, und auf dem die ganze Theorie der Gleichungen als ihrer eigentlichen Basis ruhet, ohne Zuhülfenahme anderweitiger Hülfsmittel rein algebraisch bewiesen: die gehörige Berücksichtigung der Reste oder Ergänzungen der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe, und vieles Andere, was hier besonders namhaft zu machen uns der Raum fehlt. Auch die Integralrechnung ist in hinreichender Ausführlichkeit behandelt, und vielen Abschnitten ist eine grössere Anzahl zweckmässig gewählter Uebungsbeispiele beigefügt. Ueber die Anwendung der Analysis auf die Geometrie denkt der Herr Verfasser ein eigenes Lehrbuch herauszugeben, weshalb dieselbe in dem vorliegenden Werke keine Berücksichtigung gefunden hat.

Wir glauben in der That, so viel eine für jetzt natürlich weniger ins Einzelne gehende Durchsicht des Werks dieses Urtheil zu begründen im Stande ist, Praktikern, welche der Analysis ein strenges und ernstes Studium zu widmen gedenken, sich dabei aber auch nicht zu weit über den Kreis der nächsten Brauchbarkeit und Nützlichkeit hinaus bewegen wollen, gegenwärtig kein besseres Lehrbuch als das vorliegende empfehlen zu können, namentlich wenn ihnen dabei der Rath eines schon mit der Wissenschaft mehr vertrauten Mannes zur Seite steht. Denn der Herr Verfasser sagt selbst, dass er das Buch mehr zu einem Lehrbuche, als für den Selbstunterricht bestimmt habe, obgleich der Vortrag uns so deutlich scheint, dass ein einigermassen fähiger, mit den Elementen gehörig vertrauter Kopf schwerlich häufig auf Schwierigkeiten stossen wird. Was der Herr Verfasser in der Vorrede über den Unterricht von Praktikern und Technikern sagt, unterschreiben wir aus vollster Ueberzeugung, und das vorliegende Werk ist seiner ganzen Anlage nach der beste und augenfälligste Beweis, dass bei dem Unterrichte auf dem polytechnischen Institute in Wien keineswegs ein solches Abrichtungssystem, wie leider noch zu oft auf anderen Anstalten ähnlicher Art, befolgt, sondern die freie aber strenge Wissenschaft, wie ihre Natur es nicht anders zulässt, auch streng wissenschaftlich, aber, wie es ebenfalls recht und zweckgemäss ist, nicht ohne sorgfältige stete Rücksicht auf ihre Anwendung im Leben und nicht in eine unbestimmte Weite hinein, behandelt wird.

Sammlung ausgewählter allgemeiner Formeln, Beispiele und Aufgaben aus der Differenzialrechnung und deren Anwendung auf Geometrie. Ein Hülfsbuch für Lehrer und Schüler an höheren Unterrichtsanstalten. Herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. Mit einer Figurentafel. Braunschweig. 1844. 8. Preis des Ganzen 1 Thlr. 8 ggr.

Fortsetzung von Literarischer Bericht. No. XVI. S. 242.

XVI. Von den Spiralen oder den auf Polarcoordinaten bezogenen ebenen Curven. XVII. Singuläre oder besonders merkwürdige Punkte. XVIII. Beschreibung ebener Curven. XIX. Differenziirung der Functionen mit mehreren Veränderlichen. XX. Elimination willkührlicher Constanten und Functionen. XXI. Reihenentwickelung der Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. (Dieser Abschnitt enthält fur Functionen mit mehreren

veränderlichen Grössen die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe, so wie ferner die Lagrange'sche und Laplace'sche Reversionsformel; aber noch weniger als bei dem Taylor'schen und Maclaurin'schen Satze für Functionen mit einer veränderlichen Grösse finden sich hier Beispiele für die Reste der in Rede stehenden Reihen, mit gehöriger Beziehung auf deren Convergenz und Divergenz, was wir für einen sehr fühlbaren und wesentlichen Mangel dieser Schrift halten, da dieselbe nur, wenn auf diese Gegenstände gebührend Rücksicht genommen worden wäre, als dem neueren Zustande und den neueren Fortschritten der Wissenschaft entsprechend, und dieselben gehörig würdigend, betrachtet werden könnte, worauf schon bei der Anzeige ihrer ersten Hälfte hingewiesen worden ist). XXII. Maxima und Minima der Functionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen. XXIII. Krumme Flächen und Curven von doppelter Krümmung. XXIV. Vermischte Beispiele und Aufgaben.

Wallace: Practical Mathematician's Pocket Guide: a set of Tables of Logarithms of Numbers, and of Logarithmic Sines and Tangents: with other useful Tables for Engineers, Surveyors, Mechanics, etc. 32mo. London. 1844. bound 1 s. 6 d.

Geometrie.

Müller, F. H.: Erster Cursus der Geometrie. Von den geraden Linien, welche nicht einen Raum einer ebenen Fläche, in welcher sie liegen, auf allen Seiten begränzen. gr. 8. Frankfurt a. M. 1844. cart. ¼ Thlr.

Unger, Dr. E. S.: Der erste Unterricht in der Geometrie. Ein Leitfaden zur Entwickelung und Uebung der Fassungskraft der Jugend. Für die Lehrer der Volksschulen, so wie für diejenigen, die sich selbst unterrichten wollen. Nach einer eigenthümlichen Methode bearbeitet. gr. 8. Erfurt. 1844. ⅘ Thlr.

Percin, J.: Géométrie simplifiée. 3ième édition. Avec 4 planch. 12. Nanci. 1844.

Lamé-Fleury: La géométrie racontée aux enfants. Petit-18. Bruxelles. ¼ Thlr. 1844.

Hill, C. J.: Conatus theoriam linearum parallelarum stabiliendi praecipui, quos recensuit novisque superstruxit fundamentis atque auxit. Londae. 1844. 4.

Lehrbuch der Stereometrie für Schulen. Von Dr. August Hubert, Oberlehrer der Mathematik und Physik

an der Königlichen Realschule zu Berlin. Berlin. 1844. 8. 8 ggr.

Ein deutlich geschriebenes ganz kurzes Lehrbuch über die Elemente der Stereometrie. Von den Polyedern im Allgemeinen hätte immer etwas beigebracht werden können; namentlich hätte wohl das Euler'sche Theorem nebst seinen wichtigsten Folgerungen aufgenommen zu werden verdient, da dasselbe sich jetzt so einfach und leicht beweisen lässt. Nicht ganz billigen können wir es übrigens, wenigstens für den Schulunterricht, dass der Verfasser in der Stereometrie schon trigonometrische Betrachtungen zu Hülfe nimmt. Freilich aber kann dies mit äusseren Einrichtungen der Schule, für welche das Buch zunächst bestimmt ist, zusammenhängen und durch dieselben gerechtfertigt werden.

Grassmann, Herm.: Die Wissenschaft der extensiven Grösse, oder die Ausdehnungslehre; eine neue mathematische Disciplin. 1ster Th. A. u. d. T.: die lineare Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, durch Anwendung auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert. gr. 8. Nebst 1 Taf. in 4. Leipzig. 1844. 2 Thlr.

(Diese Schrift ist jetzt noch nicht in unsere Hände gelangt, scheint aber eine ausführlichere Anzeige zu verdienen, die späterhin gegeben werden wird.)

Praktische Geometrie.

Langsdorf, G. W. v.: Grundriss der Geodäsie. 2te Auflage. Mannheim. 1844. 12 ggr.

(M. s. Literar. Bericht. No. XIII. S. 197.)

Löwener, H.: Anfangsgründe des geometrischen Zeichnens für die unteren Klassen der Volks- und Gewerbeschulen. 4. ($3\frac{1}{2}$ lith. Bogen.) Dorpat. 1844. 10 ggr.

Praktische Mechanik.

Demme, A. V.: Der praktische Maschinenbauer. 16. 17. Lieferung. 8. Mit 54 Taf. Abbildungen. Quedlinburg. 1844. $5\frac{1}{4}$ Thlr.

Description des machines et procédés consignés dans les brevets d'invention, de perfectionnement et d'importation dout la durée est

expirée, et dans ceux dont la déchéance a été prononcée; publiée par les ordres de M. le ministre du commerce. Tome 52. 4. Avec 33 planches. Paris. 1844. 15 fr.

Astronomie.

Hartmann, Urania. Das Wissenswürdigste aus der Himmelskunde und mathematischen Geographie. In allgemein fasslicher Darstellung. 2te verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. Mit 21 lith. Tafeln nebst 2 Sternchärtchen mit beweglichem Horizont. Leipzig. 1844. 1 Thlr.

George, B. J.: Traité élémentaire de la sphère. 4me édition. Paris.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1847. Mit Genehmigung der Königl. Akademie der Wissenschaften herausgegeben vom Königlichen Astronomen etc. Ritter J. F. Encke. gr. 8. 1844. Berlin. 2⅔ Thlr.

Connaissance des tems ou des mouvemens célestes, a l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1847. Publiée par le bureau des Longitudes. 8. Paris. 1844. 5 fr.

Nicolai, C H.: Wegweiser durch den Sternenhimmel oder Anleitung auf leichte Art die Sterne am Himmel finden und kennen zu lernen. Für Gebildete jedes Standes. 3te völlig umgearbeitete und mit einer neuen Sternkarte versehene Auflage. 8. Leipzig. 1844. ½ Thlr.

Ziemann: Grosse Wand- und Deckenkarte des nördlichen gestirnten Himmels, nach Stieler, Bode und Littrow gezeichnet, für Schulen und Privatgebruuch herausgegeben. 4 Blatt. Halle. 1844. 1 Thlr.

Geschichte der Astronomie vom Anfange des neunzehnten Jahrhunderts bis zu Ende des Jahrs 1842, von G. A. Jahn. Zweiter Band. Leipzig. 1844. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

Dieser zweite Band ist ganz in derselben Weise verfasst, wie der im Literarischen Berichte. No. XVI. S. 249. ungezeigte erste Band, so dass das Werk, wie dort schon erwähnt worden ist, weniger als eine eigentliche Geschichte der Astronomie, als vielmehr als ein Repertorium der wichtigsten Erscheinungen auf dem Felde der Astronomie in dem auf dem Titel genannten Zeitraume zu betrachten ist, aus welchem Gesichspunkte dasselbe daher auch nur beurtheilt werden darf; und in dieser Beziehung ist seine Nützlichkeit für viele Leser nicht zu verkennen. Der vorliegende zweite Band betrifft die Fixsterne, und zwar die Fixsterncataloge, Aber-

ration, Nutation und Präcession, eigene Bewegung und Parallaxe der Fixsterne, Sternkarten und Himmelsgloben, die Doppelsterne, Sternhaufen, Nebelflecke, u. s. w.; ferner astronomische Gegenstände vermischten Inhalts, nämlich die Refraction, Schiefe der Ekliptik, geographische Längen- und Breitenbestimmungen, Theorie der Parallaxenrechnung, Sternbedeckungen, Sonnen- und Mondfinsternisse, Mondsculminationen, Chronometrische Längenbestimmung durch Pulversignale, Methoden zur Bestimmung der Zeit und Polhöhe, Interpolation, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Sternschnuppen; dann astronomische Geographie, und zwar Gradmessungen, kritische Untersuchungen über ältere Gradmessungen, Pendelbeobachtungen, Gestalt der Erde zufolge astronomischer Bestimmungen, andere die Theorie und Praxis der astronomischen Geographie betreffende Arbeiten. Den Schluss dieses Bandes bildet ein, wie es scheint, ziemlich vollständiges alphabetisch geordnetes Verzeichniss der Sternwarten und der auf denselben thätigen Astronomen, nebst Angabe der auf diesen Anstalten sich findenden wichtigsten Instrumente. Die Anzahl der aufgezählten Sternwarten beträgt ungefähr neunzig, unter denen sich aber freilich viele ganz unbedeutende und längst verschollene finden. Dass ein solches Verzeichniss nicht ganz ohne Fehler und ohne Auslassungen sein kann, wird jeder Billigdenkende gern zugeben. Auffallend ist es uns gewesen, dass bei Breslau fälschlich v. Biela als Director der Sternwarte angegeben, und v. Boguslawski's, der doch als Vorsteher der dortigen Sternwarte bekannt genug ist, mit keinem Worte gedacht wird. Vielleicht beruht dies aber auf einer blossen Namensverwechselung. Ferner ist es u. A. auffallend, dass sich über die neue unter Herrn Quetelet's Leitung erbaute Sternwarte zu Brüssel mit Ausnahme einer ganz kurzen Notiz über die Bestimmung der Breite derselben gar nichts findet. Hätte der Herr Verfasser sich, wenn ihm die nöthigen Nachrichten fehlten, an Herrn Quetelet gewandt, so würde derselbe ihm mit seiner bekannten grossen Bereitwilligkeit gewiss alle gewünschte Auskunft ertheilt haben. Auch scheint es, was wir hier nur beiläufig erwähnen wollen, dass der Herr Verfasser unter mehreren anderen eine Quelle gar nicht gekannt hat, aus welcher er viele nützliche und höchst interessante Nachrichten über Sternwarten und Astronomen hätte schöpfen können, nämlich die Correspondance mathématique et physique publiée par A. Quetelet. In dieser Zeitschrift finden sich u. A. folgende Aufsätze. T. I. p. 67. Extrait d'un rapport sur la formation d'un observatoire dans le royaume des Pays-Bas. — T. III. p. 85. Descriptions des observatoires principaux d'Allemagne. p. 90 Note sur l'observatoire de Bruxelles. p. 236. Instrumens destinés a l'observatoire de Bruxelles. — T. IV. p. 313. Descriptions des principaux observatoires d'Angleterre. — T. V. p. 58. Descriptions des observatoires d'Angleterre. p. 266. Construction d'un nouvel observatoire de Genève. — T. VI. p. 126. Notes extraites d'un voyage scientifique, fait en Allemagne pendant l'été de 1829. p. 161. Sur les observatoires de l'Allemagne, 2e article. Notes extraites d'un voyage fait en Allemagne, 3e article. Mehreren dieser sämmtlich von Herrn Quetelet verfassten Aufsätze, aus denen der Herr Verf. manche Nachträge zu seinem verdienstlichen Verzeichnisse wird entnehmen können, sind Grundrisse und Aufrisse der Sternwarte beigegeben.

Im Allgemeinen müssen wir noch bemerken, dass in einigen Partieen das Werk an einer gewissen Unvollständigkeit leidet. Denn wie es z. B. kommt, dass unter dem Artikel Pendelbeobachtungen S. 191. — S. 200. Bessel's wichtiger Arbeiten über diesen Gegenstand, so viel wir wenigstens finden können, gar keine Erwähnung gethan worden ist, lässt sich schwer erklären, da doch Bessel's Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels im Jahre 1828 erschienen sind, und also ganz in den Zeitraum gehören, welchen der Verfasser in seinem Werke umfassen wollte. Ueberhaupt scheint sich derselbe zu sehr bloss an die aus Journalen gewonnene Ausbeute gehalten, und grössere Werke weniger berücksichtigt zu haben. Denn, um nur eins anzuführen, so hat der Verfasser z. B. in dem der Geodäsie gewidmeten Abschnitte nur des Unterzeichneten Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie. Leipzig. 1837. in einer Note erwähnt, das grössere Werk desselben aber: Sphäroidische Trigonometrie. Berlin. 1833. 4., in welchem alle hierher gehörenden Lehren mit der grössten Vollständigkeit zu entwickeln und in ein strenges wissenschaftliches System zu bringen versucht worden sind, ganz unberücksichtigt gelassen. Eben so wenig finden wir auf S. 205. neben Puissant's Traité de Géodésie auch Oriani's Elementi di Trigonometria sferoidica. Bologna. 1806. 4., Thune's Tentamen circa Trigonometriam sphaeroidicam. Hanniae. 1815. 4. und die wichtige Abhandlung von Gauss: Disquisitiones generales circa superficies curvas. Gottingae. 1828. 4., welche Schriften alle für die höhere Geodäsie von grosser Wichtigkeit sind, erwähnt.

Dessenungeachtet ist aber in dieser Geschichte der Astronomie Vieles gesammelt, was für diejenigen, denen ein unmittelbarer Zugang zu den Quellen nicht gestattet ist, von Wichtigkeit und Interesse sein muss. G.

Physik.

Melos, F. G.: Naturlehre für Bürger- und Volksschulen, so wie für die untern Klassen der Gymnasien. 6te Aufl. Durchgesehen von Dr. E. F. August. Leipzig. 1843. ⅔ Thlr.

Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie, für deutsche Verhältnisse frei bearbeitet von Dr. J. Müller. 13te Lief. d. 2. Bds. Schluss des Werks. Braunschweig. 1844. gr. 8. 12 ggr.

Ettingshausen, Andr. v.: Anfangsgründe der Physik. gr. 8. Mit 5 Kupfertafeln in ½Fol. Wien. 1844. 3 Thlr. 8 ggr.
(Das Werk ist nun vollständig erschienen. M. s. Literarischer Bericht. No. XV. S. 237.)

Olivier, G. F.: Physique usuelle, exposé des principaux phé-

nomènes de la nature, renfermant une météorologie élémentaire, c'est-à-dire l'explication des causes, qui produisent le vent, les nuages, la rosée, la gelée, la pluie, la neige, la grêle, le tonnerre, les échos, etc. et un grand nombre d'expériences faciles sur l'eau, le feu, l'air, l'électricité et le magnétisme; extrait des écrits les plus estimés, sur cette matière. Ouvrage réellement élémentaire et à la portée des plus jeunes élèves des colleges et des institutions. Troisième édition, revue et corrigée. In-12. Paris. 1844. 1. 50.

Cambridge course of Elementary Natural Philosophy; being the demonstrations of the Propositions in Mechanics and Hydrostatics, in which those Persons who are not Candidates for Honours are examined for the Degree of B. A. 3d edition. 12mo. Cambridge. 1844. 4 sh.

Whatson, T.: Lectures on the principles and practice of physic at Kings College, London. 2 vols. London. 1844. 1 L. 14 sh.

Kleine hygrometrische Tafeln für die Beobachtung des Psychrometers. Göttingen. 1844. 16. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Diese kleinen von Herrn Professor Listing zu Göttingen herausgegebenen hygrometrischen Tafeln scheinen uns, so weit wir, ohne dieselben schon längere Zeit wirklich gebraucht zu haben, urtheilen können, den Beobachtern des Psychrometers Behufs der Berechnung ihrer Beobachtungen recht sehr zu empfehlen zu sein. Sie sind sehr compendiös und können jeder kleinen Logarithmentafel bequem beigebunden werden. Im Wesentlichen kommen sie mit den grösseren Stierlin'schen Tafeln (Hülfstafeln und Beiträge zur neueren Hygrometrie. Köln. 1834. Taf. III., IV., IX.) überein. Sie sind für metrisches Maass und Centesimalgrade eingerichtet, wie es uns scheint, ganz mit Recht, da es wenigstens jedenfalls sehr wünschenswerth ist, dass diese Eintheilungen immer in allgemeineren Gebrauch kommen.

Versuche über Magnetketten und über die Eigenschaften der Glieder derselben, besonders über jene, welche ihnen angewöhnt, oder auf sonstige Weise willkührlich ertheilt werden können, von Dr. J. B. C. Hessel, Prof. der Mineralogie und Technologie zu Marburg u. s. w. Ein auch für Laien interessanter Beitrag zur Lehre von der magnetischen Anziehung und Tragkraft. Marburg. 1844. 8. 1 Thlr. 16 ggr.

Der Herr Verfasser dieser den Physikern, besonders auch Lehrern zur Benutzung für die bei ihrem Unterrichte anzustellenden Versuche zu empfehlende Schrift spricht sich selbst in der Vorrede über dieselbe auf folgende Art aus: „Jeder Kenner magnetischer Erscheinungen weiss, dass über die Gesetze des Festhaltens zwischen einem Magnet und einem Eisenstück die Wissenschaft noch keineswegs im Klaren ist. — Die hier entwickelten und durch Versuche nachgewiesenen Gesetze für die Erregung magnetischer Kraft in einem Eisen- oder Stahlstück, auf welches ein Magnet wirkt, so wie jene für die Erregungsvermehrung beim Aufeinanderwirken von Magneten, scheinen daher die Aufmerksamkeit der Physiker zu verdienen. Dass von diesen Gesetzen jene Gesetze abhängen, die für

die Bildung von Magnetketten und für ihr Zerreissen, mithin auch für das Festhalten oder für das Zerreissen der zweigliedrigen, von einem Magnete und seinem Anker gebildeten Kette gelten, ist von selbst einleuchtend. Da sehr viele der Versuche, welche hier erläutert werden, etwas Ueberraschendes haben und dabei doch leicht angestellt werden können, sich also ganz vorzüglich dazu eignen, um in Vorlesungen über Physik angestellt zu werden: so lässt sich erwarten, dass durch sie die Aufmerksamkeit der Physiker auch auf diesen Theil ihrer Wissenschaft rege gemacht werde. Manches was ich noch nicht, oder nur unvollkommen zu erklären vermochte, wird dann bald deutlicher erklärt, vielleicht auch wohl Einzelnes, durch genauere Versuche als die, welche ich anzustellen vermochte, berichtigt werden". — Wir empfehlen diese Schrift namentlich aus dem unmittelbar vorher angegebenen Grunde nochmals den Lehrern der Physik zur Berücksichtigung beim physikalischen Unterrichte.

Ueber die galvanische Kohlenzinkkette und einige mit derselben angestellte Beobachtungen von Dr. W. Th. Casselmann. Marburg. 1844. 8. 16 ggr.

Am Ende der Vorrede sagt der Herr Verfasser: „In ihrer jetzigen Gestalt wird die Kohlenzinkbatterie jedem andern ähnlichen Apparate an die Seite gestellt werden müssen, und namentlich der Platinzinkbatterie ihrer grössern Einfachheit wegen vorzuziehen sein, zumal da sie selbst in kleinerer Form allen zu wissenschaftlichen Untersuchungen erforderlichen Bedingungen vollkommen entspricht".

Neue Beiträge zur Chemie und Physik von Dr. G. W. Osann. Mit galvanokaustischen Abbildungen. Des ersten Beitrags dritte Lieferung. Würzburg. 1844. 8 ggr.

Diese Lieferung enthält folgende Aufsätze:

11. Betrachtungen über die Frage, ob es eine oder zwei Elektricitäten giebt (Schluss).
12. Zur nähern Kenntniss des Ohmischen Gesetzes.
13. Verschiedene Mittheilungen aus dem Gebiete der Elektricität. Compressionssäule. Kleine Grove'sche Säule. Zum voltaischen Grundversuch. Grösse der Platinbleche in der Grove'schen Säule. Entzündung von Schwefelpulver durch den elektrischen Funken.
14. Beitrag zur Photochemie.
15. Neue Versuche über Ergänzungsfarben.

Partsch, Paul: Die Meteoriten oder vom Himmel gefallenen Steine und Eisenmassen im k. k. Hof-Mineralien-Kabinette zu Wien. Mit 1 Abbildung. gr. 8. Wien. 1844. 1 Thlr.

Seidemann: Der Wetterprophet, ein Witterungstaschenbuch für das Jahr 1845. Enthaltend die genaue Angabe der Witterung auf alle Tage dieses Jahres. Nebst einem Anhange, enthaltend: Anweisung, wie man das in neuerer Zeit so beliebt gewordene Baroscop selbst fertigen kann. Nützliches und Unterhaltendes aus der Naturgeschichte. Die monatlichen Verrichtungen im Blumen- und Küchengarten. 8. Leipzig. 1845. 4 ggr.

Digitized by Google

Colla, A.: Notizie meteorologiche relative agli anni 1841 e 1842. Parma. 1842. In-8.

Danesie, G. L.: Relazione topografico-fisico-meteorologica. 8. Siena. 1842.

Annalen für Meteorologie und Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände, redigirt von Grunert, Koller, Kreil, Lamont, Plieninger, Quetelet, Stieffel, herausgegeben von Dr. J. Lamont.

Jahrgang 1844. Heft X. Magnetische Terminbeobachtungen in Prag und Mailand im Jahre 1843 — Meteorologische Beobachtungen in Cronberg bei Frankfurt a. M. 1843. Vom Herrn Lehrer Becker. — Vergleichung der meteorologischen Beobachtungen in Brüssel und München. 1842. — Meteorologische Beobachtungen in Kaiserslautern vom Januar bis Juni 1843. Von Herrn C. W. H. Faber. — Uebersicht der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen in Cracau. 1843. Von Herrn Profess. Weisse. — Temperatur, Regenmenge und Windverhältnisse in Copenhagen 1843, verglichen mit den früheren Jahren. — Magnetische und meteorologische Beobachtungen, angestellt an der Königlichen Sternwarte bei München, während der Monate Januar, Februar und März 1844. — Perturbations magnétiques, observées dans la déclinaison à l'observatoire de Parme pendant Janvier, Février et Mars 1844. — Gewitter im Jahre 1842, nach den Beobachtungen von Landsberg, Neustadt a. d. A., Ansbach, Gunzenhausen, Burglengenfeld, Hohenpeissenberg, Dilingen, Hof, Würzburg, Leipzig, Cronberg. — Gewitter im Jahre 1843 nach den Beobachtungen von Ansbach, Burglengenfeld, Carlsruhe, Cronberg, Dilingen, Gunzenhausen, Hof, Hohenpeissenberg, Mallersdorf, Neustadt a. d. A., Uffenheim, Bensberg. — Resultate zehnjähriger auf der Sternwarte in Kremsmünster angestellter Beobachtungen über die Feuchtigkeitsverhältnisse unserer Atmosphäre. Von Herrn M. Koller. — Tägliche Periode der magnetischen Declination in Prag und Brüssel, verglichen mit den für München erhaltenen Bestimmungen. Vom Herausgeber. — Meteorologische Beobachtungen in Stuttgart im Jahre 1843. Von Herrn Prof. Plieninger. — Mittlerer Barometer- und Thermometerstand nach den in Frankfurt a. M. von dem physikalischen Vereine unter Leitung des Herrn Dr. Greiss veranstalteten Beobachtungen nebst Differenz Frankfurt-München. — Tafeln zur Berechnung der relativen Feuchtigkeit aus dem Dunstdrucke. Von Herrn B. Valz, Director der Sternwarte in Marseille. — Magnetische Störungen, beobachtet in München während der Monate Januar, Februar und März 1844. — Vermischte Nachrichten vom Herausgeber: Wirkung eines nahen Blitzschlages auf die magnetischen Instrumente. Mittheilungen von Herrn Fournet. Aufzeichnung der Autographen in Prag von Herrn Kreil.

Repertorium der Physik. Enthaltend eine vollständige Zusammenstellung der neuern Fortschritte dieser Wissenschaft. Unter Mitwirkung der Herren Broch, Lejeune-Dirichlet, Minding, Mahlmann, Moser, Radicke, Riess, Röber, Strehlke, herausgegeben von H. W. Dove. V. Band. Berlin. 1844. 8. 2 Thlr. 6 ggr.

Der allgemeine Inhalt dieses Bandes ist folgender. Mechanik von Minding. Allgemeine Gesetze der Wellenbewegung von Broch. Literatur des Magnetismus und der Elektricität von H. W. Dove (eine sehr vollständige Zusammenstellung dieser reichen Literatur). Ueber das Auge von L. Moser.

Vermischte Schriften.

Mathematische Abhandlungen der Königlichen Academie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1842. Enthält: die am 2. März vorigen Jahres gelesene 4te Abhandlung von Encke, über den Kometen von Pons. Berlin. 1844. 4.

Annuaire pour l'an 1844, présenté au Roi, par le bureau des longitudes. 2e édition, augmentée de notices scientifiques par M. Arago. Paris. 1844. 1 fr.

Actes de la société helvétique des sciences naturelles, réunie à Lausanne les 24, 25 et 26 Juillet. 1843. 28e session. Lausanne. 1843.

Ausser mehreren interessanten physikalischen Notizen finden sich in diesen Theilen der Schriften der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft auch mehrere grössere Aufsätze botanischen geologischen und chemischen Inhalts, letztere von Prof. Schönbein zu Basel. Mit Bezug auf S. 269. bemerken wir auch, dass in No. 1. und No. 4. der Mittheilungen, welche jetzt die naturforschende Gesellschaft zu Bern in zwanglosen Nummern herausgiebt, einige nicht uninteressante Betrachtungen über graphische Darstellungen der Zahlen und über die Primzahlen von Herrn Lehrer Rudolph Wolf an der Realschule zu Bern abgedruckt sind.

Digitized by Google

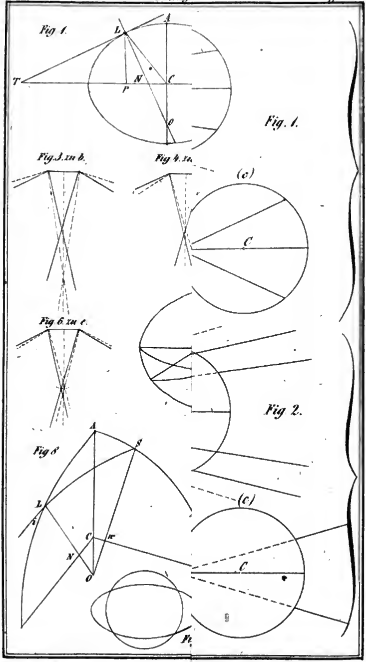


Fig 1.
L
A
T
N
C
P
O
Fig. 1.
Fig.3. zu b.
Fig 4. zu
(c)
C
Fig 6. zu c.
Fig 2.
A
S
Fig 8
L
C
w
N
O
(c)
C

Digitized by Google

Fig. 1.

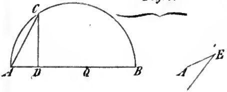


Fig. 4.

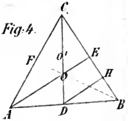


Fig. 5.

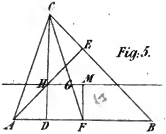


Fig. 9.

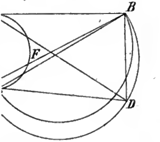


Fig. 7.

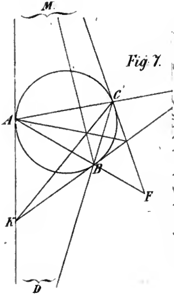
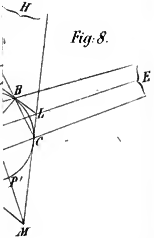


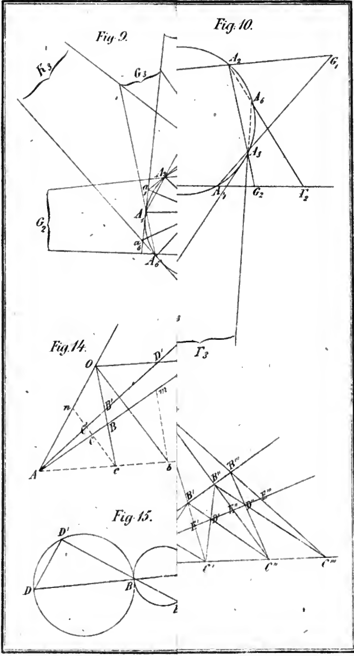
Fig. 8.



UNIV. OF MICH.

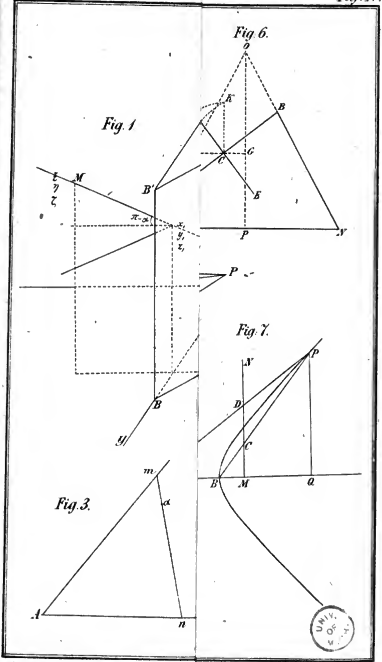
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



UNIV. OF M.

Digitized by Google

Fig. 1.

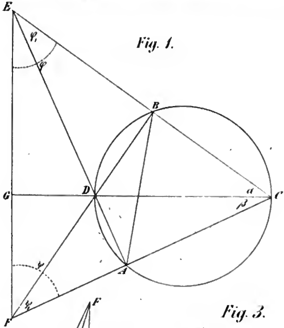


Fig. 2.

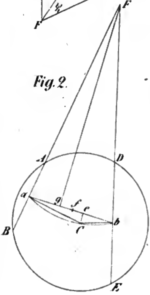
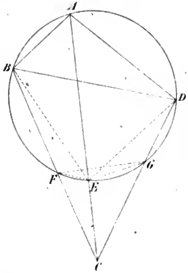


Fig. 3.



Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Sechster Theil.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.

1845.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss des sechsten Theils.

Mathematische Methode.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XLIV.	Betrachtungen einiger Gegenstände der Logik, mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Mathematik. Von Herrn Dr. Wilhelm Matzka, Professor der Mathematik an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow in Galizien	I.	353

Arithmetik.

I.	Ueber den Vortrag der Lehre von der Anflösung der Gleichungen des dritten Grades. Von dem Herausgeber	I.	1
IV.	Entwickelung der beiden im Literarischen Berichte. Nr. XVIII. S. 278. und S. 279. angeführten Lehrsätze des Herrn Clausen. Von Herrn A. Göpel zu Berlin	I.	25
V.	Ueber die Rechnungsspielerei im fünften Theile. S. 223. dieses Archivs. Von Demselben	I.	34
VI.	Ueber einen Satz von der Convergenz der Reihen. Aus einer Abhandlung des Herrn Professors C. J. Malmstén zu Upsala in den Nov. Act. Reg. Soc. scientiarum Upsaliensis. Vol. XII. Upsaliae. MDCCCLIV. p. 225. mitgetheilt von dem Herausgeber	I.	38
VII.	Note sur l'Intégrale finie $\Sigma c^x y$. Par Monsieur C. J. Malmstén, Professeur de Mathématiques à l'Université d'Upsala. (Aus den Novis Actis Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Vol. XII. Upsaliae. 1844. mitgetheilt vom Herausgeber)	I.	41
IX.	Allgemeines Kriterium für die Fälle, in welchen die Logarithmen rationale Brüche sind, nebst einer Methode, die letzteren aufzufinden. Von Herrn F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	I.	57
XIV.	Einige Bemerkungen über den Beweis des Moi-		

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite
	vre'schen Lehrsatzes ohne Hülfe des Imaginären. Von Herrn A. Göpel zu Berlin	I.	102
XV.	Bemerkungen über die Lehre von den geometrischen Progressionen. Von Herrn E. Heis, Oberlehrer an der höheren Bürger- und Provinzialgewerbschule zu Aachen	I.	104
XIX.	Beweis und Berichtigung des im 4. Bande des Archivs. 3. Heft. S. 332. Nr. XXXV. Satz 2. vorgelegten Lehrsatzes. Von dem Herrrn Professor W. Matzka an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow in Galizien	II.	124
XXII.	Ueber die Verwandlung der Quadratwurzeln in unendliche periodische Kettenbrüche. Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	II.	147
XXIII.	Ueber die im vorhergehenden Aufsatze aufgestellten Sätze. Von Herrn Richard Müller, Studirenden der Mathematik zu Jena	II.	151
XXIV.	Auflösung der Gleichung $x^y = y^x$ in reellen Zahlen. Von Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover	II.	154
XXIX.	Ueber bestimmte Integrale und Summirung einiger Reihen. Von Herrn F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	II.	187
XXXI.	Ueber einige Integrale, welche goniometrische Functionen involviren. Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	II.	200
XXXIII.	Ein Paar allgemeine Eigenschaften der Euler'schen Integrale zweiter Art. Von Demselben	II.	213
XXXIV.	Satz von den periodischen Kettenbrüchen. Von Herrn Catalan	II.	223
XXXV.	Geometrischer Beweis des Satzes, dass jeder algebraischen Gleichung mit Einer Unbekannten durch einen complexen Werth dieser Unbekannten Genüge geleistet werden kann. Von Herrn Dr. T. Wittstein zu Hannover . . .	III.	225
	Nachschrift des Herausgebers	III.	236
XXXIX.	Ist $\int \frac{dx}{lx} = lx + \text{const.}$, oder $= \frac{1}{2} l(x^2) + \text{const.}$? Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	III.	326
XLI.	Preisaufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Paris für 1846	III.	334
XLI.	Herleitung des Differentialquotienten $\frac{d.x^n}{dx} = nx^{n-1}$, ohne Unterscheidung der Art des reellen Exponenten n. Von dem Herrn Professor Dr. Matzka zu Tarnow in Galizien .	III.	335
XLV.	Goniometrische Auflösung dreier Gleichungen von der Form $ax + by + cz = i$, $a_1x + b_1y + c_1z = i_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Von dem Herausgeber . .	IV.	370
XLVII.	Disquisitiones de congruentiis omnium gradnum et residuis ordinis cujuscunque. Auctore Friderico Arndt, Praeceptore Gymnasii Sundensis	IV.	380

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
L.	Ueber die Potenzen mit imaginären Exponenten. Von Herrn L. Ballauff, Lehrer an der Bürgerschule zu Varel	IV.	409
LII.	Nachtrag zu dem Aufsatze über den Vortrag der Lehre von der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades (Thl. VI. Nr. I. S. 1.). Von dem Herausgeber	IV.	428
LIII.	Ueber bestimmte Integrale. Von Herrn F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	IV.	434
LVI.	Ueber das bestimmte Integral $\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}dx.$ Von Herrn J. A. Serret. Mitgetheilt vom Herausgeber	IV.	448

Geometrie.

II.	Ueber die geometrischen Oerter der Mittelpunkte einiger Begränzungscurven des Schattens. Von Herrn L. Mossbrugger, Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau	I.	7
III.	Ueber elliptische Flächenräume. Von Demsolben	I.	19
VIII.	Ueber das reguläre Siebzehneck. Nach einem Aufsatze d. Hrn. B. Amiot, Professeur au Collége Saint Louis, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Terquem et Gerono. T. III. Paris. 1844. p. 271. frei bearbeitet von dem Herausgeber	I.	46
XI.	Bemerkungen zu zwei Abhandlungen in diesem Archiv in Betreff der Steiner'schen Sätze über die Conischen Sechsecke und Sechsseite. Von Herrn A. Göpel zu Berlin	I.	87
XII.	Einige Bemerkungen über die Rectification und Quadratur des Kreises. Nach einem Aufsatze des Herrn E. Catalan in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Terquem et Gerono. T. I. Paris. 1842. p. 190. frei bearbeitet von dem Herausgeber	I.	90
XVII.	Satz vom Trapezium von Herrn Lebelln	I.	110
XVII.	Satz vom regulären Octaeder von Abélard Servedieu Lévy	I.	111
XVIII.	Berechnung des Körperinhaltes der Prismen. Von dem Herrn Professor W. Matzka an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow in Galizien	II.	113
XX.	Ueber die Normalen der Kegelschnitte. Nach drei Aufsätzen des Herrn Gerono, Professeur de Mathématiques, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Terquem et Gerono. T. II. Paris. 1843. p. 16. 72. 170. frei bearbeitet von dem Herausgeber	II.	127
XXVIII.	Auflösung der Aufgabe: in ein gegebenes Viereck ein Quadrat zu beschreiben; nebst einigen		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Sätzen, welche zu beweisen sind. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	II.	178
XXX.	Ueber eine geometrische Aufgabe. Von dem Herausgeber	II.	195
XXXIV.	Geometrischer Lehrsatz. Von Herrn Professor Friedrich Pross zu Stuttgart	II.	222
XXXVIII.	Ueber die Projection einer geraden Linie auf einer Ebene, auf einer Fläche überhaupt, und auf der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids insbesondere. Von dem Herausgeber	III.	293
XLI.	Ueber die Berechnung der Zahl π. Von Herrn A. J. H. Vincent, Professeur au collége Saint-Louis. Mitgetheilt vom Herausgeber	III.	331
XLII.	Ueber die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre. Von Herrn Hermann Grassmann, Lehrer an der Friedrich-Wilhelmsschule zu Stettin	IV.	337
XLIII.	Observation géométrique, au sujet du problème traité p. 321. du V. vol. de ce journal. Par Monsieur le docteur J. R. Boyman, à l'école superieure de Malmedy	IV.	371
XLIX.	Andeutungen zu planimetrischen Aufgaben aus der Curvenlehre. Von Herrn J. Katzfei, Director des Gymnasiums zu Münstereifel	IV.	405

Trigonometrie.

XIII.	Allgemeiner Beweis der bekannten Ausdrücke für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$. Von Herrn F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	I.	95
XXXII.	Ueber eine für den Elementar-Unterricht in der Trigonometrie vorzüglich geeignete Methode zur Erläuterung der Berechnung der Tafeln der Sinus und Cosinus. Nach einem Aufsatze des Herrn Lionnet, Professeur au Collége royal Louis-le-Grand, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Terquem et Gerono. T. II. Paris. 1843. p. 216. frei bearbeitet von dem Herausgeber	II.	205
XLI.	Bemerkung zu einer Stelle im Archiv. Thl. V. S. 220. Von Herrn F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	III.	333
LVI.	Ueber die Bestimmung der Grössen R, φ, ψ aus den drei Gleichungen $A=R\cos\varphi\cos\psi$, $B=R\sin\varphi\cos\psi$, $C=R\sin\psi$. Von dem Herausgeber	IV.	447

Geodäsie.

XXI.	Nachträge zur Ausgleichungsrechnung. Von dem Herrn Professor Dr. Gerling zu Marburg	II.	141
XLVI.	Ueber die Genauigkeit der Ketten-Messungen (Dritter Nachtrag zur Ausgleichungsrechnung). Von Demselben	IV.	375

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XLVIII.	Ueber die Libelle oder das Niveau. Von Herrn Lingre, lieutenant du génie belge. Mitgetheilt von dem Herausgeber	IV.	400

Mechanik.

XXV.	Auszug aus einem Briefe des Herrn Professor Steichen an der École militaire Belgique zu Brüssel an den Herausgeber	II.	163
XXVI.	Bemerkungen über die bei dem Mechanismus der Gegenlenkung an Dampfmaschinen beschriebenen Curven. Von dem Herrn Doctor Haedenkamp, Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm in Westphalen	II.	168
XXVII.	Berechnung der Geschwindigkeit der Locomotiven auf Eisenbahnen. Von Demselben	II.	172
XXXVI.	Ueber das Princip des kleinsten Zwangs und die damit zusammenhängenden mechanischen Principe. Von Herrn Professor Dr. Reuschle am Gymnasium zu Stuttgart	III.	238
XXXVII.	Untersuchungen über den sogenannten bergan laufenden Doppelkegel. Von dem Herrn Prof. Dr. F. Stegmann an der Universität zu Marburg	III.	270
LI.	Ueber das ballistische Problem. Von dem Hrn. Doctor Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin	IV.	415

Optik.

X.	Ueber Systeme von Linsengläsern. Von dem Herausgeber	I.	62
LIV.	Nachtrag zu der Abhandlung über Linsengläser (Thl. VI. Nr. X. S. 62.). Von dem Herausgeber	IV.	400

Astronomie.

XLI.	Passagen-Prisma des Hrn. Professors v. Steinheil zu München	III.	334

Physik.

XVII.	Wichtige meteorologische Arbeit des Herrn Professors Nervander zu Helsingfors. Mitgetheilt von dem Herausgeber	I.	107
LV.	Ueber eine Methode zur Bestimmung der Ausdehnung der Körper durch die Wärme. Von dem Herausgeber	IV.	443

Geschichte der Mathematik und Physik.

XXXIV.	Linné, nicht Celsius, Erfinder des hunderttheiligen Thermometers	II.	224
XLI.	Vorfall, welcher sich Herrn Arago ereignete	III.	333
XLI.	Tod des Optikers Robert-Aglaé Cauchoix zu Paris	III.	334

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

XVI.	Einige Aufgaben	I.	105
	Zusatz zu den zu beweisenden Sätzen. Thl. V. S. 335. Von Herrn A. Göpel zu Berlin ...	I.	106
XL.	Aufgaben von dem Herrn Professor Dr. Stegmann an der Universität zu Marburg	III.	329
	Lehrsatz aus der Differentialrechnung. Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	III.	330
	Geometrische Aufgabe von Herrn Anton Ritman zu Wien	III.	330
	Arithmetische Aufgabe	III.	330

Literarische Berichte*).

XXI.	....	I.	313
XXII.	....	II.	329
XXIII.	....	III.	345
XXIV.	....	IV.	357

*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Druckfehler.

S. 429. Z. 4. v. u. setze man $q^3+q_1^3$ statt q^3+q_1.

I.

Ueber den Vortrag der Lehre von der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

Von

dem Herausgeber.

Der in den Elementen gewöhnliche Vortrag der Lehre von der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades hat mir immer der Natur der Sache nicht recht entsprechend geschienen. Vielleicht dürfte sich die folgende Darstellung einigermassen zur Berücksichtigung beim Unterrichte empfehlen.

Die aufzulösende Gleichung, in welcher das zweite Glied fehlt, sei

$$1)\quad x^3 = ax + b,$$

wo a und b reelle Grössen sind. Man setze

$$2)\quad x = (p + q\sqrt{-1}) + (p_1 + q_1\sqrt{-1})$$
$$= p + p_1 + (q + q_1)\sqrt{-1},$$

wo auch p, q, p_1, q_1 reelle Grössen sein sollen, so ist, wie man leicht findet:

$$x^3 = 3(p + q\sqrt{-1})(p_1 + q_1\sqrt{-1})\{p + p_1 + (q + q_1)\sqrt{-1}\}$$
$$+ (p + q\sqrt{-1})^3 + (p_1 + q_1\sqrt{-1})^3$$

oder

$$x^3 = 3(p + q\sqrt{-1})(p_1 + q_1\sqrt{-1})x + (p + q\sqrt{-1})^3$$
$$+ (p_1 + q_1\sqrt{-1})^3;$$

und wenn also

$$x = p + p_1 + (q + q_1)\sqrt{-1}$$

eine Wurzel unserer Gleichung sein soll, so müssen die Grössen $p_1\ q,\ p_1,\ q_1$ so bestimmt werden, dass den beiden Gleichungen

$$3(p + q\sqrt{-1})(p_1 + q_1\sqrt{-1}) = a,$$
$$(p + q\sqrt{-1})^2 + (p_1 + q_1\sqrt{-1})^2 = b;$$

d. i., wie man nach leichter Entwickelung findet, den beiden Gleichungen

$$pp_1 - qq_1 + (pq_1 + qp_1)\sqrt{-1} = \tfrac{1}{3}a,$$
$$\left.\begin{array}{l} p^2 + p_1^2 - 3pq^2 - 3p_1q_1^2 \\ -(q^2 + q_1^2 - 3p^2q - 3p_1^2q_1)\sqrt{-1} \end{array}\right\} = b;$$

also den vier Gleichungen

$$3)\quad \begin{cases} pp_1 - qq_1 = \tfrac{1}{3}a,\ pq_1 + qp_1 = 0, \\ p^2 + p_1^2 - 3pq^2 - 3p_1q_1^2 = b, \\ q^2 + q_1^2 - 3p^2q - 3p_1^2q_1 = 0 \end{cases}$$

genügt wird.

Richten wir nun aber unser Augenmerk zunächst und vorzüglich auf die Auffindung einer reellen Wurzel unserer gegebenen Gleichung, ohne uns für's Erste darum zu bekümmern, ob es auch eine reelle Wurzel in allen Fällen wirklich giebt, so kommt zu den vier obigen Bedingungsgleichungen noch die Gleichung

$$q + q_1 = 0,$$

und wir müssen also die vier Grössen $p,\ q,\ p_1,\ q_1$ so zu bestimmen suchen, dass den fünf Gleichungen

$$4)\quad \begin{cases} q + q_1 = 0, \\ pp_1 - qq_1 = \tfrac{1}{3}a,\ pq_1 + qp_1 = 0, \\ p^2 + p_1^2 - 3pq^2 - 3p_1q_1^2 = b, \\ q^2 + q_1^2 - 3p^2q - 3p_1^2q_1 = 0 \end{cases}$$

genügt wird, wobei nun aber die zwei folgenden Fälle von einander unterschieden werden müssen.

I. Wenn man der ersten der fünf vorhergehenden Gleichungen zufolge $q_1 = -q$ setzt, zugleich aber annimmt, dass die Grössen q und q_1 beide verschwinden, so sind offenbar die fünf Gleichungen 4) vollständig erfüllt, wenn man die Grössen $p,\ p_1$ so bestimmt, dass den zwei Gleichungen

$$pp_1 = \tfrac{1}{3}a,\quad p^2 + p_1^2 = b$$

genügt wird.

Setzt man $p^3 = u$, $p_1{}^3 = u_1$, so werden diese Gleichungen

$$uu_1 = \tfrac{1}{27}a^3,\quad u + u_1 = b;$$

und weil nun

$$(u - u_1)^2 = (u + u_1)^2 - 4uu_1 = b^2 - \tfrac{4}{27}a^3$$

ist, so hat man zur Bestimmung von u, u_1 die beiden Gleichungen

$$u + u_1 = b,\quad u - u_1 = \pm\sqrt{b^2 - \tfrac{4}{27}a^3},$$

aus denen sich

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2},\quad u_1 = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2};$$

also

$$p = \sqrt[3]{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}},$$

$$p_1 = \sqrt[3]{\frac{b \mp \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}}$$

ergiebt. Wenn daher

$$\tfrac{4}{27}a^3 \overline{\lessgtr} b^2$$

ist, so ist

$$5)\quad p + p_1 = \sqrt[3]{\frac{b + \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b - \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}}$$

eine reelle Wurzel unserer Gleichung, und folglich

$$(p + p_1)^3 - a(p + p_1) - b = 0.$$

Zieht man dies von

$$x^3 - ax - b$$

ab, so erhält man

$$x^3 - ax - b = x^3 - (p + p_1)^3 - a\{x - (p + p_1)\},$$

oder, wie man leicht findet:

$$x^3 - ax - b = \{x - (p + p_1)\}\{x^2 + (p + p_1)x + (p + p_1)^2 - a\},$$

und die beiden anderen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - ax - b = 0 \text{ oder } x^3 = ax + b$$

ergeben sich daher durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + (p + p_1)x + (p + p_1)^2 - a = 0,$$

Digitized by Google

wodurch man nach dem bekannten Verfahren

$$6)\quad x = -\tfrac{1}{2}(p + p_1) \pm \sqrt{a - \tfrac{3}{4}(p + p_1)^2}$$

erhält. Hier frägt sich nun, ob diese beiden Wurzeln reell oder imaginär sind, welche Frage auf folgende Art beantwortet werden kann.

Wenn $\frac{4}{27}a^3 = b^2$ ist, so ist

$$(p - p_1)^2 = 0,$$

also

$$p^2 + p_1^2 = 2pp_1,$$

und folglich

$$(p + p_1)^2 = 4pp_1,$$

d. i. wegen der Gleichung $pp_1 = \frac{1}{3}a$:

$$(p + p_1)^2 = \tfrac{4}{3}a$$

oder

$$\tfrac{3}{4}(p + p_1)^2 = a,$$

also

$$a - \tfrac{3}{4}(p + p_1)^2 = 0,$$

und die Wurzeln 6) sind also in diesem Falle beide reell und einander gleich.

Wenn $\frac{4}{27}a^3 < b^2$ ist, so ist

$$(p - p_1)^2 > 0,$$

also

$$p^2 + p_1^2 > 2pp_1,$$

und folglich

$$(p + p_1)^2 > 4pp_1,$$

d. i. wegen der Gleichung $pp_1 = \frac{1}{3}a$:

$$(p + p_1)^2 > \tfrac{4}{3}a$$

oder

$$\tfrac{3}{4}(p + p_1)^2 > a,$$

also

$$a - \tfrac{3}{4}(p + p_1)^2 < 0,$$

und die Wurzeln 6) sind also in diesem Falle beide imaginär.

Die gegebene Gleichung hat also drei reelle oder eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln, jenachdem $\frac{4}{27}a^3 = b^2$ oder $\frac{4}{27}a^3 < b^2$ ist; im ersten Falle sind zwei der drei reellen Wurzeln einander gleich.

II. Wenn man der ersten der fünf Gleichungen 4) zufolge $q_1 = -q$ setzt, zugleich aber annimmt, dass die Grössen q und q_1

nicht verschwinden, so folgt aus der dritten der fünf genannten Gleichungen, nämlich aus der Gleichung

$$pq_1 + qp_1 = 0,$$

auf der Stelle $p_1 = p$, und die fünfte Gleichung, nämlich die Gleichung

$$q^3 + q_1^3 - 3p^2q - 3p_1^2q_1 = 0$$

ist nun identisch gleich Null. Die zweite und vierte Gleichung, nämlich die Gleichungen

$$pp_1 - qq_1 = \tfrac{1}{3}a,$$
$$p^3 + p_1^3 - 3pq^2 - 3p_1q_1^2 = b,$$

werden aber

$$p^2 + q^2 = \tfrac{1}{3}a,\ p^3 - 3pq^2 = \tfrac{1}{2}b;$$

und die Grössen p und q sind also jetzt so zu bestimmen, dass diesen beiden Gleichungen genügt wird.

Hierbei sind wir nach I. offenbar berechtigt anzunehmen, dass

$$\tfrac{4}{27}a^3 > b^2,$$

also auch a nothwendig positiv ist. Demzufolge können wir die erste der beiden zu erfüllenden Gleichungen auf die Form

$$\left(p\sqrt{\frac{3}{a}}\right)^2 + \left(q\sqrt{\frac{3}{a}}\right)^2 = 1$$

bringen, und sind also offenbar berechtigt,

$$p\sqrt{\frac{3}{a}} = \sin\varphi,\ q\sqrt{\frac{3}{a}} = \cos\varphi$$

d. i.

$$p = \sin\varphi\sqrt{\frac{a}{3}},\ q = \cos\varphi\sqrt{\frac{a}{3}}$$

zu setzen. Führen wir diese Ausdrücke von p und q in die zweite der beiden zu erfüllenden Gleichungen ein, so wird dieselbe nach einigen leichten Reductionen

$$\sin\varphi^3 - 3\sin\varphi\cos\varphi^2 = \frac{3b}{2a}\sqrt{\frac{3}{a}} = \sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}}.$$

Weil nun aber nach einer bekannten goniometrischen Relation

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi\cos\varphi^2 - \sin\varphi^3$$

ist, so ist

$$\sin 3\varphi = -\sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}}.$$

Digitized by Google

Da nach der Voraussetzung

$$\tfrac{4}{27}a^3 > b^2, \text{ also } \frac{27b^2}{4a^3} < 1$$

ist, so kann aus der vorhergehenden Gleichung 3φ immer bestimmt werden. Bezeichnen wir nun den seinem absoluten Werthe nach $\frac{1}{2}\pi$ nicht übersteigenden, der Gleichung

$$\sin 3\varphi = -\sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}}$$

genügenden Werth von 3φ durch $-\omega$, so sind, weil

$$\sin(\omega-\pi) = \sin(-\omega),\ \sin(\omega+\pi) = \sin(-\omega)$$

ist, auch $\omega - \pi$ und $\omega + \pi$ Werthe von 3φ, und für φ erhält man also die drei Werthe $-\frac{1}{3}\omega$, $\frac{1}{3}(\omega-\pi)$, $\frac{1}{3}(\omega+\pi)$; folglich für $p = p_1$ die drei folgenden reellen Werthe:

$$-\sin\tfrac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{a}{3}},\ \sin\tfrac{1}{3}(\omega-\pi)\sqrt{\frac{a}{3}},\ \sin\tfrac{1}{3}(\omega+\pi)\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Da nun $p + p_1 = 2p$ eine Wurzel unserer Gleichung ist, so hat dieselbe im vorliegenden Falle jederzeit die drei folgenden reellen Wurzeln:

$$7)\quad x = \begin{cases} -2\sin\frac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{a}{3}} \\ 2\sin\frac{1}{3}(\omega-\pi)\sqrt{\frac{a}{3}} \\ 2\sin\frac{1}{3}(\omega+\pi)\sqrt{\frac{a}{3}} \end{cases}$$

oder

$$8)\quad x = \begin{cases} -2\sin\frac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{a}{3}} \\ -2\sin\frac{1}{3}(\pi-\omega)\sqrt{\frac{a}{3}} \\ 2\sin\frac{1}{3}(\pi+\omega)\sqrt{\frac{a}{3}}. \end{cases}$$

Auch erhellet leicht, dass die zwei ersten dieser drei reellen Wurzeln immer negativ sind, die dritte Wurzel dagegen stets positiv ist. Dass die drei Wurzeln im vorliegenden Falle jederzeit sämmtlich unter einander ungleich sind, fällt eben so leicht in die Augen.

Aus der vorhergehenden Entwickelung ergiebt sich also überhaupt Folgendes.

1. Wenn $\frac{4}{27}a^3 = b^2$ oder $4a^3 = 27b^2$ ist, so hat die gegebene Gleichung drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind.

2. Wenn $\frac{4}{27}a^3 < b^2$ oder $4a^3 < 27b^2$ ist, so hat die gegebene Gleichung eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Digitized by Google

3. Wenn $\frac{4}{27}a^3 > b^2$ ist, so hat die gegebene Gleichung drei sämmtlich unter einander ungleiche reelle Wurzeln, zwei negative und eine positive.

4. Die gegebene Gleichung hat also hiernach auch immer mindestens eine reelle Wurzel.

Sind auch die im Vorhergehenden gefundenen Resultate nicht neu, so scheint mir doch die obige Darstellung eine bessere Einsicht als die gewöhnliche in die eigentliche Natur des Gegenstandes zu gewähren, und deshalb beim Elementarunterrichte vielleicht einiger Berücksichtigung nicht ganz unwerth zu sein.

II.

Ueber die geometrischen Oerter der Mittelpunkte einiger Begränzungscurven des Schattens.

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

Bestimmung der Oerter, auf welchen die Mittelpunkte der Begränzungscurven der Schatten liegen, die eine Fläche zweiten Grades auf eine gegebene Ebene wirft, wenn sich:

A) der leuchtende Punkt auf einer ausserhalb der Fläche gegebenen Linie zweiten Grades bewegt und die Ebene, auf welche die Schatten geworfen werden, fest bleibt.

B) Wenn der leuchtende Punkt fest bleibt, der Mittelpunkt der Fläche zweiten Grades aber (oder wenn diese keinen Mittelpunkt hat, ihr Scheitel) sammt der Fläche sich so auf einer Linie zweiten Grades bewegt, dass eine ihrer Hauptebenen mit der Ebene jener Linie zweiten Grades zusammenfällt und ihre Achsen sich immer parallel bleiben. Auch in diesem Fall sollen die fraglichen Mittelpunktsörter bestimmt werden, wenn die Ebene, worauf die Schatten geworfen werden, fest bleibt.

Wir schicken zum bessern Verständniss des Folgenden einige wenige Erklärungen und Sätze voraus.

1) Denken wir uns irgend eine Fläche F zweiten Grades und ausserhalb derselben, aber auf entgegengesetzten Seiten der Fläche F, zwei parallele Ebenen E und E' (z. B. die erstere oberhalb und

Digitized by Google

die andere unterhalb der Fläche F). In der erstern befinde sich ein Punkt P; wird aus diesem eine stetige Folge von geraden Berührenden an die Fläche F gezogen, so liegen diese bekanntlich auf der Oberfläche eines Kegels K zweiten Grades, welcher die zweite Ebene E in einer Linie L zweiten Grades schneiden, die Fläche F aber in einer andern Linie L' desselben Grades berühren wird.

2) Der Punkt P heisst der **Pol** der Ebene, in welcher sich die Linie L' befindet, so wie diese Ebene die **Polarebene** des Punktes P genannt wird.

3) Bewegt sich der Punkt P in einer Ebene, so dreht sich die Ebene der Berührungscurve um einen Punkt; bewegt er sich aber auf einer Geraden, so dreht sich letztere Ebene ebenfalls um eine Gerade.

4) Ist der Punkt P leuchtend, und die Fläche F dunkel, so ist ebenfalls bekannt, dass die Linie L die Begränzungscurve des Schattens ist, welchen die Fläche F auf die Ebene E wirft; ferner ist die Berührungscurve L' des Kegels K und der Fläche F die Trennungscurve des beleuchteten und dunkeln Theiles der letztern.

Nach diesen vorausgeschickten Erklärungen gehen wir zur Lösung der folgenden speciellen Aufgaben über:

I. Es ist ein Ellipsoid der Lage und Grösse nach gegeben; ausserhalb, und zwar oberhalb der Ebene, in welcher die beiden Hauptachsen $2A$ und $2B$ des Ellipsoids liegen, in der Entfernung h von dieser und parallel mit ihr befinde sich eine Ebene E, und ebenfalls ausserhalb, aber auf entgegengesetzter Seite in Beziehung auf die Ebene der Hauptachsen $2A$ und $2B$, befinde sich in der Entfernung $(-h')$ von dieser eine zweite parallele Ebene E'. In der ersteren Ebene E bewege sich ein leuchtender Punkt P so, dass er:

a) eine Ellipse, b) eine Hyperbel, c) eine Parabel, d) eine Gerade beschreibt. Die Mittelpunkte der beiden erstern und der Scheitel der dritten dieser Curven befinden sich im Durchschnittspunkte der verlängerten dritten Hauptachse $2C$ des Ellipsoids mit der Ebene E; und die beiden ersten Achsen 2α der beiden erstern, so wie der Hauptdurchmesser der dritten jener Leitcurven seien mit der Achse $2A$ des Ellipsoids parallel. Man soll die in der Ueberschrift verlangten Stücke der Aufgabe bestimmen.

Wir nehmen den Mittelpunkt des Ellipsoids zum Coordinatenanfang und seine Achsen zu Coordinatenachsen; alsdann ist dessen Gleichung:

$$\left\{\frac{x}{A}\right\}^2 + \left\{\frac{y}{B}\right\}^2 + \left\{\frac{z}{C}\right\}^2 = 1 \ldots. \quad (1)$$

Bezeichnen wir mit x', y' die veränderlichen Coordinaten eines Punktes P in der Ebene E, deren Gleichung $z = h$ ist, so ist, wenn dieser Punkt eine Ellipse beschreibt, deren Achsen 2α, 2β respective mit den Achsen $2A$ und $2B$ parallel sind, und deren Mittelpunkt im Durchschnitt der verlängerten Achse $2C$ mit der Ebene E ist,

$$\left\{\frac{x'}{\alpha}\right\}^2 + \left\{\frac{y'}{\beta}\right\}^2 = 1 \ldots. \quad (2)$$

die Gleichung jener Ellipse.

Ferner ist die Gleichung desjenigen Kegels, dessen Scheitel sich in irgend einem Punkte (x', y', h) dieser Ellipse befindet, und der das Ellipsoid (1) berührt, folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \{A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2\}(z-h)^2 \\ + \{A^2h^2 + C^2x'^2 - A^2C^2\}(y-y')^2 \\ + \{B^2h^2 + C^2y'^2 - B^2C^2\}(x-x')^2 \\ - 2C^2x'y'(x-x')(y-y') - 2B^2hx'(x-x')(z-h) \\ - 2A^2hy'(y-y')(z-h) \end{array}\right\} = 0 \;\ldots.\; (3)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $z = -h'$, so erhalten wir die Gleichung der Curve, in welcher die Kegelfläche (3) die Ebene E' durchdringt, oder der Curve, welche den Schatten begränzt, den das Ellipsoid (1) auf die Ebene E' wirft, wenn sich der leuchtende Punkt in einem Punkte P der Ellipse (2) befindet, dessen Coordinaten x', y', h sind.

Diese Gleichung ist:

$$\left.\begin{array}{l} \{A^2h^2 + C^2x'^2 - A^2C^2\}y^2 - 2C^2x'y'.xy \\ + \{B^2h^2 + C^2y'^2 - B^2C^2\}x^2 + 2A^2(C^2 + hh')y'.y \\ + 2B^2(C^2 + hh')x'.x + (h'^2 - C^2)\{A^2y'^2 + B^2x'^2\} \\ - A^2B^2(h+h')^2 \end{array}\right\} = 0 \;\ldots.\; (4)$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir leicht:

$$y = \frac{C^2 x' y' x - A^2(C^2 + hh')y'}{A^2h^2 + C^2x'^2 - A^2C^2} \pm \frac{\sqrt{\begin{Bmatrix} \{A^2C^2y'^2 + B^2C^2x'^2 - A^2B^2(C^2 - h^2)\}\{(C^2 - h^2)x^2 - 2(C^2 + hh')x'x + (C^2 - h'^2)x'^2\} \\ - A^4(C^2 - h'^2)(C^2 - h^2)y'^2 \end{Bmatrix}}}{A^2h^2 + C^2x'^2 - A^2C^2}$$

Nehmen wir nun an, es sei Taf. I. Fig. 1. $PCBQDA$ diejenige Curve, welche den Schatten in der Ebene E begränzt, und welche durch die Gleichung (4) dargestellt ist; ferner seien bei dem angenommenen rechtwinklichten Coordinatensystem $PL = q'$ und $QN = q''$ diejenigen Ordinaten, welche die Curve $PCBQDA$ in den Punkten P und Q tangiren; endlich seien $OL = p'$ und $\acute{O}N = p'$ die den Ordinaten q' und q'' entsprechenden Abscissen, so erhalten wir mittelst des letzten Ausdrucks für y:

$$q' = \frac{C^2 x' y' p' - A^2(C^2 + hh')y'}{A^2h^2 + C^2x'^2 - A^2C^2} \pm \frac{\sqrt{\begin{Bmatrix} \{A^2C^2y'^2 + B^2C^2x'^2 - A^2B^2(C^2 - h^2)\}\{(C^2 - h^2)p'^2 - 2(C^2 + hh')x'p' + (C^2 - h'^2)x'^2\} \\ - A^4(C^2 - h'^2)(C^2 - h^2)y'^2 \end{Bmatrix}}}{A^2h^2 + C^2x' - A^2C^2}$$

$$q'' = \frac{C^2 x' y' p'' - A^2(C^2 + hh')y'}{A^2h^2 + C^2x'^2 - A^2C^2} \pm \frac{\sqrt{\begin{Bmatrix} \{A^2C^2y'^2 + B^2C^2x'^2 - A^2B^2(C^2 - h^2)\}\{(C^2 - h^2)p''^2 - 2(C^2 + hh')x'p'' + (C^2 - h'^2)x'^2\} \\ - A^4(C^2 - h'^2)(C^2 - h^2)y'^2 \end{Bmatrix}}}{A^2h^2 + C^2x'^2 - A^2C^2}$$

Es ist aber offenbar, dass sowohl q' als auch q'' nur einen einzigen Werth haben kann, woraus hervorgeht, dass die unter den Wurzelzeichen befindlichen Ausdrücke Null sein müssen, wodurch wir zur Bestimmung von p' und p'' die beiden Gleichungen

$$\{A^2C^2y'^2 + B^2C^2x'^2 - A^2B^2(C^2 - h^2)\}\{(C^2 - h^2)p'^2 - 2(C^2 + hh')x'p' + (C^2 - h'^2)x'^2\} \\ - A^4(C^2 - h'^2)(C^2 - h^2)y'^2 = 0 \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\{A^2C^2y'^2 + B^2C^2x'^2 - A^2B^2(C^2 - h^2)\}\{(C^2 - h^2)p''^2 - 2(C^2 + hh')x'p'' + (C^2 - h'^2)x'^2\} \\ - A^4(C^2 - h'^2)(C^2 - h^2)y'^2 = 0 \ldots\ldots \quad (6)$$

erhalten. Dadurch wird aber auch:

$$q' = \frac{C^2x'y'p' - A^2(C^2 + hh')y'}{A^2h^2 + C^2x'^2 - A^2C^2},\quad q'' = \frac{C^2x'y'p'' - A^2(C^2 + hh')y'}{A^2h^2 + C^2x'^2 - A^2C^2} \Big\} \ldots\ (7)$$

Subtrahiren wir die Gleichung (6) von der Gleichung (5) und dividiren den Rest mit $p' - p''$, so erhalten wir:

$$(C^2 - h^2)(p' + p'') - 2(C^2 + hh')x' = 0,$$

also

$$p' + p'' = \frac{2(C^2 + hh')x'}{C^2 - h^2} \ldots\ (8)$$

Addiren wir die Gleichungen (7), so erhalten wir

$$q' + q'' = \frac{2(C^2 + hh')y'}{C^2 - h^2} \ldots\ (9)$$

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Mittelpunkts der Begränzungscurve $PCBQDA$ des Schattens mit t und u, so ist bekanntlich

$$t = \frac{p' + p''}{2},\quad u = \frac{q' + q''}{2}.$$

Aus diesen Gleichungen und aus (8) und (9) erhalten wir:

$$t = \frac{(C^2 + hh')x'}{C^2 - h^2},\quad u = \frac{(C^2 + hh')y'}{C^2 - h^2} \Big\} \ldots\ (10)$$

Ist jedoch der leuchtende Punkt P nicht fest, sondern bewegt er sich auf der Ellipse (2), so wird auch die Curve (3) in jedem Augenblick eine andere Lage und Gestalt annehmen, mithin auch ihr Mittelpunkt stetig seinen Platz ändern, also eine Curve beschreiben. Die Gleichung dieser Curve werden wir aber erhalten, wenn wir aus den Gleichungen (2) und (10) die Grössen x' und y' eliminiren. Dadurch erhalten wir

$$\left\{\frac{(C^2 - h^2)t}{\alpha(C^2 + hh')}\right\}^2 + \left\{\frac{(C^2 - h^2)u}{\beta(C^2 + hh')}\right\}^2 = 1 \ldots\ (11)$$

als die Gleichung des Orts der Mittelpunkte der Begränzungscurven des Schattens, wenn der leuchtende Punkt die Ellipse beschreibt, welche durch die Gleichung (2) dargestellt ist. Die Gleichung (11) drückt aber ebenfalls eine Ellipse aus, und zwar verhalten sich ihre beiden Achsen wie $\alpha : \beta$; mithin ist sie derjenigen Ellipse ähnlich, auf welcher sich der leuchtende Punkt P bewegt.

Es ist bei der Curve (11) zu bemerken, dass dieselbe für jeden positiven oder negativen Werth von h' reell bleibt, was begreiflich allen Vorstellungen und Begriffen von Schatten widerspricht, indem offenbar weder von Begränzungscurven des Schattens, noch von ihren Mittelpunkts-Oertern die Rede sein kann, wenn z. B. die Ebene E' sich in solchen Lagen befindet, die entweder zwischen dem Ellipsoid und dem leuchtenden Punkt, oder gar oberhalb von beiden liegen. In diesen Fällen muss die Gleichung (4) nicht betrachtet

werden, als drücke sie die Begränzungscurve des Schattens aus, sondern sie stellt alsdann offenbar nur die Durchschnittscurve des Umhüllungskegels (3) mit der Ebene E' vor, welche für alle positiven und negativen Werthe von h' reell sein wird. Bei dieser Betrachtung kann man mit jenen Untersuchungen die Frage verbinden: „Auf welcher Fläche liegen die sämmtlichen Mittelpunktscurven, wenn sich die Ebene E' parallel mit sich selbst bewegt?"

Wir werden die Gleichung dieser Fläche sogleich erhalten, wenn wir die Grösse h' als veränderlich betrachten und statt dieser in der Gleichung (11) eine neue Veränderliche $(\pm v)$ einführen, wodurch wir als Gleichung der gesuchten Fläche erhalten:

$$\left\{\frac{(C^2-h^2)t}{\alpha C^2}\right\}^2+\left\{\frac{(C^2-h^2)u}{\beta C^2}\right\}^2-\left\{\frac{hv}{C^2}\right\}^2\mp 2\left\{\frac{hv}{C^2}\right\}=1 \;\ldots\; (12)$$

Diese Gleichung drückt offenbar ein eintheiliges Hyperboloid aus, dessen Achsenrichtungen mit jenen des Ellipsoids (1) dieselben sind, dessen Mittelpunkt zwar auf der Achse der z, jedoch nicht auf dem des Ellipsoids liegt.

Eben so finden wir, wenn sich der leuchtende Punkt P in der Ebene E auf einer Hyperbel, Parabel oder einer Geraden bewegt, deren Gleichungen

$$\left\{\frac{x'}{\alpha}\right\}^2-\left\{\frac{y'}{\beta}\right\}^2=1 \;\ldots\; (13)$$

$$y'^2=px' \;\ldots\; (14)$$

$$y'=m+nx' \;\ldots\; (15)$$

sind, dass respective

$$\left\{\frac{(C^2-h^2)t}{\alpha(C^2+hh')}\right\}^2-\left\{\frac{(C^2-h^2)u}{\beta(C^2+hh')}\right\}^2=1 \;\ldots\; (16)$$

$$u=\sqrt{\frac{p(C^2+hh')t}{C^2-h^2}} \;\ldots\; (17)$$

$$u=\frac{m(C^2+hh')}{C^2-h^2}+nt \;\ldots\; (18)$$

die Gleichungen der Mittelpunkts-Oerter der Begränzungscurven der Schatten sind. Auch sehen wir aus diesen Gleichungen, dass die erstere eine Hyperbel ist, welche derjenigen ähnlich ist, welche durch die Gleichung (13) dargestellt ist; die zweite aber ist eine Parabel, die mit der in No. 14. ausgedrückten ähnlich ist; die dritte endlich ist eine mit der Geraden (15) parallele Linie.

Bewegt sich die Ebene E' wieder so, dass sie immer in paralleler Lage bleibt, so erhalten wir, wie vorhin, für die Gleichungen der Flächen, auf welchen sich die bezüglichen Mittelpunktscurven befinden, folgende:

$$\beta^2(C^2-h^2)^2t^2-\alpha^2(C^2-h^2)^2u^2-\alpha^2\beta^2h^2v^2\mp 2\alpha^2\beta^2C^2hv = \alpha^2\beta^2C^4 \;\ldots\; (19)$$

$$(C^2-h^2)u^2+phtv-C^2pt=0 \;\ldots\; (20)$$

$$mhv-(C^2-h^2)u+nt+mC^2=0 \;\ldots\; (21)$$

Die erste drückt ein zweitheiliges Hyperboloid aus, die zweite ein Paraboloid und die dritte eine Ebene.

Um den zweiten Theil der allgemeinen Aufgabe auf den speciellen Fall, wenn die Fläche F ein Ellipsoid ist, anzuwenden, nehmen wir an:

II. In der Ebene E befinde sich ein leuchtender, jedoch fester Punkt P, dessen Coordinaten a, b, c sein sollen; ferner sei ein Ellipsoid gegeben, das sich so bewegt, dass sein Mittelpunkt in der Ebene seiner beiden Achsen $2A$ und $2B$, welche sich während dessen Bewegung immer parallel bleiben sollen, a) eine Ellipse, b) eine Hyperbel, c) eine Parabel, d) eine Gerade beschreibt. Welches ist der Ort der Mittelpunkte der Begränzungscurven der Schatten, welche jenes Ellipsoid in seinen verschiedenen Lagen auf eine mit der Ebene der Achsen $2A$ und $2B$ parallele Ebene E' wirft, wenn diese von jener den Abstand k' hat?

Sind X, Y, Z die veränderlichen Coordinaten eines Punktes des Ellipsoids in irgend einer seiner in a) angegebenen Lagen; u, t jene seines beweglichen Mittelpunkts und

$$\left\{\frac{t}{\alpha}\right\}^2 + \left\{\frac{u}{\beta}\right\}^2 = 1 \ldots. \quad (22)$$

die Gleichung der Ellipse, auf der sich jener Mittelpunkt bewegt, so ist die Gleichung des Ellipsoids:

$$\left\{\frac{X-t}{A}\right\}^2 + \left\{\frac{Y-u}{B}\right\}^2 + \left\{\frac{Z}{C}\right\}^2 = 1 \ldots. \quad (23)$$

und die der umhüllenden Kegelfläche, deren Scheitel sich im Punkt (a, b, c) befindet:

$$\left.\begin{array}{l} \{B^2c^2 + C^2(b-u)^2 - B^2C^2\}(X-a)^2 \\ + \{A^2c^2 + C^2(a-t)^2 - A^2C^2\}(Y-b)^2 \\ + \{A^2(b-u)^2 + B^2(a-t)^2 - A^2B^2\}(Z-c)^2 \\ - 2C^2(a-t)(b-u)(X-a)(Y-b) \\ - 2B^2c(a-t)(X-a)(Z-c) \\ - 2A^2c(b-u)(Y-b)(Z-c) \end{array}\right\} = 0 \ldots. \quad (24)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $Z = -k'$, so erhalten wir die Gleichung der Curve, in welcher die Kegelfläche (23) die Ebene E' schneidet, d. h. die Gleichung der Curve, welche den Schatten begränzt, den das Ellipsoid (22) in irgend einer seiner Lagen auf die Ebene E' wirft. Diese ist daher:

$$\left.\begin{array}{l}\{C^2(a-t)^2-A^2(C^2-c^2)\}Y^2-2C^2(a-t)(b-u)XY\\+\{C^2(b-u)^2-B^2(C^2-c^2)\}X^2-2Y\{\{C^2(a-t)^2-A^2(C^2-c^2)\}b-aC^2(a-t)(b-u)-A^2c(c+h')(b-u)\}\\-2X\{\{C^2(b-u)^2-B^2(C^2-c^2)\}a-bC^2(a-t)(b-u)-B^2c(c+h')(a-t)\}\\+a^2\{C^2(b-u)^2-B^2(C^2-c^2)\}+b^2\{C^2(a-t)^2-A^2(C^2-c^2)\}\\+(c+h')^2\{A^2(b-u)^2+B^2(a-t)^2-A^2B^2\}-2abC^2(a-t)(b-u)\\-2ac(c+h')B^2(a-t)-2bc(c+h')A^2(b-u)\end{array}\right\}=0\;....\;(25)$$

Bemerken wir, dass wenn allgemein

$$\mathfrak{A}y^2+2\mathfrak{B}xy+\mathfrak{C}x^2+2\mathfrak{D}y+2\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}=0$$

die Gleichung einer Linie zweiten Grades darstellt, und x_1, y_1 die Coordinaten des Mittelpunkts der letztern sind, alsdann

$$x_1=\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{B}\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{C}},\quad y_1=\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{D}-\mathfrak{B}\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$$

ist. Bezeichnen wir daher die Coordinaten des Mittelpunkts der durch die Gleichung (25) ausgedrückten Linie zweiten Grades mit T und U, so erhalten wir nach jener vorausgeschickten Bemerkung nach einigen Reductionen:

$$\left.T=\frac{c(c+h')(a-t)+a(C^2-c^2)}{C^2-c^2},\quad U=\frac{c(c+h')(b-u)+b(C^2-c^2)}{C^2-c^2}\right\}\;....\;(26)$$

Eliminiren wir aus den Gleichungen (22) und (26) die Grössen t und u, so erhalten wir für die Gleichung der Curve, welche den gesuchten Ort ausdrückt, folgende:

$$\left.\begin{array}{c}\beta^2(C^2-c^2)^2T^2+\alpha^2(C^2-c^2)^2U^2-2\alpha^2b(C^2+ch')(C^2-c^2)U\\-2\beta^2a(C^2+ch')(C^2-c^2)T+(C^2+ch')^2(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)\\-\alpha^2\beta^2c^2(c+h')^2\end{array}\right\}=0\;....\;(27)$$

Diese Gleichung drückt aber eine mit der durch die Gleichung (22) dargestellten Ellipse **ähnliche Ellipse** aus.

Nehmen wir statt der Leitcurve (22) des Mittelpunkts vom Ellipsoid eine Hyperbel, eine Parabel, oder eine Gerade, deren Gleichungen

$$\left\{\frac{t}{\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{u}{\beta}\right\}^2 = 1 \ldots\ldots \quad (28)$$

$$u^2 = pt \ldots\ldots \quad (29)$$

$$u = m + nt \ldots\ldots \quad (30)$$

sind, so erhalten wir auf gleiche Weise, wie oben, für die Gleichungen der Ortscurven der fraglichen Mittelpunkte respective folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \beta^2(C^2-c^2)^2T^2 - \alpha^2(C^2-c^2)^2U^2 \\ + 2\alpha^2 b(C^2+ch')(C^2-c^2)U \\ - 2\beta^2 a(C^2+ch')(C^2-c^2)T \\ + (C^2+ch')^2(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2) \\ - \alpha^2\beta^2c^2(c+h')^2 \end{array}\right\} = 0 \ldots\ldots \quad (31)$$

$$U^2 - \frac{2b(C^2+ch')U}{C^2-c^2} + \frac{c(c+h')p}{C^2-c^2}T$$
$$+ \frac{(C^2+ch')^2}{(C^2-c^2)^2}\{ac(c+h')p - b^2(C^2+ch')\} = 0 \ldots\ldots \quad (32)$$

$$U = \frac{(C^2+ch')(b-an) - c(c+h')m}{C^2-c^2} + nT \ldots\ldots \quad (33)$$

Die erste dieser Gleichnngen drückt eine Hyperbel aus, die mit der Leitcurve (28) **ähnlich** ist; die zweite eine Parabel, welche ebenfalls mit der entsprechenden Leitparabel (29) **ähnlich** ist; die dritte endlich eine mit der Geraden (30) **parallele** Gerade.

III. Wir können auf gleiche Art die nämlichen Aufgaben in Beziehung auf andere Flächen des zweiten Grades lösen. Um jedoch Wiederholungen zu vermeiden, werden wir nur noch bei einer derselben die Resultate angeben.

Ist nämlich

$$\left\{\frac{x}{A}\right\}^2 + \left\{\frac{y}{B}\right\}^2 - \left\{\frac{z}{C}\right\}^2 = 1 \ldots\ldots \quad (34)$$

die Gleichung eines eintheiligen Hyperboloids, so finden wir in Beziehung auf die in Aufgabe I. gestellte Forderung für die Gleichung der Begränzungscurve des Schattens, welchen das Hyperboloid auf eine Ebene E, deren Gleichung $z = -h'$ ist, wirft, wenn (x', y', h) die Coordinaten des leuchtenden Punktes sind:

$$\left.\begin{array}{l} \{C^2x'^2 - A^2(C^2+h^2)\}y^2 - 2C^2x'y'.xy \\ + \{C^2y'^2 - B^2(C^2+h^2)\}x^2 + 2A^2(C^2-hh')y'.y \\ + 2B^2(C^2-hh')x'.x + A^2B^2(h+h')^2 \\ - (C^2+h'^2)(A^2y'^2+B^2x'^2) \end{array}\right\} = 0 \ldots. \quad (35)$$

Die Coordinaten t, u des Mittelpunkts dieser Curve sind:

$$t = \frac{(C^2-hh')x'}{C^2+h^2}, \quad u = \frac{(C^2-hh')y'}{C^2+h^2} \ldots. \quad (36)$$

Beschreibt der leuchtende Punkt (x', y', h) a) in der Ebene $z = h$ eine Ellipse, b) eine Hyperbel, c) eine Parabel, d) eine Gerade, deren Gleichungen respective

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{x'}{\alpha}\right\}^2 + \left\{\frac{y'}{\beta}\right\}^2 = 1, \ \left\{\frac{x'}{\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{y'}{\beta}\right\}^2 = 1 \\ y'^2 = px', \ y' = m + nx' \end{array}\right\} \ldots. \quad (37)$$

sind, so finden wir beziehungsweise für die Gleichungen der Curve, welche der Ort der Schattencurven Mittelpunkte ist, folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{(C^2+h^2)t}{\alpha(C^2-hh')}\right\}^2 + \left\{\frac{(C^2+h^2)u}{\beta(C^2-hh')}\right\}^2 = 1 \\ \left\{\frac{(C^2+h^2)t}{\alpha(C^2-hh')}\right\}^2 - \left\{\frac{(C^2+h^2)u}{\beta(C^2-hh')}\right\}^2 = 1 \\ u^2 = \frac{p(C^2-hh')t}{C^2+h^2}, \ u = \frac{m(C^2-hh')}{C^2+h^2} + nt \end{array}\right\} \ldots. \quad (38)$$

Wir erkennen aus der Form dieser Gleichungen die Aehnlichkeit der Curven, welche sie ausdrücken, mit den entsprechenden in No. 37.

Bleibt aber der leuchtende Punkt, dessen Coordinaten wir jetzt mit a, b, c bezeichnen wollen, fest, und bewegt sich das Hyperboloid so, dass sein Mittelpunkt in der Ebene der Kehlellipse a) eine Ellipse, b) eine Hyperbel, c) eine Parabel, d) eine Gerade beschreibt, und die drei Achsen des beweglichen Hyperboloids immer mit ihrer erst gegebenen Lage parallel bleiben, so finden wir bei den gleichen angenommenen Bezeichnungen, wie beim Ellipsoid in Aufgabe II., für irgend eine angegebene Lage des Hyperboloids, dessen Gleichung:

$$\left\{\frac{X-t}{A}\right\}^2 + \left\{\frac{Y-u}{B}\right\}^2 - \left\{\frac{Z}{C}\right\}^2 = 1 \ldots. \quad (39)$$

für die Gleichung des Schattenkegels aber:

$$\left.\begin{array}{l} \{C^2(a-t)^2 - A^2(C^2+c^2)\}(Y-b)^2 \\ + \{C^2(b-u)^2 - B^2(C^2+c^2)\}(X-a)^2 \\ - \{A^2(b-u)^2 + B^2(a-t)^2 - A^2B^2\}(Z-c)^2 \\ - 2C^2(a-t)(b-u)(X-a)(Y-b) \\ + 2B^2c(a-t)(X-a)(Z-c) \\ + 2A^2c(b-u)(Y-b)(Z-c) \end{array}\right\} = 0 \ldots. \quad (40)$$

und für die Gleichung der Begränzungscurve des Schattens in der Ebene $x = -h'$:

$$\left.\begin{array}{l}\{C^2(a-t)^2 - A^2(C^2+c^2)\}Y^2 - 2C^2(a-t)(b-u)XY \\ +\{C^2(b-u)^2 - B^2(C^2+c^2)\}X^2 \\ -2\{\{C^2(a-t)^2 - A^2(C^2+c^2)\}b - aC^2(a-t)(b-u) + A^2c(c+h')(b-u)\}Y \\ -2\{\{C^2(b-u)^2 - B^2(C^2+c^2)\}a - bC^2(a-t)(b-u) + B^2c(c+h')(a-t)\}X \\ +a^2\{C^2(b-u)^2 - B^2(C^2+c^2)\} - 2abC^2(a-t)(b-u) + b^2\{C^2(a-t)^2 - A^2(C^2+c^2)\} \\ -(c+h')^2\{A^2(b-u)^2 + B^2(a-t)^2 - A^2B^2\} + 2acB^2(c+h')(a-t) \\ +2bcA^2(c+h')(b-u)\end{array}\right\} = 0 \; \ldots . \quad (41)$$

Sind T, U die Coordinaten des Mittelpunkts dieser Curve, so finden wir, wie in Aufgabe II., dass

$$\left. T = \frac{a(C^2+c^2) - c(c+h')(a-t)}{C^2+c^2}, \quad U = \frac{b(C^2+c^2) - c(c+h')(b-u)}{C^2+c^2} \right\} \ldots . \quad (42)$$

Sind

$$\left\{\frac{t}{\alpha}\right\}^2 + \left\{\frac{u}{\beta}\right\}^2 = 1, \; \left\{\frac{t}{\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{u}{\beta}\right\}^2 = 1, \; u^2 = pt; \; u = m + nt \; \ldots . \quad (43)$$

die Gleichungen der in a), b), c), d) angegebenen Curven, auf welchen sich der Mittelpunkt des Hyperboloids bewegt, so sind die Gleichungen der fraglichen Mittelpunktsörter folgende:

Im Fall a):

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2(C^2+c^2)^2U^2+\beta^2(C^2+c^2)^2T^2\\ +2\alpha^2b(ch'-C^2)(C^2+c^2)U\\ +2\beta^2a(ch'-C^2)(C^2+c^2)T\\ +(ch'-C^2)^2(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)-\alpha^2\beta^2c^2(c+h')^2\end{array}\right\}=0\ \ldots.\ (44)$$

Im Fall b):

$$\left.\begin{array}{l}\beta^2(C^2+c^2)^2T^2-\alpha^2(C^2+c^2)^2U^2\\ -2\alpha^2b(ch'-C^2)(C^2+c^2)U\\ +2\beta^2a(ch'-C^2)(C^2+c^2)T\\ +(ch'-C^2)^2(a^2\beta^2-b^2\alpha^2)-\alpha^2\beta^2c^2(c+h')^2\end{array}\right\}=0\ \ldots.\ (45)$$

Im Fall c):

$$\left.\begin{array}{l}U^2=\frac{(ch'-C^2)}{(C^2+c^2)^2}\{pc(c+h')a-b^2(ch'-C^2)\}\\ \qquad -\frac{2b(ch'-C^2)U}{C^2+c^2}+\frac{pc(c+h')T}{C^2+c^2}\end{array}\right\}\ \ldots.\ (46)$$

Im Fall d):

$$U=\frac{(ch'-C^2)(an-b)+cm(c+h')}{C^2+c^2}+nT\ \ldots.\ (47)$$

Auch diese vier Curven sind **ähnlich** mit jenen in (43). Bei den übrigen Flächen des zweiten Grades wird man bei ähnlichen Untersuchungen Resultate erhalten, welche mit den bereits gefundenen im Allgemeinen übereinstimmen.

III.

Ueber elliptische Flächenräume.

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

Es bewegt sich ein Punkt P innerhalb einer Ellipse $DCBE$, (Taf. I. Fig. 2.), deren Achsen $2a$, $2b$ sein sollen, so, dass wenn man durch denselben parallel mit den beiden Achsen DB und EC Linien zieht, wie KS und AL, die Flächenräume $ACNL$ und $AKSB$, welche zwischen der parallelen Halbachse, dem von jenen Linien auf der andern Achse abgeschnittenen Stück und dem zwischenliegenden elliptischen Bogen begränzt sind, einander gleich werden. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

Es sei $AL = x$, $LN = y$, $AK = x'$, $KS = y'$, so ist bekanntlich der Inhalt der

$$\text{Fläche } ACNL = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2} \text{ Arc sin } \frac{x}{a} \ldots . \quad (1)$$

und der Inhalt der

$$\text{Fläche } AKSB = \frac{ax'}{2b}\sqrt{b^2 - x'^2} + \frac{ab}{2} \text{ Arc sin } \frac{x'}{b} \ldots . \quad (2)$$

Nach der Bedingung der Aufgabe muss also die Gleichung

$$\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{ax'}{2b}\sqrt{b^2-x'^2} + \frac{ab}{2}\text{Arc sin}\frac{x}{a} - \frac{ab}{2}\text{Arc sin}\frac{x'}{b} = 0 \ldots . \quad (3)$$

statt finden.

Dieser Gleichung wird aber Genüge geleistet, wenn wir entweder die transcendenten, oder die algebraischen Grössen einander gleich setzen; dadurch erhalten wir im ersten Fall:

$$\text{Arc sin } \frac{x}{a} = \text{Arc sin } \frac{x'}{b},$$

folglich auch

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{x'}{b},$$

mithin

$$x' = \pm \frac{bx}{a}.$$

Im zweiten Fall aber bekommen wir

$$\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ax'}{2b}\sqrt{b^2 - x'^2};$$

hieraus ist aber

$$x'^2 = \frac{b^2}{2} \pm b^2\left\{\frac{x^2}{a^2} - \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Nehmen wir denjenigen Werth von x'^2, welcher sich hieraus für das Zeichen + ergiebt, so erhalten wir: $x'^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$, also wiederum $x' = \pm \frac{bx}{a}$.

Dieser Werth wird offenbar die Gleichung (3) befriedigen. Wir sehen aber daraus ferner, dass es nicht nur einen, sondern eine stetige Folge von Punkten giebt, welche der in der Aufgabe gegebenen Forderung entsprechen. Bezeichnen wir daher die Coordinaten des veränderlichen Punktes P mit t und u, so haben wir $x = t$, $x' = u$, also ist die Gleichung des gesuchten Orts:

$$u = \pm \frac{bt}{a} \quad \ldots. \quad (4)$$

Bei dieser Gleichung erkennen wir aber auch gleich, dass durch sie die beiden Asymptoten einer Hyperbel dargestellt werden, die mit der gegebenen Ellipse denselben Mittelpunkt hat, und deren Scheitel in den Endpunkten der grossen Achse $2a$ der Ellipse sind, deren imaginäre Achse aber die gleiche absolute Grösse und Lage hat, wie die der kleinern Achse $2b$ der gegebenen Ellipse, die also allgemein unter dem Namen einer zugeordneten Hyperbel bekannt ist. Weil aber aus dem Obigen auch folgt, dass der elliptische Raum $CNnE$ gleich dem ell. R. $BSsD$, so haben wir den allgemeinen, so viel mir bekannt ist, noch neuen Satz:

I. Dass wenn man aus irgend einem Punkt der Asymptoten einer Hyperbel, welcher innerhalb der zugehörigen Ellipse liegt, mit den Achsen der letztern parallele Sehnen zieht, alsdann diejenigen beiden elliptischen Räume einander gleich sind, deren einer von der kleinen Achse, der ihr parallelen Sehne und den beiden elliptischen Bogen, welche zwischen jenen liegen, begränzt ist; der andere aber ist von der grossen Achse der ihr parallelen Sehne und den beiden zwischen diesen liegenden elliptischen Bogen eingeschlossen.

Mittelst dieses Satzes, den wir, wie besser unten gezeigt wird, noch weiter ausdehnen können, sind wir im Stande, die Gleichheit einer Menge elliptischer Räume herzuleiten und deren Flächen selbst zu bestimmen.

Der Kürze wegen wollen wir im Allgemeinen die fernern Bestimmungen nur auf Theile eines einzigen elliptischen Quadranten, nämlich von $ACFBA$ beschränken, und zuerst die Vergleichungen

zwischen den elliptischen Flächenräumen und alsdann erst die nähere Bestimmung ihres Inhalts vornehmen.

Wir haben daher nach dem obigen Satz:

$$\text{ellipt. Raum } ACNL = \text{ellipt. Raum } AKSB \; \ldots \; (5)$$

Nehmen wir von jedem dieser Räume das Rechteck $AKPL$ hinweg, so bleibt:

$$\text{ell. R. } KCNP = \text{ell. R. } LPSB \; \ldots \; (6)$$

Aus dem gefundenen allgemeinen Satze folgt ferner, wenn man $F\mathfrak{Z}$ parallel AB, und FT parallel AC zieht, dass

$$\text{ell. R. } ACFT = \text{ell. R. } A\mathfrak{Z}FB \; \ldots \; (7)$$

mithin ist auch

$$\text{ell. R. } \mathfrak{Z}CNF = \text{ell. R. } TFSB \; \ldots \; (8)$$

Beschreiben wir endlich das Rechteck $BRCeDgEi$ um die gegebene Ellipse und verlängern TF und $\mathfrak{Z}F$ bis sie die Seiten desselben in V und W treffen, so folgt aus (7) und (5), dass

$$\text{ell. R. } LNFT = \text{ell. R. } K\mathfrak{Z}FS \; \ldots \; (9)$$

mithin ist auch

$$\text{ell. R. } GNF = \text{ell. R. } hFS \; \ldots \; (10)$$

und

$$\text{ell. R. } UNVF = \text{ell. R. } FWHS \; \ldots \; (11)$$

$$\text{ell. R. } CFR = \text{ell. R. } BFR \; \ldots \; (12)$$

Aus (8) folgt aber auch

$$\text{ell. R. } AFNC = \text{ell. R. } AFSB \; \ldots \; (13)$$

Nehmen wir ferner ausserhalb der Ellipse $BCDE$ auf einer der Asymptoten, z. B. auf AFR, einen beliebigen Punkt P' und ziehen $P'K'$ parallel mit AB, $P'L'$ parallel mit AC, so folgt aus (13), dass auch

$$\text{Raum } CK'P'F = \text{Raum } BFP'L' \; \ldots \; (14)$$

ist. Da wir den Punkt P' an einem ganz beliebigen Ort, jedoch auf einer der beiden Asymptoten liegend, angenommen haben, so ergiebt sich aus No. (14) als Erweiterung des Satzes I. noch folgender:

II. Wo wir auf einer der Asymptoten einer Hyperbel einen Punkt annehmen und von demselben auf die verlängerten Achsen der zugehörigen Ellipse Perpendikel fällen, so ist der Raum, welcher zwischen einem solchen Perpendikel, dem ihm nicht parallelen Achsenstück, das zwischen dem Scheitel der Ellipse und dem Fusspunkt

Digitized by Google

jenes Perpendikels liegt, dem Asymptotenstück, das zwischen dem angenommenen Punkt und ihrem Durchschnitt mit der Ellipse befindlich ist, und endlich zwischen dem elliptischen Bogen, welcher zwischen diesem Durchschnitt und jenem Scheitel befindlich ist, gleich dem elliptischen Raum, der von den analogen Stücken auf der andern Seite der Asymptote begränzt ist.

Ziehen wir BC, so wird diese von AR in X halbirt, und wir haben $AX = RX = BX = CX$, und wenn wir XY parallel mit AC, OFI parallel mit BC ziehen, so ist auch $AY = BY$, $AT = IT$, $OF = IF = AF$. Also ist $\Delta\, AOF = \Delta\, AIF$, und $\Delta\, ACX = \Delta\, ABX$, mithin ist auch, wegen No. 13.,

$$\text{ell. R. } CNFO = \text{ell. R. } BSFI \ldots \quad (15)$$

und

$$\text{ell. R. } CNFX = \text{ell. R. } BSFX \ldots \quad (16)$$

Diese Vergleichungen, welche alle aus dem durch die Gleichung (5) dargestellten und in I. durch Worte ausgedrückten allgemeinen Satz abgeleitet sind, lassen sich noch auf vielfache Art vermehren. Wir wollen jedoch schliesslich, um nicht allzu weitläufig zu werden, einige Inhalte der bereits verglichenen elliptischen Räume bestimmen.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes F mit t', u', nämlich $AT = t'$, $TF = u'$, so finden wir leicht:

$$t' = \frac{a}{\sqrt{2}},\ u' = \frac{b}{\sqrt{2}},\ AF = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Da aber nach No. (1)

$$\text{ell. R. } ACFT = \frac{bt'}{2a}\sqrt{a^2-t'^2} + \frac{ab}{2}\text{ Arc sin }\frac{t'}{a},$$

so finden wir wegen No. (7):

$$\text{ell. R. } A\mathfrak{Z}FB = \text{ell. R. } ACFT = \frac{ab}{8}(\pi+2) \ldots \quad (17)$$

Aus No. (1), (6) und (8) folgt:

$$\text{ell. R. } KCNP = \text{ell. R. } LPSB$$
$$= \frac{bx}{2a}\{\sqrt{a^2-x^2} - 2x\} + \frac{ab}{2}\text{ Arc sin }\frac{x}{a} \ldots \quad (18)$$

Aus (17) und (8) ist aber

$$\text{ell. R. } \mathfrak{Z}CNF = \text{ell. R. } TFSB = \frac{ab}{8}(\pi-2) \ldots \quad (19)$$

Aus (1), (17) und (9) folgt:

$$\text{ell. R. } LNFT = \text{ell. R. } K\mathfrak{Z}FS$$
$$= \frac{ab}{8}(\pi+2) - \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{ab}{2}\text{ Arc sin }\frac{x}{a} \ldots \quad (20)$$

Digitized by Google

Aus (18), (19) und (10) folgt:

ell. R. $GNF =$ ell. R. hFS

$$= \frac{ab}{8}(\pi - 2) - \frac{bx}{2a}\{\sqrt{a^2 - x^2} - a\sqrt{2}\} - \frac{ab}{2} \text{ Arc sin } \frac{x}{a} \ldots. \quad (21)$$

und auch

ell. R. $ThSB =$ ell. R. $CNGF$

$$= \frac{bx}{2a}\{\sqrt{a^2 - x^2} - a\sqrt{2}\} + \frac{ab}{2} \text{ Arc sin } \frac{x}{a} \ldots. \quad (22)$$

Ferner finden wir noch:

$$\text{ell. R. } AFNC = \text{ell. R. } AFSB = \frac{ab\pi}{8} \ldots. \quad (23)$$

$$\text{ell. R. } CFR = \text{ell. R. } BFR = \frac{ab}{8}(4 - \pi) \ldots. \quad (24)$$

$$\text{ell. R. } CNFO = \text{ell. R. } BSFI = \frac{ab}{8}(4 - \pi) \ldots. \quad (25)$$

Aus (24) und (25) folgt auch, dass die elliptischen Räume ***CNFO***, ***BSFI***, ***CNFR***, ***BSFR*** einander gleich sind.

Ferner ist auch

$$\text{ell. R. } CFX = \text{ell. R. } BFX = \frac{ab}{8}(\pi - 2) \ldots. \quad (26)$$

Aus (19) und (26) geht auch hervor, dass die elliptischen Räume ***CNFX***, ***BSFX***, §***CNF***, ***BSFT*** ebenfalls einander gleich sind.

Setzen wir endlich $AL' = x''$, so ist $P'L' = \frac{bx''}{a}$, und wir finden leicht, dass

$$\text{ell. R. } CFP'K' = \text{ell. R. } BFP'L' = \frac{b}{8a}\{4x''^2 - a^2\pi\} \ldots. \quad (27)$$

Wir würden die nämlichen Resultate wie in (13) und (23) erhalten haben, wenn wir die Frage gestellt hätten:

Wo ist der Ort des Punktes P, dass, wenn NPL parallel AC gezogen und AP bis zum Durchschnitt mit der Ellipse verlängert wird, alsdann der Flächenraum $ACNP$ gleich dem elliptischen Sector $AFSB$ wird?

Denken wir uns, um die Figur nicht mit Linien zu überladen, es sei AFR nicht die Asymptote der Hyperbel $e'Bg'$, und setzen $AL = x$, $NL = y$, $AT = x'$, $FT = y'$, so ist

$$\text{ell. R. } ACNP = \text{ell. R. } ACNL - \Delta\, APL$$

und

$$\text{ell. Sect. } AFSB = \text{ell. R. } BSFT + \Delta\, AFT,$$

oder da $x : PL = x' : y'$ und $PL = \frac{xy'}{x'} = \frac{bx}{ax'}\sqrt{a^2 - x'^2}$ ist, so haben wir:

Digitized by Google

$$\text{ell. R. } ACNP = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2}\text{ Arc sin }\frac{x}{a} - \frac{bx^2}{2ax'}\sqrt{a^2 - x'^2},$$

$$\text{ell. Sect. } AFSB = \frac{ab}{2}\text{ Arc cos }\frac{x'}{a}.$$

Folglich haben wir die Bedingungsgleichung:

$$\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{bx^2}{2ax'}\sqrt{a^2-x'^2} + \frac{ab}{2}\left\{\text{Arc sin}\frac{x}{a} - \text{Arc cos}\frac{x'}{a}\right\} = 0 \ldots (28)$$

Es ist aber

$$\text{Arc cos }\frac{x'}{a} = \text{Arc sin }\frac{\sqrt{a^2 - x'^2}}{a},$$

mithin wird die Gleichung (28) zu

$$\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{bx^2}{2ax'}\sqrt{a^2-x'^2} + \frac{ab}{2}\left\{\text{Arc sin}\frac{x}{a} - \text{Arc sin}\frac{\sqrt{a^2-x'^2}}{a}\right\} = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung die transcendenten Grössen einander gleich, so muss auch

$$x = \sqrt{a^2 - x'^2}$$

sein, woraus wir

$$x' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

erhalten.

Setzen wir diesen Werth von x' in die letzte Gleichung, so finden wir, dass derselben nur in dem Fall genügt wird, wenn $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist; mithin muss der Punkt P auf F fallen, und es ergeben sich wieder die Gleichungen in No. (13) und (23).

IV.

Entwickelung der beiden im Literarischen Berichte. No. XVIII. S. 278. und S. 279. angeführten Lehrsätze des Herrn Clausen.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Man erkennt sehr leicht, dass diese beiden Theoreme zu der Gattung derjenigen gehören, welche man aus der Vergleichung zweier verschiedenen Entwickelungen von einer und derselben Function nach Potenzen ihrer Variabeln als Corollare erhält. So kann man z. B. die Function $(1+x)^{m+n}$ erstens nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln; dies giebt

$$1+(m+n)_1 x+(m+n)_2 x^2+\ldots.;$$

dann kann man sie aber auch in das Product $(1+x)^m(1+x)^n$ verwandeln und jeden Factor entwickeln; dies giebt

$$(1+m_1 x+m_2 x^2+\ldots.)(1+n_1 x+n_2 x^2+\ldots.)$$

oder

$$1+(m_1+n_1)x+(m_2+m_1 n_1+n_2)x^2+\ldots.$$

Diese Entwickelung ist der obigen gleich, und man wird also auf die Gleichheit der Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x schliessen können und als Corollar den bekannten Satz erhalten:

$$(m+n)_p = m_p+m_{p-1}n_1+m_{p-2}n_2+\ldots.+n_p.$$

Es kommt nun im Falle unserer beiden Lehrsätze nur darauf an, gerade diejenige Reihenentwickelung zu finden, aus welcher sie gefolgert werden können.

Der erste Lehrsatz ist folgender:

„Alle Combinationen von ganzen Zahlen, deren Summe n ist, „seien

Digitized by Google

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots.$$

$$\beta + \beta' + \beta'' + \dots.$$

$$\gamma + \gamma' + \gamma'' + \dots.$$

u. s. w.

„und die Anzahl der gleichen α, α', α'', ... seien λ, λ', λ'', ...; „der gleichen β, β', β'', ... seien μ, μ', μ'', ...; der gleichen γ, γ', „γ'', ... seien ν, ν', ν'', ...; so ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha \cdot \alpha' \cdot \alpha'' \dots.} \cdot \frac{1}{\lambda!\lambda'!\lambda''!\dots.} \\ &+ \frac{1}{\beta \cdot \beta' \cdot \beta'' \dots.} \cdot \frac{1}{\mu!\mu'!\mu''!\dots.} \qquad (A) \\ &+ \frac{1}{\gamma \cdot \gamma' \cdot \gamma'' \dots.} \cdot \frac{1}{\nu!\nu'!\nu''!\dots.} \\ &+ \text{u. s. w.} = 1. \end{aligned}$$

Zum Beispiel, wenn $n = 7$, so hat man unter andern die Combination $2 + 2 + 1 + 1 + 1$. Hier wäre etwa $\alpha = 2$, $\alpha' = 2$, $\alpha'' = 1$, $\alpha''' = 1$, $\alpha^{IV} = 1$. Unter diesen Zahlen kommt die 2 zweimal, die 1 dreimal vor; es wäre daher $\lambda = 2$, $\lambda' = 3$; und dieser Zerlegung entspräche daher in der zu beweisenden Gleichung das Glied

$$\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2!3!}.$$

Um nun die Richtigkeit derselben darzuthun, betrachte ich den Ausdruck (A) als Coefficienten von x^n oder $x^{\alpha+\alpha'+\alpha''+\dots}$ und habe daher für sein erstes Glied das Product

$$\frac{x^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha'}}{\alpha'} \cdot \frac{x^{\alpha''}}{\alpha''} \dots. \frac{1}{\lambda!\lambda'!\lambda''!\dots.}.$$

Ein solches Product kommt aber offenbar vor, wenn ich eine Reihe aus lauter Gliedern wie $\frac{x^\alpha}{\alpha}$, d. h. die Reihe

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots.$$

bilde, welche der Kürze wegen mit y bezeichnet sein mag, und wenn ich diese Reihe eben so oft setze als die Anzahl der Zahlen α, α', α'', ... anzeigt, und dann sämmtliche Reihen mit einander multiplicire. Ist nämlich p die Anzahl der in der Combination $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots.$ enthaltenen Glieder und wird die Potenz y^p, d. h. das Product

$$(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots.)$$
$$\times(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots.)$$
$$\times \text{ u. s. w.}$$
$$\times(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots.)$$

entwickelt, so hat man jedes Glied der ersten Reihe mit jedem Gliede der zweiten, dritten u. s. w. bis zur letzten zu multipliciren. In der ersten Reihe kommt aber das Glied $\frac{x^\alpha}{\alpha}$, in der zweiten das Glied $\frac{x^{\alpha'}}{\alpha'}$, in der dritten das Glied $\frac{x^{\alpha''}}{\alpha''}$ u. s. w. vor; es wird also im Product das Glied $\frac{x^\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha'}}{\alpha'}\cdot\frac{x^{\alpha''}}{\alpha''}\ldots.$ vorkommen. Inzwischen, da das Glied $\frac{x^\alpha}{\alpha}$ nicht allein in der ersten, sondern in allen übrigen Reihen vorkommt, und da dasselbe auch von den Gliedern $\frac{x^{\alpha'}}{\alpha'}$, $\frac{x^{\alpha''}}{\alpha''}$, ... gilt, so wird im Product auch z. B. das Glied

$$\frac{x^{\alpha'}}{\alpha'}\cdot\frac{x^\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha''}}{\alpha''}\ldots.$$

vorkommen, in welchem der erste Factor von der ersten Reihe, der zweite von der zweiten, u. s. w. herrührt. Das Glied $\frac{x^\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha'}}{\alpha'}\cdot\frac{x^{\alpha''}}{\alpha''}\ldots.$ wird also im Product so oft vorkommen, als man aus den Elementen α, α', α'' .... verschiedene Permutationen bilden kann. Die Anzahl dieser Elemente ist aber p; wären sie alle von einander verschieden, so wäre die Anzahl ihrer Permutationen gleich $p!$ Nun zerfallen sie aber der Voraussetzung zufolge in Gruppen, welche zu λ, zu λ', u. s. w. unter sich gleich sind. Daher beschränkt sich die Anzahl ihrer unter sich verschiedenen Permutationen bekanntlich auf

$$\frac{p!}{\lambda!\lambda'!\lambda''!\ldots.}.$$

In der Entwickelung von y^p erhält das Glied $\frac{x^\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha'}}{\alpha'}\cdot\frac{x^{\alpha''}}{\alpha''}\ldots.$ daher diese Zahl zum Coefficienten, oder y^p enthält das Glied

$$\frac{x^n}{\alpha\cdot\alpha'\cdot\alpha''\ldots.}\cdot\frac{p!}{\lambda!\lambda'!\lambda''!\ldots.};$$

folglich enthält die Entwickelung von $\frac{y^p}{p!}$ das Glied

$$\frac{x^n}{\alpha\cdot\alpha'\cdot\alpha''\ldots.}\cdot\frac{1}{\lambda!\lambda'!\lambda''!\ldots.}.$$

Dasselbe gilt natürlich von den Gliedern

$$\frac{x^n}{\beta\,.\,\beta'\,.\,\beta''\,\ldots\ldots}\cdot\frac{1}{\mu\,!\,\mu'\,!\,\mu''\,!\ldots\ldots}$$

in denen die Anzahl der Zahlen β, β', β'', ... ebenfalls gleich p ist; und somit wird es klar, dass der Coefficient von x^n in der Entwickelung von $\frac{y^p}{p!}$ aus denjenigen Gliedern des Ausdrucks (A) bestehen wird, welche solchen Combinationen

$$\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots.$$
$$\beta+\beta'+\beta''+\ldots.$$
u. s. w.

zur Summe n entsprechen, in denen die Anzahl der Elemente α, α', α'' (oder β, β', β'' ..... u. s. w.) gleich p ist.

Geben wir nun dem p sämmtliche Werthe von 1 bis zum Unendlichen, so wird in der Entwickelung der Summe

$$\frac{y}{1}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\ldots.\quad(B)$$

nach Potenzen von x der Coefficient von x^n aus sämmtlichen Gliedern des Ausdrucks (A) bestehen, weil die Combinationen

$$\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots.$$
$$\beta+\beta'+\beta''+\ldots.$$
u. s. w.,

denen sie entsprechen, entweder aus einem, oder aus zwei, oder aus mehreren Elementen bestehen müssen. Die Summe (B) ist also der fragliche Ausdruck, auf dessen Auffindung es ankam, und den man jetzt nur noch auf eine andere Art nach Potenzen von x zu entwickeln hat, um sofort den Werth des Ausdrucks (A) durch Vergleichung mit dem Coefficienten von x^n zu erhalten.

Eigentlich könnte man die Summe (B) bei dem Gliede $\frac{y^n}{n!}$ abbrechen, weil die höheren Glieder $\frac{y^{n+1}}{(n+1)!}$ u. s. w. ohnehin höhere Potenzen von x als die $n$te enthalten und daher auf den Coefficienten von x^n keinen Einfluss üben. Indessen können diese höheren Glieder aus demselben Grunde auch beibehalten werden, was um so zweckmässiger ist, da die Summe (B) nur dann leicht auf anderweitige Art nach Potenzen von x entwickelt werden kann, wenn sie bis ins Unendliche fortgesetzt wird. Man hat nämlich bekanntlich

$$\frac{y}{1}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\ldots.=e^y-1.$$

Nun ist aber

$$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = -ln(1-x),$$

folglich

$$e^y - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Der Coefficient von x^n, welcher dem Ausdrucke (A) gleich sein muss, ist in dieser Entwickelung aber gleich 1. Der Lehrsatz ist also erwiesen. Ein dazu gehöriges Beispiel ist schon an der oben angeführten Stelle gegeben worden, und ich will nur noch erwähnen, dass sich das Wilsonsche Theorem aus unserm Lehrsatze wiederum als Corollar ergiebt.

Ist nämlich n eine Primzahl, so kann der Ausdruck (A) nur zwei Glieder enthalten, welche den Factor n im Nenner haben: es sind diejenigen beiden, welche den Combinationen

$$n \text{ und } 1+1+1+1+\ldots (n\text{mal})$$

entsprechen. Denn entweder ist eine der Zahlen α, α'.... gleich n, und dies kann nur bei einer einzigen Combination der Fall sein, weil $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots$ genau gleich n sein muss; oder eine der Zahlen λ, λ', λ'', ... ist gleich n, und dies kann wieder nur bei einer einzigen Combination stattfinden, weil $\lambda + \lambda' + \lambda'' + \ldots$ mindestens gleich der Anzahl der Elemente α, α', α''.... sein muss, diese aber höchstens gleich n sein kann, in welchem Falle $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots = 1$ ist. Den beiden oben angegebenen Combinationen entsprechen im Ausdruck (A) die Glieder

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n!},$$

und sie sind daher gleich der Einheit weniger den übrigen Gliedern, folglich gleich einem Bruche, der keinen Factor n im Nenner hat. Aus der Summe $\frac{1}{n} + \frac{1}{n!}$ muss daher der Factor n im Nenner verschwinden, folglich auch aus dem Product derselben mit der ganzen Zahl $(n-1)!$, d. h. aus $\frac{(n-1)!+1}{n}$. Dieser Ausdruck hat aber keine anderen Factoren als n im Nenner, er muss also eine ganze Zahl sein; und hierin besteht eben das Wilsonsche Theorem.

Der zweite der angeführten Lehrsätze ist folgender:

„Die Summe der Reihe

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4} + \ldots$$

„bis ein Glied verschwindet, ist:

$$\frac{3}{n+3},\ \frac{2}{n+3},\ 0,\ -\frac{1}{n+3},\ 0,\ \frac{2}{n+3},$$

„jenachdem n beziehungsweise von der Form ist:

$$6v,\ 6v+1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Mit der Analyse des Beweises will ich mich der Kürze wegen nicht aufhalten.

Es ist

$$(C) \quad ln(1-x+x^2)-ln(1-x)=ln\frac{1-x+x^2}{1-x}=ln\frac{1+x^3}{1-x^3}.$$

Wird nun die linke Seite dadurch entwickelt, dass in die Formel

$$ln(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\ldots.$$

y der Reihe nach gleich $x-x^2$ und x gesetzt wird, so ergiebt sich

$$x-x(1-x)+\frac{x^2-x^2(1-x)^2}{2}+\frac{x^3-x^3(1-x)^3}{3}+\ldots.$$
$$+\frac{x^{n-1}-(1-x)^{n-1}}{n-1};$$

bei diesem Gliede kann man abbrechen, denn die folgenden würden doch keine $n$ten Potenzen von x mehr erhalten. Nun ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$1-(1-x)^{n-1}=(n-1)x-(n-1)_2x^2+\ldots.$$
$$1-(1-x)^{n-2}=(n-2)x-(n-2)_2x^2+\ldots.$$
u. s. w.
$$1-(1-x)^2=2x-2_2x^2$$
$$1-(1-x)\;=1.x.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach einander mit $\frac{x^{n-1}}{n-1}$, $\frac{x^{n-2}}{n-2}$, $\ldots.\frac{x^2}{2}$, $\frac{x}{1}$, und addirt dann alles, so hat man

$$\frac{x^{n-1}-x^{n-1}(1-x)^{n-1}}{n-1}+\frac{x^{n-2}-x^{n-2}(1-x)^{n-2}}{n-2}+\ldots.+\frac{x-x(1-x)}{1}=$$
$$x^n-\ldots.$$
$$+x^{n-1}-\frac{(n-2)_2}{n-2}x^n+\ldots.$$
$$+x^{n-2}-\frac{(n-3)_2}{n-3}x^{n-1}+\frac{(n-3)_3}{n-3}x^n-\ldots.$$
u. s. w. bis
$$+x^4-\ldots.$$
$$+x^3-\frac{2_2}{2}x^4$$
$$+x^2$$

Der Coefficient von x^n ist in dieser Entwickelung also

$$1-\frac{(n-2)_2}{n-2}+\frac{(n-3)_3}{n-3}-\frac{(n-4)_4}{n-4}+\ldots.$$

oder

$$1-\frac{n-3}{2}+\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}+\ldots.\quad (D)$$

bis ein Glied Null wird.

Wird nun auch die rechte Seite der Gleichung (C), nämlich $ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$ oder $ln(1+x^2)-ln(1-x^2)$ entwickelt, so entspringen aus $ln(1+x^2)$ lauter Glieder von der Form

$$(-1)^{\mu+1}\frac{x^{2\mu}}{\mu},$$

und aus $-ln(1-x^2)$ lauter Glieder von der Form

$$\frac{x^{2\nu}}{\nu}.$$

Die Potenz x^n kann daher nur dann vorkommen, wenn n entweder durch 3, oder durch 2, oder durch beide zugleich theilbar ist, also wenn n eine der Formen $6v$, $6v+2$, 3, 4 hat. Der Ausdruck (D) verschwindet also, wenn n eine der beiden Formen $6v+1$, 5 hat.

Suchen wir nun den Coefficienten von x^n für die ersteren Fälle. Wenn n nur durch 2 theilbar ist und also eine der Formen $6v+2$, 4 hat, so kommt x^n nur unter den Gliedern $\frac{x^{2\nu}}{\nu}$ vor und sein Coefficient ist $\frac{1}{\nu}$ oder $\frac{2}{n}$, da jetzt $n=2\nu$ ist.

Wenn n nur durch 3 theilbar ist und also die Form $6v+3$ hat, so kommt x^n nur unter den Gliedern $(-1)^{\mu+1}\frac{x^{3\mu}}{\mu}$ vor und sein Coefficient ist $(-1)^{\mu+1}\frac{1}{\mu}$ oder $\frac{3}{n}$, da jetzt $n=3\mu$ und μ ungerade, mithin $\mu+1$ gerade ist.

Wenn schliesslich n sowohl durch 2, als durch 3 theilbar ist, und also die Form $6v$ hat, so kommt x^n sowohl unter den Gliedenn $(-1)^{\mu+1}\frac{x^{3\mu}}{\mu}$, als auch unter den Gliedern $\frac{x^{2\nu}}{\nu}$ vor. Dort hat es den Coefficienten $(-1)^{\mu+1}\frac{1}{\mu}$ oder $-\frac{3}{n}$, da jetzt $n=3\mu$ und μ gerade, mithin $\mu+1$ ungerade ist; hier hat es den Coefficienten $\frac{1}{\nu}$ oder $\frac{2}{n}$, da n auch $=2\nu$ ist. Die Summe dieser beiden Coefficienten ist aber gleich $-\frac{1}{n}$.

Fassen wir alles Vorstehende zusammen, so ergieht sich, dass der Ausdruck (D) oder

$$1-\frac{n-3}{2}+\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}+\ldots.$$

bis ein Glied Null wird, gleich

$$-\frac{1}{n},\ 0,\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \frac{2}{n},\ 0$$

ist, jenachdem n eine der Formen $6v$, $6v+1, 2, 3, 4, 5$ hat Wird hier $n+3$ anstatt n gesetzt, so ist die Summe der Reihe

$$1-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}+\ldots.$$

gleich

$$-\frac{1}{n+3},\ 0,\ \frac{2}{n+3},\ \frac{3}{n+3},\ \frac{2}{n+3},\ 0$$

jenachdem $n+3$ die Formen $6v$, $6v+1, 2, 3, 4, 5$, d. h. jenachdem n die Formen $6v+3, 4, 5, 0, 1, 2$ hat; oder jene Summe ist gleich

$$\frac{3}{n+3},\ \frac{2}{n+3},\ 0,\ -\frac{1}{n+3},\ 0,\ \frac{2}{n+3},$$

jenachdem n die Formen $6v+0, 1, 2, 3, 4, 5$ hat, welches der zu beweisende Lehrsatz ist.

Man kann aber auch diese lästige Unterscheidung der Formen von n vermeiden und einen generellen Summenausdruck für (D) finden, wenn man die rechte Seite der Gleichung (C) mit Hülfe des Imaginären auf eine andere Art entwickelt. Sind nämlich α und β die beiden primitiven Cubikwurzeln der Einheit, so ist $\alpha=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi$, $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$, und man hat

$$ln\Big(\frac{1+x^3}{1-x^2}\Big)=ln\Big(\frac{1-x+x^2}{1-x}\Big)=ln\frac{(1+\alpha x)(1+\beta x)}{1-x}$$
$$=ln(1+\alpha x)+ln(1+\beta x)-ln(1-x).$$

In den Entwickelungen dieser drei Glieder kommt die Potenz x^n beziehlich mit den Coefficienten

$$(-1)^{n+1}\frac{\alpha^n}{n},\ (-1)^{n+1}\frac{\beta^n}{n},\ \frac{1}{n}$$

vor, folglich ist der Ausdruck (D) gleich

$$\frac{(-1)^{n+1}(\alpha^n+\beta^n)+1}{n}.$$

Es ist aber

$$\alpha^n=(\cos\tfrac{2}{3}\pi+i\sin\tfrac{2}{3}\pi)^n=\cos\frac{2n}{3}\pi+i\sin\frac{2n}{3}\pi,$$

$$\beta^n=(\cos\tfrac{2}{3}\pi-i\sin\tfrac{2}{3}\pi)^n=\cos\frac{2n}{3}\pi-i\sin\frac{2n}{3}\pi,$$

$$\alpha^n+\beta^n=2\cos\frac{2n}{3}\pi;$$

daher hat man (D) gleich

$$\frac{(-1)^{n+1}\,2\cos\frac{2n}{3}\pi+1}{n}.$$

Wird hier wieder $n+3$ statt n gesetzt, so ist die Summe

$$1-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}+\ldots.$$
$$=\frac{1+(-1)^n\,2\cos\frac{2n}{3}\pi}{n+3};$$

woraus wieder die obigen sechs verschiedenen Werthe hervorgehen, wenn man die Formen der Zahl n in Bezug auf den Modulus 6 unterscheiden will.

Zur Uebung für Lernende füge ich noch einige ähnliche Sätze hinzu:

1) $$1-n_1+(n-1)_2-(n-2)_3+\ldots=(-1)^n\frac{\sin\frac{2n+1}{3}\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi}$$

2) $$(n+1)_1-2.n_2+3.(n-1)_3-4.(n-2)_4+\ldots.$$
$$=(-1)^n 2.\frac{n+1}{3}.\cos\frac{2n+1}{3}\pi+(-1)^{n+1}\tfrac{2}{3}.\frac{\sin\frac{2n-1}{3}\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi}$$

3) $$\frac{m.m+1\ldots.m+n-1}{1.2\ldots.n}-m_1.\frac{m.m+1\ldots.m+n-3}{1.2\ldots.n-2}$$
$$+m_2.\frac{m.m+1\ldots.m+n-5}{1.2\ldots.n-4}-\ldots.=m_n.$$

4) Auch der im 4ten Bande No. XVII. zum Beweise vorgelegte Satz gehört hierher:

$$m_n=m_n.m_n-2.m_{n-1}.m_{n+1}+2.m_{n-2}.m_{n+2}-\ldots.$$
$$+(-1)^n 2.m_0.m_{2n};$$

und man wird sich leicht überzeugen, dass m weder reell noch imaginär, geschweige denn eine positive ganze Zahl zu sein braucht, wie dort angegeben ist.

V.

Ueber die Rechnungsspielerei im V. Theile S. 223. dieses Archivs.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

1.

Die zu lösende Aufgabe ist folgende:
„Man soll die Zahlen von 1 bis 9 dergestalt in das Schema

$$\begin{matrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & i \end{matrix}$$

„schreiben, dass die Summen der drei Horizontalreihen, der drei „Verticalreihen und der ersten Diagonalreihe (a, e, i) gleiche „Werthe ergehen."

Bezeichnet man die drei Horizontalreihen der Kürze wegen beziehlich mit h_1, h_2, h_3; eben so die Verticalreihen mit v_1, v_2, v_3; die erste Diagonale mit d_1, so hat man die Gleichungen

$$1)\quad h_1 = h_2 = h_3 = v_1 = v_2 = v_3 = d_1.$$

Nun ist aber die Summe aller 9 Zahlen gleich 45; folglich

$$h_1 + h_2 + h_3 = 45,$$
$$v_1 + v_2 + v_3 = 45;$$

woraus sich in Verbindung mit 1) die Gleichungen

$$2)\quad \begin{matrix} h_1 = 15, & v_1 = 15, & d_1 = 15 \\ h_2 = 15, & v_2 = 15, & \\ h_3 = 15, & v_3 = 15, & \end{matrix}$$

ergeben, von denen eine, z. B. $v_3 = 15$, weggelassen werden kann, weil sie sich durch die übrigen von selbst erfüllt. Es bleiben demnach sechs Gleichungen zur Bestimmung der neun Unbekannten, und das gewöhnliche Verfahren würde nun weiter darin bestehen, dass man dreien von ihnen versuchsweise beliebige Werthe aus der Zahlenreihe 1....9 beilegte, bis man zu sämmtlichen Com-

binationen gelangt wäre, welche für die übrigen 6 Unbekannten geeignete Werthe lieferten; nämlich solche Werthe, die nebst den 3 willkührlich angenommenen die Zahlenreihe 1....9 erschöpften. In dieser Beziehung wäre unsere Aufgabe also nicht des Erwähnens werth. Vielleicht ist aber die folgende Behandlung im Stande, ihr dadurch einiges Interesse zu verleihen, dass sie die Versuche regelt und mindert.

Die Wirksamkeit der Auflösung, welche ich zu geben im Begriff bin, erstreckt sich viel weiter als auf die vorliegende Aufgabe. Um gleich ihre ganze Bedeutung erkennen zu lassen, stelle ich daher die folgende Aufgabe, welche jene als besondern Fall in sich schliesst.

2.

„Man soll neun beliebig gegebene Zahlen dergestalt in das „Schema

$$\begin{matrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & i \end{matrix}$$

„einschreiben, dass die Summen $h_1 + v_1$, $h_2 + v_2$, $h_3 + v_3$, „$d_1 + d_1$ gleiche Werthe haben."

Die Bedeutung der Buchstaben h_1 bis d_1 ist dieselbe wie oben.

Bezeichnet man die Summe aller neun Zahlen mit s, so hat man

$$h_1 + h_2 + h_3 = s$$
$$v_1 + v_2 + v_3 = s$$

folglich

$$(h_1 + v_1) + (h_2 + v_2) + (h_3 + v_3) = 2s$$

und, wegen $h_1 + v_1 = h_2 + v_2 = h_3 + v_3$:

$$h_1 + v_1 = \tfrac{2}{3}s.$$

Die Bedingungen der Aufgabe sind also ausgedrückt durch die Gleichungen:

3) $h_1 + v_1 = \frac{2}{3}s$, 6) $d_1 + d_1 = \frac{2}{3}s$

4) $h_2 + v_2 = \frac{2}{3}s$

5) $h_3 + v_3 = \frac{2}{3}s$

Substituirt man hier für h_1 bis d_1 ihre Werthe in a bis i, so erhält man

7) $2a + b + c + d + g = \frac{2}{3}s$, 10) $2a + 2e + 2i = \frac{2}{3}s$

8) $2e + b + f + d + h = \frac{2}{3}s$

9) $2i + c + f + g + h = \frac{2}{3}s$

Addirt man nun 7) und 8) und zieht davon 9) und 10) ab, so ergiebt sich

$$11)\quad b+d=2i;$$

addirt man 7) und 9) und zieht davon 8) und 10) ab, so hat man

$$12)\quad c+g=2e;$$

addirt man 8) und 9) und zieht davon 7) und 10) ab, so wird

$$13)\quad f+h=2a;$$

oder mit andern Worten:
„die Gruppen b, i, d; g, e, c; f, a, h bilden drei arithmetische „Proportionen".

Umgekehrt: wenn dies der Fall ist, so sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, d. h. wenn die Gleichungen 11), 12), 13) stattfinden, so ergeben sich daraus die Gleichungen 7) bis 10). Denn addirt man 11), 12), 13) und fügt auf beiden Seiten $a+e+i$ hinzu, so hat man

$$s=3(a+e+i)$$

oder die Gleichung 10). Addirt man 11) und 12) und fügt auf beiden Seiten $2a$ hinzu, so hat man

$$2a+b+c+d+g=2(a+e+i)$$
$$=\tfrac{2}{3}s$$

oder die Gleichung 7) u. s. f.

Desshalb ist die Aufgabe folgendermaassen vollständig gelöst: „Man bilde aus den gegebenen Zahlen auf alle möglichen „Arten drei Gruppen, deren jede eine arithmetische Proportion „sei; und setze jede dieser Ternionen von Gruppen auf alle mög„lichen Arten der Ternion b, i, d; g, e, c; f, a, h gleich."

3.

Wendet man dies z. B. auf die Zahlenreihe 1 bis 9 an, so übersieht man auf einen Blick, dass sich aus ihr auf die vorgeschriebene Art nur folgende Gruppen bilden lassen:

α) 1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9
β) 1, 2, 3; 4, 6, 8; 5, 7, 9
γ) 1, 3, 5; 2, 4, 6; 7, 8, 9
δ) 1, 4, 7; 2, 5, 8; 3, 6, 9.

Man würde also unter andern (aus 8.) folgende Auflösungen erhalten:

b, i, d; g, e, c; f, a, h
2, 4, 6; 1, 3, 5; 7, 8, 9;

aber auch

$b, i, d; g, e, c; f, a, h$
2, 4, 6; 1, 3, 5; 9, 8, 7;

woraus die beiden Quadrate entstehen:

8, 2, 5		8, 2, 5
6, 3, 7	und	6, 3, 9
1, 9, 4		1, 7, 4.

4.

Wenn man in der Aufgabe (2) noch die Bedingung hinzufügt, dass $h_1 = v_1$, $h_2 = v_2$, $h_3 = v_3$ sein soll, so dass also sämmtliche Buchstaben h_1 bis d_1 gleiche Werthe erhalten, so treten zu den Gleichungen 11), 12), 13) nur noch die Gleichungen $h_1 = v_2$, $h_3 = v_3$; denn aus diesen folgen sehr leicht die obigen: $h_1 = v_1$, $h_2 = v_2$, $h_3 = v_3$. Es muss also sein:

$$a + b + c = b + e + h, \quad a + b + c = c + f + i$$

oder

$$c - e = h - a, \quad a - f = i - b.$$

Mithin erleidet die Auflösung unter (2) die Beschränkung, dass „die Gruppen b, i, d; g, e, c; f, a, h nicht nur arithmetische „Proportionen mit einer und derselben Differenz, sondern „auch zugleich fallende oder steigende sein müssen".

5.

Wendet man dies auf die Zahlenreihe 1 bis 9 an, so erhält man die Auflösung jener sogenannten Rechnungsspielerei. Es erhellt nämlich, dass von den unter (3) aufgeführten Gruppen die β) und γ) ausser Betrachtung fallen; und von den beiden andern giebt α) z. B. folgende Auflösung:

$b, i, d; g, e, c; f, a, h$
1, 2, 3; 7, 8, 9; 4, 5, 6;

aber auch

$b, i, d; g, e, c; f, a, h$
3, 2, 1; 9, 8, 7; 6, 5, 4;

woraus die beiden Quadrate entstehen:

5, 1, 9		5, 3, 7
3, 8, 4	und	1, 8, 6
7, 6, 2		9, 4, 2;

in denen sämmtliche Reihen mit Ausnahme der (hier so genannten) zweiten Diagonalreihe gleiche Summen, nämlich $\frac{1}{2}s$ oder 15, geben. Dass von den so zu erzielenden Auflösungen manche, wie z. B. die eben angeführten, als identisch zu betrachten sind, ist ein Anderes und überdiess augenfällig genug.

VI.

Ueber einen Satz von der Convergenz der Reihen.

Aus einer Abhandlung des Herrn Professor C. J. Malmsten zu Upsala in den Nov. Act. Reg. Soc. scientiarum Upsaliensis. Vol. XII. Upsaliae. MDCCCXLIV. p. 255. mitgetheilt

von

dem Herausgeber.

In einer „Note sur la convergence des séries" überschriebenen sehr lesenswerthen Abhandlung, welche in dem so eben erschienenen neuesten Bande der Schriften der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Upsala a. a. O. abgedruckt ist, hat Herr Professor C. J. Malmsten zu Upsala den folgenden bemerkenswerthen Satz von der Convergenz der Reihen bewiesen:

Soit $f(x)$ une fonction de x, qui, en conservant le même signe pour toutes valeurs très-considérables de x, va toujours en diminuant et s'évanouit pour $x=\infty$; si

$$\lim. \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$$

les séries

$$\text{Cos}\,\alpha\,.f(1)+\text{Cos}\,2\alpha\,.f(2)+\text{Cos}\,3\alpha\,.f(3)+....+\text{Cos}\,n\alpha\,.f(n)+\text{etc.}$$

$$\text{Sin}\,\alpha\,.f(1)+\text{Sin}\,2\alpha\,.f(2)+\text{Sin}\,3\alpha\,.f(3)+....+\text{Sin}\,n\alpha\,.f(n)+\text{etc.}$$

sont toujours convergentes pour toutes les valeurs de α, qui ne sont pas infiniment près de 0, 2π, 4π, etc.

Nachdem Herr Professor Malmsten diesen Satz mit Hülfe der Integralrechnung gerechtfertigt hat, sagt er am Schlusse seiner Ab-

handlung: A présent nous allons donner pour ce théorème important une démonstration aussi simple qu'élémentaire, qui pour cela même nous semble mériter une place dans les Traités élémentaires des séries. Diesen elementaren Beweis werde ich im Folgenden den Lesern des Archivs mit des Herrn Verfassers eigenen Worten mittheilen.

Désignons par S_k et S'_k les sommes respectives des k premiers termes des séries

$$\mathrm{Cos}\,\alpha . f(1) + \mathrm{Cos}\,2\alpha . f(2) + \mathrm{Cos}\,3\alpha . f(3) + \ldots + \mathrm{Cos}\,n\alpha . f(n) + \text{etc.}$$
$$\mathrm{Sin}\,\alpha . f(1) + \mathrm{Sin}\,2\alpha . f(2) + \mathrm{Sin}\,3\alpha . f(3) + \ldots + \mathrm{Sin}\,n\alpha . f(n) + \text{etc.}$$

i s'ensuit que

$$\left.\begin{array}{l} S_{n+k} - S_k = \sum\limits_{i=1}^{i=n} \mathrm{Cos}\,(k+i)\alpha . f(k+i) \\ S'_{n+k} - S'_k = \sum\limits_{i=1}^{i=n} \mathrm{Sin}\,(k+i)\alpha . f(k+i) \end{array}\right\} \ldots . \quad (1)$$

Les séries, dont il s'agit, sont donc convergentes si pour les valeurs infiniment grandes de k

$$S_{n+k} - S_k \text{ et } S'_{n+k} - S'_k$$

s'approchent infiniment de zéro, quelque grand soit le nombre entier n, c'est à dire, si

$$\lim\,\{S_{n+k} - S_k\} = 0,$$
$$\lim\,\{S'_{n+k} - S'_k\} = 0.$$

A cause des formules connues

$$\mathrm{Cos}\ a = \frac{\mathrm{Sin}\,(a+b) - \mathrm{Sin}\,(a-b)}{2\mathrm{Sin}\ b},$$
$$\mathrm{Sin}\ a = -\frac{\mathrm{Cos}\,(a+b) - \mathrm{Cos}(a-b)}{2\mathrm{Sin}\ b},$$

on poura mettre les formules (1) sous cette forme

$$S_{n+k} - S_k = \frac{1}{2\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}} . \sum_{i=1}^{i=n} f(k+i)\,\{\mathrm{Sin}\,(k+i+\tfrac{1}{2})\alpha - \mathrm{Sin}\,(k+i-\tfrac{1}{2})\alpha\},$$

$$S'_{n+k} - S'_k = -\frac{1}{2\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}} . \sum_{i=1}^{i=n} f(k+i)\,\{\mathrm{Cos}(k+i+\tfrac{1}{2})\alpha - \mathrm{Cos}(k+i-\tfrac{1}{2})\alpha\},$$

d'où, en se rappelant que

$$\mathrm{Sin}\,(k+i+\tfrac{1}{2})\alpha = \mathrm{Sin}\,(k+i+1)\alpha . \mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2} - \mathrm{Cos}(k+i+1)\alpha . \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2},$$

$$\mathrm{Cos}(k+i+\tfrac{1}{2})\alpha = \mathrm{Cos}(k+i+1)\alpha . \mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2} + \mathrm{Sin}(k+i+1)\alpha . \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2},$$

on trouvera par une séparation nouvelle

$$S_{n+k}-S_k=\tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\sum_{i=1}^{i=n}f(k+i)\,\{\text{Sin}\,(k+i+1)\alpha-\text{Sin}\,(k+i)\alpha)$$

$$.-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}f(k+i)\,\{\text{Cos}\,(k+i+1)\alpha-\text{Cos}\,(k+i)\alpha\},$$

$$S'_{n+k}-S'_k=-\tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\sum_{i=1}^{i=n}f(k+i)\{\text{Cos}(k+i+1)\alpha-\text{Cos}(k+i)\alpha\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}f(k+i)\,\{\text{Sin}\,(k+i+1)\alpha-\text{Sin}\,(k+i)\alpha\},$$

c'est à dire

$$\left.\begin{aligned} S_{n+k}-S_k&=\tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\,\Delta-\tfrac{1}{2}\Delta' \\ S'_{n+k}-S'_k&=-\tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\,\Delta'-\tfrac{1}{2}\Delta \end{aligned}\right\}\ldots\ldots (2)$$

en supposant pour abréger les expressions

$$\Delta=\sum_{i=1}^{i=n}f(k+i)\,\{\text{Sin}\,(k+i+1)\alpha-\text{Sin}\,(k+i)\alpha\},$$

$$\Delta'=\sum_{i=1}^{i=n}f(k+i)\,\{\text{Cos}\,(k+i+1)\alpha-\text{Cos}\,(k+i)\alpha\}.$$

Mais les quantités Δ et Δ' peuvent aussi être mises sous cette forme

$$\Delta=\sum_{i=1}^{i=n}\{\frac{f(k+i)}{f(k+i+1)}\text{Sin}(k+i+1)\alpha\,.f(k+i+1)-\text{Sin}(k+i)\alpha\,.f(k+i)\},$$

$$\Delta'=\sum_{i=1}^{i=n}\{\frac{f(k+i)}{f(k+i+1)}\text{Cos}(k+i+1)\alpha\,.f(k+i+1)-\text{Cos}(k+i)\alpha\,.f(k+i)\},$$

d'où, étant $k=\infty$ et dans ce cas

$$\frac{f(k+i)}{f(k+i+1)}=1,$$

on aura immédiatement

$$\Delta=\sum_{i=1}^{i=n}\{\text{Sin}\,(k+i+1)\alpha\,.f(k+i+1)-\text{Sin}\,(k+i)\alpha\,.f(k+i)\}$$

$$\Delta'=\sum_{i=1}^{i=n}\{\text{Cos}(k+i+1)\alpha\,.f(k+i+1)-\text{Cos}(k+i)\alpha\,.f(k+i)\},$$

'est à dire

$$\Delta=\text{Sin}\,(k+n+1)\alpha\,.f(k+n+1)-\text{Sin}\,(k+1)\alpha\,.f(k+1),$$
$$\Delta'=\text{Cos}\,(k+n+1)\alpha\,.f(k+n+1)-\text{Cos}\,(k+1)\alpha\,.f(k+1).$$

Cela étant, si $f(x)$ s'évanouit pour les valeurs infiniment grandes de x, il s'ensuit évidemment, que

$$\Delta = 0 \text{ et } \Delta' = 0,$$

et partant, en vertu des formules (2),

$$S_{n+k} - S_k = 0,$$
$$S'_{n+k} - S'_k = 0$$

pour toutes les valeurs de a, qui ne s'approchent infiniment de 0, 2π, 4π etc.

C. Q. F. D.

VII.

Note sur l'Intégrale finie $\Sigma e^x y$.

Par

Monsieur C. J. Malmstén,

Professeur des Mathématiques à l'Université d'Upsala.

(Aus den Novis Actis Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Vol. XII. Upsaliae. 1844. mitgetheilt vom Herausgeber.)

Etant y une fonction entière de x, on sait bien, que l'intégrale finie

$$\Sigma e^x y$$

peut toujours se trouver sous la forme finie par la formule connue

$$(e^h - 1)\Sigma e^x y = e^x y + A h e^x . \frac{dy}{dx} + B h^2 e^x . \frac{d^2 y}{dx^2} + C h^3 e^x . \frac{d^3 y}{dx^3} + \text{etc.} \; \ldots . \quad (1)$$

où les coëfficiens sont déterminés par les équations *)

*) Voyez Lacroix Traité des Différ. et des Séries. Paris. 1800. pag. 109.

$$A(e^h-1)+e^h=0$$

$$B(e^h-1)+\frac{1}{1}.Ae^h+\frac{e^h}{1.2}=0$$

$$C(e^h-1)+\frac{1}{1}Be^h+\frac{1}{1.2}Ae^h+\frac{e^h}{1.2.3}=0$$

$$D(e^h-1)+\frac{1}{1}Ce^h+\frac{1}{1.2}Be^h+\frac{1}{1.2.3}Ae^h+\frac{e^h}{1.2.3.4}=0$$

etc.

Le tout consiste à trouver une expression générale pour calculer l'un quelconque de ces coëfficiens indépendamment des autres. En effet une telle expression est deja trouvée par Eytelwein *); mais, que je sache, personne n'a observé la relation intime de ces coëfficiens aux dérivées successives de la fonction

$$\frac{1}{e^h-1}.$$

C'est cette relation que je vais faire connaître dans la note présente, et qui, je crois, doit être d'autant plus importante, qu'elle nous fournit un moyen aisé de démontrer rigoureusement la formule symbolique

$$\Sigma e^x y=\frac{1}{e^{\frac{dy}{dx}h}-1},$$

y étant une fonction entière de x.

Soit y une fonction entière de x de $m$ième dégré, et substituons dans (1)

$$(e^h-1)A_1,\ (e^h-1)A_2,\ (e^h-1)A_3,\ (e^h-1)A_4,\ \text{etc.}$$

au lieu de

$$A,\ B,\ C,\ D,\ \text{etc.};$$

la formule (1) pourra être présentée sous cette forme

$$\Sigma e^x y=\underset{i=0}{\overset{i=m}{S}}A_i h^i e^x y^{(i)},\ \dots\ (2)$$

où

$$A_0=\frac{1}{e^h-1}\dots\ (3)$$

---

*) Grundlehren der höhern Analysis von J. A. Eytelwein. II. Bd. §. 578.

Mais par la formule connue

$$\Sigma e^x y = \frac{e^x y - e^h \Sigma e^x \Delta y}{e^h - 1},$$

on aura

$$e^x y = (e^h - 1)\Sigma e^x y + e^h \Sigma e^x \Delta y,$$

d'où, en substituant pour Δy

$$\Delta y = \overset{k=m}{\underset{k=1}{S}} \cdot \frac{h^k y^{(k)}}{1.2\ldots.k},$$

on conclura

$$e^x y = (e^h - 1)\Sigma e^x y + e^h \overset{k=m}{\underset{k=1}{S}} \frac{h^k}{1.2\ldots.k} \Sigma e^x y^{(k)},$$

et, en posant $y^{(i)}$ au lieu de y,

$$e^x y^{(i)} = (e^h - 1)\Sigma e^x y^{(i)} + e^h \overset{k=m}{\underset{k=1}{S}} \frac{h^k}{1.2\ldots.k} \Sigma e^x y^{(i+k)}.$$

Substituons à présent cette valeur de $e^x y^{(i)}$ dans (2); en se rappelant que

$$y^{(i+k)} = 0 \text{ pour } i + k > m$$

on aura

$$\Sigma e^x y = \overset{i=m}{\underset{i=0}{S}} A_i (e^h - 1) h^i \Sigma e^x y^{(i)} + e^h \overset{i=m-k}{\underset{i=0}{S}} \cdot \overset{k=m}{\underset{k=1}{S}} A_i \cdot \frac{h^{k+i}}{1.2\ldots.k} \Sigma e^x y^{(i+k)},$$

ou, si l'on pose dans la dernière somme i au lieu de $i + k$,

$$\Sigma e^x y = \overset{i=m}{\underset{i=0}{S}} A_i (e^h - 1) h^i \Sigma e^x y^{(i)} + e^h \overset{i=m}{\underset{i=k}{S}} h^i \Sigma e^x y^{(i)} \cdot \overset{k=m}{\underset{k=1}{S}} \frac{A_{i-k}}{\Gamma(k+1)}.$$

On en conclura très facilement, pour la détermination des coëfficiens A:

$$1 = A_0(e^h - 1)$$

$$0 = A_1(e^h - 1) + \frac{e^h A_0}{\Gamma(2)}$$

$$0 = A_2(e^h - 1) + \frac{e^h A_1}{\Gamma(2)} + \frac{e^h A_0}{\Gamma(3)}$$

et généralement

$$0 = A_m(e^h - 1) + e^h \overset{k=m}{\underset{k=1}{S}} \frac{A_{m-k}}{\Gamma(k+1)}$$

ou

$$A_m = e^h \overset{k=m}{\underset{k=0}{S}} \frac{A_{m-k}}{\Gamma(k+1)}$$

Digitized by Google

ou enfin

$$A_m = e^h \overset{k=m}{\underset{k=0}{S}} \frac{A_k}{\Gamma(m+1-k)} \dots \quad (4)$$

En mettant $m-1$ à la place de m, on aura

$$A_{m-1} = e^h \cdot \overset{k=m-1}{\underset{k=0}{S}} \frac{A_k}{\Gamma(m-k)},$$

d'où, en différentiant par rapport à h,

$$\frac{dA_{m-1}}{dh} = \frac{e^h A_0}{\Gamma(m)} + e^h \overset{k=m}{\underset{k=1}{S}} \frac{\left\{(m-k)A_k + \frac{dA_{k-1}}{dh}\right\}}{\Gamma(m+1-k)} \dots \quad (5)$$

Multiplions à présent la formule (4) par m, et en retranchons (5); nous aurons l'équation

$$mA_m - \frac{dA_{m-1}}{dh} = e^h \overset{k=m}{\underset{k=1}{S}} \frac{\left\{kA_k - \frac{dA_{k-1}}{dh}\right\}}{\Gamma(m+1-k)},$$

qui, pour être satisfaite, exige évidemment que

$$iA_i = \frac{dA_{i-1}}{dh},$$

i étant un nombre entier. En posant ici successive $i-1$, $i-2$, $i-3$, etc. au lieu de i, il en résultera

$$A_i = \frac{1}{\Gamma(i+1)} \cdot \frac{d^i A_0}{dh^i},$$

c'est à dire, en vertu de (3),

$$A_i = \frac{1}{\Gamma(i+1)} \cdot \frac{d^i \left\{\frac{1}{e^h-1}\right\}}{dh} \dots \quad (6)$$

Voilà l'équation très simple, qui fait dependre la détermination des coëfficiens A de l'expression générale des dérivées de la fonction

$$\frac{1}{e^h-1}.$$

Quant à la valeur de

$$\frac{d^i \left\{\frac{1}{e^h-1}\right\}}{dh^i},$$

Digitized by Google

elle pourra se trouver immédiatement par une formule que nous avons autrefois demontrée *), savoir

$$Z_r = (-1)^{\frac{r}{2}} \cdot \overset{k=r+1}{\underset{k=1}{S}} (-1)^{k-1} \overset{(r,k)}{\mathfrak{a}} \, Z_0{}^k$$

étant

$$Z_0 = \frac{1}{1 + ye^{-a\sqrt{-1}}},$$

$$Z_r = \frac{d^r \left\{ \frac{1}{1 + ye^{-a\sqrt{-1}}} \right\}}{da^r}$$

$$\overset{(r,k)}{\mathfrak{a}} = k^r - \frac{k-1}{1} \cdot (k-1)^r + \frac{k-1}{1} \cdot \frac{k-2}{2} (k-2)^r - \frac{k-1}{1} \cdot \frac{k-2}{2} \cdot \frac{k-3}{3} (k-3)^r + \text{etc.}$$

En faisant ici

$$a = h\sqrt{-1}, \quad y = -1, \quad r = i,$$

nous aurons

$$\frac{d^i \left\{ \frac{1}{e^h - 1} \right\}}{dh^i} = (-1)^i \overset{k=i+1}{\underset{k=1}{S}} \frac{\overset{(i,k)}{\mathfrak{a}}}{(e^h - 1)^k},$$

$$\overset{(i,k)}{\mathfrak{a}} = k^i - \frac{k-1}{1} \cdot (k-1)^i + \frac{k-1}{1} \cdot \frac{k-2}{2} (k-2)^i - \frac{k-1}{1} \cdot \frac{k-2}{2} \cdot \frac{k-3}{3} (k-3)^i + \text{etc.}$$

---

*) Theoremata Nova de Integr. Defin. etc. Upsaliae. 1842. Cfr. Archiv der Mathematik und Physik von Grunert. III. Th. p. 44.

VIII.

Ueber das reguläre Siebzehneck.

Nach einem Aufsatze des Herrn B. Amiot, Professeur au Collège Saint-Louis, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Terquem et Gerono. T. III. Paris. 1844. p. 271. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Wenn auch die folgende, auf die Auflösung von fünf quadratischen Gleichungen gebrachte Berechnung des regulären Siebzehnecks im Kreise nicht eben viel Neues enthält, so scheint dieselbe doch deshalb zu verdienen, allgemein bekannt und bei'm Unterrichte benutzt zu werden, weil sie bloss die elementarsten Sätze der ebenen Geometrie in Anspruch nimmt.

Wenn in Taf. I. Fig. 3. der um den Mittelpunkt O mit einem der Einheit gleichen Halbmesser beschriebene Kreis von dem Punkte A aus in siebzehn gleiche Theile eingetheilt ist, und die Bogen

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE$$

respective

$$\frac{1}{17},\ \frac{2}{17},\ \frac{4}{17},\ \frac{8}{17}$$

der ganzen Peripherie betragen; so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze, wie auf der Stelle erhellen wird:

$$1=\tfrac{1}{4}AC^2+(1-\sqrt{AB^2-\tfrac{1}{4}AC^2})^2,$$

$$1=\tfrac{1}{4}AD^2+(1-\sqrt{AC^2-\tfrac{1}{4}AD^2})^2,$$

$$1=\tfrac{1}{4}AE^2+(1-\sqrt{AD^2-\tfrac{1}{4}AE^2})^2,$$

$$1=\tfrac{1}{4}AB^2+(1-\sqrt{AE^2-\tfrac{1}{4}AB^2})^2;$$

woraus man, wenn man die Quadrate auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen gehörig entwickelt, leicht erhält:

Digitized by Google

$$AB^2 = 2\sqrt{AB^2 - \tfrac{1}{4}AC^2},$$

$$AC^2 = 2\sqrt{AC^2 - \tfrac{1}{4}AD^2},$$

$$AD^2 = 2\sqrt{AD^2 - \tfrac{1}{4}AE^2},$$

$$AE^2 = 2\sqrt{AE^2 - \tfrac{1}{4}AB^2}.$$

Man gelangt zu diesen Gleichungen auch unmittelbar, wenn man sich von den Punkten B, C, D, E auf den Durchmesser AA_1 Perpendikel gefällt denkt, weil man dann nach einem bekannten geometrischen Satze die folgenden Proportionen hat:

$$2 : AB = AB : \sqrt{AB^2 - \tfrac{1}{4}AC^2},$$

$$2 : AC = AC : \sqrt{AC^2 - \tfrac{1}{4}AD^2},$$

$$2 : AD = AD : \sqrt{AD^2 - \tfrac{1}{4}AE^2},$$

$$2 : AE = AE : \sqrt{AE^2 - \tfrac{1}{4}AB^2}.$$

Macht man die obigen Gleichungen rational, so erhält man:

$$AB^4 - 4AB^2 = -AC^2,$$

$$AC^4 - 4AC^2 = -AD^2,$$

$$AD^4 - 4AD^2 = -AE^2,$$

$$AE^4 - 4AE^2 = -AB^2;$$

und hieraus ergiebt sich weiter:

$$AB^2 = 2 \pm \sqrt{4 - AC^2},$$

$$AC^2 = 2 \pm \sqrt{4 - AD^2},$$

$$AD^2 = 2 \pm \sqrt{4 - AE^2},$$

$$AE^2 = 2 \pm \sqrt{4 - AB^2};$$

wo sich nun frägt, wie die Zeichen zu nehmen sind, was leicht auf folgende Art entschieden werden kann.

Weil nämlich

$$0 < \frac{1}{17} < \frac{1}{4},$$

$$0 < \frac{2}{17} < \frac{1}{4},$$

$$0 < \frac{4}{17} < \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4} < \frac{8}{17} < \frac{1}{2}$$

und das Quadrat der Sehne des vierten Theils der Peripherie 2, das Quadrat des Durchmessers oder der Sehne der halben Peripherie 4 ist; so ist offenbar

$$0 < AB^2 < 2,$$
$$0 < AC^2 < 2,$$
$$0 < AD^2 < 2,$$
$$2 < AE^2 < 4;$$

und man muss also in den drei ersten der vier obigen Gleichungen das untere, in der vierten Gleichung das obere Zeichen nehmen, d. h. man muss

$$AB^2 = 2 - \sqrt{4 - AC^2},$$
$$AC^2 = 2 - \sqrt{4 - AD^2},$$
$$AD^2 = 2 - \sqrt{4 - AE^2},$$
$$AE^2 = 2 + \sqrt{4 - AB^2}$$

oder

$$4 - AB^2 = 2 + \sqrt{4 - AC^2},$$
$$4 - AC^2 = 2 + \sqrt{4 - AD^2},$$
$$4 - AD^2 = 2 + \sqrt{4 - AE^2},$$
$$4 - AE^2 = 2 - \sqrt{4 - AB^2}$$

setzen.

Bezeichnen wir nun die vier Sehnen

$$A_1B,\ A_1C,\ A_1D,\ A_1E$$

durch u, v, w, x; so ist offenbar nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$u = \sqrt{4 - AB^2},$$
$$v = \sqrt{4 - AC^2},$$
$$w = \sqrt{4 - AD^2},$$
$$x = \sqrt{4 - AE^2};$$

und wir haben daher nach dem Obigen die vier folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} u^2 = 2 + v, \\ v^2 = 2 + w, \\ w^2 = 2 + x, \\ x^2 = 2 - u. \end{cases}$$

Zieht man die dritte Gleichung von der ersten, und die vierte Gleichung von der zweiten ab, so erhält man:

$$u^2 - w^2 = v - x,$$
$$v^2 - x^2 = u + w;$$

also, wenn man multiplicirt und dann aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$2)\quad (u-w)(v+x) = 1$$

oder

$$3)\quad uv - vw + ux - wx = 1.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten, die dritte Gleichung von der zweiten, die vierte Gleichung von der dritten, und die erste Gleichung von der vierten ab, so erhält man:

$$u^2 - v^2 = v - w,$$
$$v^2 - w^2 = w - x,$$
$$w^2 - x^2 = x + u,$$
$$x^2 - u^2 = -(u + v);$$

also, wenn man multiplicirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$4)\quad (u-v)(v+w)(w+x)(x-u) = -1$$

oder

$$5)\quad (uw - vx + ux - vw)(uw - vx + uv - wx) = 1.$$

Man setze nun

$$6)\quad \begin{cases} X = -u + v + w + x, \\ Y = \quad vx - uw, \\ Z = -uvwx. \end{cases}$$

Quadrirt man die erste dieser drei Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned} X^2 = &\quad u^2 + v^2 + w^2 + x^2 \\ &- 2(uv - vw + ux - wx) \\ &+ 2(vx - uw), \end{aligned}$$

also, weil nach 1)

$$u^2 + v^2 + w^2 + x^2 = X + 8$$

ist, und wegen der Gleichung 3) und der zweiten der Gleichungen 6):

$$7)\quad X^2 - X - 2Y = 6.$$

Die Gleichung 5) kann man auf folgende Art darstellen:

$$(Y - ux + vw)(Y - uv + wx) = 1,$$

also, wenn man multiplicirt:

$$\left.\begin{array}{l} Y^2-(uv-vw+ux-wx)Y \\ +u^2vx-v^2uw+w^2vx-x^2uw \end{array}\right\}=1,$$

d. i. nach 3)

$$Y^2-Y+u^2vx-v^2uw+w^2vx-x^2uw=1.$$

Nach 1) ist aber, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} & u^2vx-v^2uw+w^2vx-x^2uw \\ = & u^2w+v^2x-w^2u+x^2v \\ & +4(vx-uw) \\ = & -(uv-vw+ux-wx) \\ & +2(-u+v+w+x)+4(vx-uw) \\ = & -1+2X+4Y, \end{aligned}$$

und folglich nach dem Obigen

$$8)\quad Y^2+3Y+2X=2.$$

Quadrirt man die zweite der Gleichungen 6), so erhält man:

$$Y^2=u^2w^2+v^2x^2-2uvwx,$$

d. i.

$$Y^2=u^2w^2+v^2x^2+2Z.$$

Nach 1) ist aber, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} u^2w^2+v^2x^2=8+2(-u+v+w+x) \\ +vx-uw, \end{aligned}$$

d. i.

$$u^2w^2+v^2x^2=8+2X+Y,$$

und folglich nach dem Obigen

$$Y^2=8+2X+Y+2Z.$$

Weil nun aber nach 8)

$$Y^2=2-2X-3Y$$

ist, so erhält man die Gleichung

$$9)\quad 2(X+Y)+Z=-3.$$

Zwischen den Grössen X, Y, Z hat man daher jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$10)\ \begin{cases} X^2 - X - 2Y = 6, \\ Y^2 + 3Y + 2X = 2, \\ 2(X+Y) + Z = -3; \end{cases}$$

oder

$$11)\ \begin{cases} X(X-1) = 2(Y+3), \\ Y(Y+3) = -2(X-1), \\ Z = -3 - 2(X+Y). \end{cases}$$

Multiplicirt man die beiden ersten Gleichungen in einander, so erhält man die Gleichung

$$12)\ (XY+4)(X-1)(Y+3) = 0,$$

welche für

$$XY = -4,\ X = 1,\ Y = -3$$

erfüllt ist. Für $X = 1$ folgt aus der ersten und dritten der Gleichungen 11) sogleich $Y = -3$ und $Z = 1$. Für $Y = -3$ folgt aus der zweiten und dritten derselben Gleichungen $X = 1$ und $Z = 1$. In beiden Fällen wäre folglich Z positiv, was ungereimt ist, da nach dem Obigen $Z = -uvwx$ nothwendig eine negative Grösse sein muss. Also kann nur

$$13)\ XY = -4$$

sein. Eliminirt man aus dieser Gleichung und aus der ersten der Gleichungen 10) die Grösse Y, so erhält man die Gleichung

$$14)\ X^3 - X^2 - 6X + 8 = 0,$$

und wenn man aus der Gleichung 13) und der zweiten der Gleichungen 10) die Grösse X eliminirt, so erhält man die Gleichung

$$15)\ Y^3 + 3Y^2 - 2Y - 8 = 0.$$

Eine Wurzel der Gleichung 14) ist 2, und eine Wurzel der Gleichung 15) ist -2. Dividirt man also die Functionen dieser beiden Gleichungen respective durch $X - 2$ und $Y + 2$, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$16)\ (X-2)(X^2 + X - 4) = 0$$

und

$$17)\ (Y+2)(Y^2 + Y - 4) = 0.$$

Die Gleichung 16) ist für $X = 2$, und die Gleichung 17) ist für $Y = -2$ erfüllt, welchem letzteren Werthe wegen der Gleichung 13) wieder der Werth $X = 2$ entspricht. Nun ist aber offenbar

$$u < 2,\ v > \sqrt{2},\ w > \sqrt{2},$$

also

$$-u + v + w > 2(\sqrt{2} - 1),$$

Digitized by Google

d. i.

$$-u+v+w>2,$$

und folglich um so mehr

$$-u+v+w+x>2,$$

d. i. $X>2$. Also kann nach dem Obigen weder $X=2$, noch $Y=-2$ sein, und nach 16) und 17) haben wir daher die beiden folgenden Gleichungen:

$$18)\quad X^2+X-4=0$$

und

$$19)\quad Y^2+Y-4=0.$$

Auch erhellet aus dem Vorhergehenden zugleich, dass X positiv, folglich wegen der Gleichung 13) die Grösse Y negativ ist, und aus den Gleichungen 18) und 19) ergiebt sich daher jetzt, dass X und Y respective die positive und negative Wurzel einer und derselben quadratischen Gleichung, welche wir überhaupt durch

$$20)\quad U^2+U-4=0$$

bezeichnen wollen, sind. Mittelst der dritten der Gleichungen 11) findet man leicht $Z=-1$.

Setzen wir nun

$$21)\quad \begin{cases} u_1 = w-u, \\ v_1 = v+x, \\ w_1 = -uw, \\ x_1 = vx; \end{cases}$$

so haben wir nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$22)\quad \begin{cases} u_1+v_1=X, \\ w_1+x_1=Y, \\ w_1x_1=Z. \end{cases}$$

Nehmen wir hierzu noch die Gleichung 2) und beachten, dass $Z=-1$ ist, so erhalten wir die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$23)\quad u_1+v_1=X,\ u_1v_1=-1$$

und

$$24)\quad w_1+x_1=Y,\ w_1x_1=-1.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich:

$$u_1^2-Xu_1-1=0,$$
$$v_1^2-Xv_1-1=0;$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$w_1^2 - Yw_1 - 1 = 0,$$
$$x_1^2 - Yx_1 - 1 = 0.$$

Weil nun $v_1 = v + x$ offenbar positiv, wegen der Gleichung $u_1 v_1 = -1$ also u_1 negativ ist, so sind u_1 und v_1 respective die negative und positive Wurzel der Gleichung

$$25)\quad U_1^2 - XU_1 - 1 = 0.$$

Weil $x_1 = vx$ offenbar positiv, wegen der Gleichung $w_1 x_1 = -1$ also w_1 negativ ist, so sind w_1 und x_1 respective die negative und positive Wurzel der Gleichung

$$26)\quad U_2^2 - YU_2 - 1 = 0.$$

Nach 21) haben wir die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$27)\quad w - u = u_1,\ uw = -w_1$$

und

$$28)\quad v + x = v_1,\ vx = x_1.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich

$$u^2 + u_1 u + w_1 = 0,$$
$$w^2 - u_1 w + w_1 = 0;$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$v^2 - v_1 v + x_1 = 0,$$
$$x^2 - v_1 x + x_1 = 0.$$

Weil w_1 negativ ist, so haben die Wurzeln der Gleichung

$$29)\quad U_3^2 - u_1 U_3 + w_1 = 0$$

entgegengesetzte Vorzeichen, und es erhellet aus dem Obigen leicht, dass die negative und positive Wurzel dieser Gleichung respective die Grössen $-u$ und w liefern. Weil ferner x_1 positiv ist, so haben die Wurzeln der Gleichung

$$30)\quad U_4^2 - v_1 U_4 + x_1 = 0$$

gleiche Vorzeichen, und sind, weil auch v_1 positiv ist, beide positiv. Weil nun offenbar $v > x$ ist, so erhellet aus dem Obigen, dass die grössere und kleinere der beiden positiven Wurzeln der vorhergehenden Gleichung respective die beiden Grössen v und x liefern.

Nach dem Vorhergehenden reducirt sich also die Berechnung des regulären Siebzehnecks im Kreise auf die Auflösung der fünf folgenden quadratischen Gleichungen:

Digitized by Google

$$31)\quad \begin{cases} U^2 + U - 4 = 0, \\ U_1{}^2 - XU_1 - 1 = 0, \\ U_2{}^2 - YU_2 - 1 = 0, \\ U_3{}^2 - u_1 U_3 + w_1 = 0, \\ U_4{}^2 - v_1 U_4 + x_1 = 0. \end{cases}$$

Die positive und negative Wurzel der ersten Gleichung liefern respective X und Y. Die negative und positive Wurzel der zweiten Gleichung liefern u_1 und v_1. Die negative und positive Wurzel der dritten Gleichung liefern w_1 und x_1. Die negative und positive Wurzel der vierten Gleichung liefern $-u$ und w. Die grössere und kleinere der beiden positiven Wurzeln der fünften Gleichung liefern v und x.

Die Grösse x ist die Seite des regulären Vierunddreissigecks. Die Seite des regulären Siebzehnecks ist

$$AB = \sqrt{4 - u^2} = \sqrt{(2 - u)(2 + u)}.$$

Durch die wirkliche Auflösung der obigen quadratischen Gleichungen erhält man nach Herrn **Amiot**:

$$X = \tfrac{1}{2}(\sqrt{17} - 1),\quad Y = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{17} + 1);$$

$$u_1 = \tfrac{1}{4}\{\sqrt{17} - 1 - \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})}\},$$
$$v_1 = \tfrac{1}{4}\{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})}\};$$

$$w_1 = -\tfrac{1}{4}\{\sqrt{17} + 1 + \sqrt{(34 + 2\sqrt{17})}\},$$
$$x_1 = -\tfrac{1}{4}\{\sqrt{17} + 1 - \sqrt{(34 + 2\sqrt{17})}\};$$

$$-u = \tfrac{1}{8}\left\{\begin{array}{l} \sqrt{17} - 1 - \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} \\ -\sqrt{[68 + 14\sqrt{17} - 4\sqrt{(170 - 26\sqrt{17})} + 16\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})}]} \end{array}\right\},$$

$$w = \tfrac{1}{8}\left\{\begin{array}{l} \sqrt{17} - 1 - \sqrt{(34 - 2\sqrt{(17)}} \\ +\sqrt{[68 + 14\sqrt{17} - 4\sqrt{(170 - 26\sqrt{17})} + 16\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})}]} \end{array}\right\},$$

$$v = \tfrac{1}{8}\left\{\begin{array}{l} \sqrt{17} - 1 + \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} \\ +\sqrt{[68 + 14\sqrt{17} + 4\sqrt{(170 - 26\sqrt{17})} - 16\sqrt{(34 + 2\sqrt{17})}]} \end{array}\right\},$$

$$x = \tfrac{1}{8}\left\{\begin{array}{l} \sqrt{17} - 1 + \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} \\ -\sqrt{[68 + 14\sqrt{17} + 4\sqrt{(170 - 26\sqrt{17})} - 16\sqrt{(34 + 2\sqrt{17})}]} \end{array}\right\}.$$

Um aus den Gleichungen 31) eine Construction des regulären Siebzehnecks abzuleiten, wollen wir dieselben, indem wir, den Halbmesser immer der Einheit gleich annehmend,

$$1 \,.\, (-w_1) = m^2,\quad 1 \,.\, x_1 = n^2,$$

d. i.

$$1 : m = m : -w_1,$$
$$1 : n = n : x_1$$

setzen, zuerst auf die folgende Form bringen:

$$U(U+1)=4,$$
$$U_1(U_1-X)=1,$$
$$U_2(U_2-Y)=1,$$
$$U_3(U_3-u_1)=m^2,$$
$$U_4(U_4-v_1)=-n^2.$$

In Taf. I. Fig. 4. nehmen wir nun zuerst

$$O\mathfrak{A}=2,\ \mathfrak{AB}=\tfrac{1}{2};$$

so ist nach einem bekannten geometrischen Satze

$$OU\,.\,OU'=4,$$

also

$$OU\,.\,(OU+1)=4,$$
$$OU'\,.\,(OU'-1)=4;$$

oder

$$(+OU)\{(+OU)+1\}=4,$$
$$(-OU')\{(-OU')+1\}=4.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$X=+OU,\ Y=-OU'.$$

Nun nehme man

$$O\mathfrak{C}=\tfrac{1}{2}OU \text{ und } O\mathfrak{D}=\tfrac{1}{2}OU';$$

so ist nach demselben Satze wie vorher

$$A_1U_1\,.\,A_1U'_1=1 \text{ und } A_1U_2\,.\,A_1U'_2=1,$$

also

$$A_1U_1\,.\,(A_1U_1+X)=1,$$
$$A_1U'_1\,.\,(A_1U'_1-X)=1$$

und

$$A_1U_2\,.\,(A_1U_2+Y)=1,$$
$$A_1U'_2\,.\,(A_1U'_2-Y)=1$$

oder

$$(-A_1U_1)\,.\,\{(-A_1U_1)-X\}=1,$$
$$(+A_1U'_1)\,.\,\{(+A_1U'_1)-X\}=1$$

und

$$(-A_1U_2)\,.\,\{(-A_1U_2)-Y\}=1,$$
$$(+A_1U'_2)\,.\,\{(+A_1U'_2)-Y\}=1.$$

Also ist nach dem Obigen

$$u_1 = -A_1U_1,\ v_1 = +A_1U'_1$$

und

$$w_1 = -A_1U_2,\ x_1 = +A_1U'_2.$$

Nun construire man, wie aus der Figur ohne weitere Erläuterung mit hinreichender Deutlichkeit ersichtlich ist, die Grössen

$$m = +A_1\mathfrak{M},\ n = +A_1\mathfrak{N}$$

und nehme

$$A_1\mathfrak{G} = A_1\mathfrak{M},\ \mathfrak{G}\mathfrak{H} = \tfrac{1}{2}A_1U_1;$$

so ist

$$A_1U_3 \,.\, A_1U'_3 = m^2,$$

also

$$A_1U_3 \,.\, (A_1U_3 + u_1) = m^2,$$
$$A_1U'_3 \,.\, (A_1U'_3 - u_1) = m^2$$

oder

$$(-A_1U_3) \,.\, \{(-A_1U_3) - u_1\} = m^2,$$
$$(+A_1U'_3) \,.\, \{(+A_1U'_3) - u_1\} = m^2;$$

und folglich nach dem Obigen

$$u = A_1U_3,\ w = A_1U'_3.$$

Endlich nehme man

$$A_1\mathfrak{J} = A_1\mathfrak{N},\ A_1\mathfrak{K} = A_1U'_1$$

und mache die Construction weiter wie die Figur zeigt, so ist offenbar

$$A_1U_4 \,.\, A_1U'_4 = n^2,$$

also

$$A_1U_4 \,.\, (v_1 - A_1U_4) = n^2,$$
$$A_1U'_4 \,.\, (v_1 - A_1U'_4) = n^2$$

oder

$$(+A_1U_4)\ \{(+A_1U_4) - v_1\} = -n^2,$$
$$(+A_1U'_4)\ \{(+A_1U'_4) - v_1\} = -n^2;$$

und folglich nach dem Obigen

$$v = A_1U_4,\ x = A_1U'_4.$$

Auf diese Weise sind also die Grössen u, v, w, x durch Construction gefunden, indem dieselben nach der Reihe

$$A_1U_3,\ A_1U_4,\ A_1U'_3,\ A_1U'_4$$

sind, und dass sich nun auch das reguläre Siebzehneck leicht construiren lässt, erhellet auf der Stelle, indem man bloss $A_1B = A_1U_2$ zu machen braucht, wo dann der Bogen AB der siebzehnte Theil der Peripherie sein wird.

Nach Pauker's Fundamenten der Geometrie. Fünfter bis Siebenter Cursus. Mitau. 1842. S. 43. ist, wenn der Durchmesser der Einheit gleich gesetzt wird,

$$u = 0,98297309968390$$
$$v = 0,93247222940435$$
$$w = 0,73900891722065$$
$$x = 0,09226835946330$$

und die Seite des regulären Siebzehnecks, ebenfalls in Bezug auf den Durchmesser als Einheit, ist

$$0,18374951781657.$$

In dem genannten vortrefflichen Buche findet man überhaupt eine grosse Anzahl genauer numerischer Angaben, welches keiner der geringsten Vorzüge desselben ist.

IX.

Allgemeines Kriterium für die Fälle, in welchen die Logarithmen rationale Brüche sind, nebst einer Methode, die letztern aufzufinden.

Von

Herrn F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Wenn in der Gleichung $b^x = A$ gegeben sind b und A, so ist meine Aufgabe, die Bedingungen des gegenseitigen Zusammenhangs zwischen b und A aufzusuchen, damit x ein rationaler Bruch werde. A ist eine positive ganze Zahl, und b die Basis des logarithmischen Systems, welches also eine positive ganze, die Einheit übersteigende Zahl ist. Es heisst bekanntlich x der Logarithmus von A in Bezug auf die Basis b.

Begreiflicherweise kann diese meine Aufgabe nur durch die Principien der höhern Zahlentheorie gelöst werden, und wir erhalten somit eine neue Anwendung dieses schönen Zweiges der Mathematik. Die Methode der Betrachtung wird zugleich ein Mittel an die Hand geben. die Logarithmen, falls sie rationale Brüche sind, auf eine ziemlich einfache Art, ohne Hülfe der höhern Analysis, ganz genau aufzufinden.

Der Bedingung der Aufgabe gemäss setze ich $x = \frac{m}{n}$, und nehme, wozu ich berechtigt bin, an, dass dieser Bruch auf seine kleinste Benennung gebracht sei, oder die ganzen Zahlen m und n relative Primzahlen seien.

I. Nun sei zuvörderst $b > A$. Da $b^m = A^n$, so wird m kleiner als n, oder $\frac{m}{n}$ ein ächter Bruch sein. Weil letztere Gleichung erfordert, dass b^m durch A theilbar ist, so können A und b nicht relative Primzahlen sein, sondern müssen ein grösstes gemeinschaftliches (von der Einheit verschiedenes) Maass Θ haben, so dass $b = \Theta b_1$, und $A = \Theta A_1$ gesetzt werden kann, und b_1 zu A_1 relative Primzahl ist. Hierdurch geht obige Gleichung über in $b_1^m = \Theta^{n-m} A_1^n$. Es muss also wieder b_1^m durch A_1 theilbar sein; da aber A_1 zu b_1 relative Primzahl, so kann A_1 nur die Einheit sein, und dann ist $A = \Theta$, also $b = A b_1$.

Die Gleichung $b^m = A^n$, in welcher $b > A$, kann also nur dann in ganzen Zahlen aufgelöst werden, wenn b durch A ohne Rest theilbar ist.

Die Gleichung $b_1^m = \Theta^{n-m} A_1^n$ geht durch die Substitutionen von $A_1 = 1$ und $A = \Theta$ über in $b_1^m = A^{n-m}$. Ist also b_1 noch grösser als A, so darf auf diese Gleichung derselbe Schluss, wie auf die ursprüngliche angewandt werden, nämlich es muss von Neuem b_1 durch A theilbar sein, und wenn dieses ist, so kommt es auf die Gleichung $b_2^m = A^{n-2m}$ an, indem $b_1 = A b_2$ gesetzt worden.

Ist b_2 auch noch grösser als A, so muss es durch A theilbar sein, und wenn demnach $b_2 = A b_3$ gesetzt wird, so ist zu lösen die Gleichung $b_3^m = A^{n-3m}$.

Diese Schlüsse dürfen so lange fortgesetzt werden, als die neue Wurzel noch grösser als A ist.

Trifft es sich also, dass eine beliebige Wurzel $b_{k-1} > A_1$ und nicht durch A theilbar ist, so kann die ursprüngliche Gleichung $b^m = A^n$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar sein.

Kommt man aber durch die fortgesetzte Division, wie sie oben angedeutet ist, endlich auf den Quotienten 1, in welchem Falle b eine genaue Potenz von $A = A^k$ ist, so wird $b^m = A^{km}$, also $A^n = A^{km}$, $n = km$, folglich $k = \frac{n}{m}$, und $\frac{n}{m}$ eine ganze Zahl; da aber m zu n prim, so kann m nur 1 sein, $k = n$, also $b = A^n$, oder $b^{\frac{1}{n}} = A$. Findet man also, dass die Basis b eine vollständige Potenz von A, z. B. $= A^k$ ist, so wird die Gleichung $b^{\frac{m}{n}} = A$ stets und nur aufgelöst durch $n = k$ und $m = 1$. Z. B. $125 = 5^3$, also $125^{\frac{1}{3}} = 5$.

Kommt man endlich auf einen Quotienten, der kleiner als A ist, z. B. $b = A^k . b_k$, wo $b_k < A$, so hat man nach dem Obigen der Gleichung zu genügen:

$$A^{n-mk} = b_k^m.$$

Da nun $A > b_k$, so lassen sich alle vorigen Schlüsse auf diese Gleichung von Neuem anwenden, wenn man nur A mit b vertauscht.

Nämlich ist A gar nicht durch b_k ohne Rest theilbar, so kann die Gleichung in ganzen Zahlen nicht aufgelöst werden. Ist aber A durch b_k theilbar, so sei b_k^λ die höchste Potenz von b_k, welche in A aufgeht; ist der Quotient 1, so genügen unserer ursprünglichen Gleichung ganze Zahlen, ist der Quotient grösser als b_k, so ist die Gleichung unlösbar, ist er endlich kleiner als b_k, oder $A = b_k^\lambda A_\lambda$, wo $A_\lambda < b_k$, so hat man der Gleichung zu genügen:

$$b_k^{m-\lambda(n-mk)} = A_\lambda^{n-mk},$$

und da jetzt $b_k > A_\lambda$, so werden auf diese Gleichung wieder die vorigen Schlüsse angewandt.

Demnach haben wir folgende Reihe von Gleichungen:

$$(a)\quad \begin{cases} b = A^k b_k \\ A = b_k^\lambda A_\lambda \\ b_k = A_\lambda^\mu b_\mu \\ A_\lambda = b_\mu^\nu A_\nu \\ b_\mu = A_\nu^\omega \end{cases}$$

In denselben ist $b_k < A_k$, $A_\lambda < b_k$, $b_\mu < A_\lambda$ u. s. w. Soll also unsere obige Gleichung in ganzen Zahlen auflösbar sein, so muss der zweite Factor auf der Rechten endlich die Einheit werden, welches mit b_ω geschehen ist.

Jedoch folgt aus unserer Analyse noch nicht, dass die Gleichungen (a) wirklich ausreichend sind, um behaupten zu dürfen, dass die Gleichung $b^{\frac{m}{n}} = A$ in ganzen Zahlen auflösbar sei. Dass dies sich aber wirklich so verhalte, ersieht man aus den allgemeinen Ausdrücken für m und n, die ich aus obigen Relationen auf auf folgende Weise herleite.

1. Substituirt man den Werth von A in der zweiten Relation in die erste, und setzt der Kürze halber

$$k\lambda + 1 = \lambda_1,$$

so entsteht

$$b = b_k^{\lambda_1} A_\lambda^k.$$

2. Substituirt man den Werth von b_k aus der dritten Relation in diese Gleichung, so wird, für

$$\lambda_1\mu + k = \mu_1,$$
$$b = A_\lambda^{\mu_1} b_\mu^{\lambda_1}.$$

3. Substituirt man in diese Gleichung den Werth von A_λ aus der vierten Relation, so wird, für

$$\mu_1\nu + \lambda_1 = \nu_1,$$
$$b = b_\mu^{\nu_1} A_\nu^{\mu_1}.$$

4. Substituirt man in diese Gleichung den Werth von b_μ aus der fünften Relation, so wird, für

$$\nu_1\omega + \mu_1 = \omega_1,$$
$$b = A_\nu^{\omega_1}.$$

Geht man nicht von der ersten Relation aus, sondern von der zweiten, so erhält man ganz ebenso

$$A = A_\nu^{\omega'},$$

wenn nach und nach gesetzt wird;

$$\lambda = \lambda',\ \lambda'\mu + 1 = \mu',\ \mu'\nu + \lambda = \nu',\ \nu'\omega + \mu' = \omega'.$$

Setzen wir nun die für b und A gefundenen Werthe in die Gleichung $b^m = A^n$, so erhalten wir $A_\nu^{m\omega_1} = A_\nu^{n\omega'}$, also $m\omega_1 = n\omega'$, $\frac{m}{n} = \frac{\omega'}{\omega_1}$, folglich $m = \omega'$, $n = \omega_1$.

Umgekehrt werden für m und n diese Werthe angenommen, so ist $b^m = A_\nu^{m\omega_1}$, $A^n = A_\nu^{n\omega'}$, oder $b^m = A_\nu^{\omega'\omega_1}$, $A^n = A_\nu^{\omega_1\omega'}$, folglich $b^m = A^n$.

Zugleich ergiebt sich, dass nur die einzigen Werthe von $m = \omega'$ und $n = \omega_1$ der Gleichung $b^{\frac{m}{n}} = A$ genügen; denn da m und n relative Primzahlen sein sollen, so können für m und n nicht Vielfache von ω' und ω_1 angenommen werden.

Ist $A > b$, so braucht man nur A mit b zu vertauschen, und alle vorhergehenden Schlüsse behalten ihre Kraft.

Nehmen wir nun Alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich folgendes Resultat:

Um zu prüfen, ob die Gleichung

$$b^{\frac{m}{n}} = A,$$

in welcher $b > A$ in ganzen Zahlen auflösbar ist, oder nicht, dividire man mit der höchsten Potenz von A in b, mit der höchsten

Potenz des Quotienten b^k in A, mit der höchsten Potenz des neuen Quotienten A_λ in b_k u. s. w.

Geht die Division einmal nicht auf, so ist obige Gleichung in ganzen Zahlen nicht auflösbar; kommt man aber endlich auf den Quotienten 1, so ist sie auflösbar, und nachdem k; λ, μ, ν, ω durch die Relationen (a) bestimmt sind, werden die Zahlen m, n durch folgende zwei Reihen recurrirend bestimmt:

$$(b)\quad \begin{cases} k\lambda + 1 = \lambda_1 \\ \lambda_1\mu + k = \mu_1 \\ \mu_1\nu + \lambda_1 = \nu_1 \\ \nu_1\omega + \mu_1 = n \end{cases} \qquad (c)\quad \begin{cases} \lambda = \lambda' \\ \lambda'\mu + 1 = \mu' \\ \mu'\nu + \lambda = \nu' \\ \nu'\omega + \mu' = m \end{cases}$$

Bei dem ersten Anblick erkennt man übrigens sogleich, dass diese Relationen denen ganz ähnlich sind, durch welche die Partialwerthe eines endlichen Kettenbruchs bestimmt werden.

Nimmt man nämlich zu den vorhergehenden Gleichungen noch die $k = 1$, $1 = 1$, so folgt, dass

$$\frac{1}{k},\ \frac{\lambda'}{\lambda_1},\ \frac{\mu'}{\mu_1},\ \frac{\nu'}{\nu_1}$$

die Partialwerthe des Kettenbruchs

$$\frac{m}{n} = \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{\nu + \cfrac{1}{\omega}}}}}$$

sind.

Es ist ferner bekannt, dass der mittelst dieser Kette berechnete Bruch schon immer in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ist.

Verwandelt man also einen beliebigen ächten Bruch $\frac{m}{n}$ in einen Kettenbruch, so dass k, λ, μ, ν, ω die durch die Division entstandenen Quotienten sind, und bestimmt den Werth A von $b^{\frac{m}{n}}$ (wo b eine willkührliche positive ganze, die Einheit übersteigende Zahl), so lassen sich stets die in (a) dargestellten Gleichungen bilden.

Ich beschliesse diese Abhandlung mit ein Paar Beispielen.

1) Es ist zu untersuchen, ob der Logarithmus von 243 für die Basis 6561 ein rationaler Bruch ist, oder nicht, und im ersteren Falle fordert man seinen Werth.

Hier ist $b = 6561$, $A = 243$. Nach den Gleichungen (a) hat man

$$\begin{aligned} k &= 1, & b_k &= 27, \\ \lambda &= 1, & A_\lambda &= 9, \\ \mu &= 1, & b_\mu &= 3, \\ \nu &= 2, & A_\nu &= 1; \end{aligned}$$

folglich

$$\lambda_1 = 1.1 + 1 = 2, \quad \lambda' = 1,$$
$$\mu_1 = 2.1 + 1 = 3, \quad \mu' = 2,$$
$$n = 3.2 + 2 = 8, \quad m = 5;$$

daher $6561^{\frac{5}{8}} = 243$, und $\frac{5}{8} = \log 243$ (Basis 6561).

2) Ist der Logarithmus von 5 für die Basis 10 ein rationaler Bruch oder nicht?

Hier ist $b = 10$, $A = 5$, also

$$k = 1, \quad b_k = 2$$
$$\lambda = 1, \quad 5 = 2 . A_\lambda .$$

Da aber A_λ keine ganze Zahl ist, so kann log 5 (Basis 10) kein rationaler Bruch sein.

X.

Ueber Systeme von Linsengläsern.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

In der im zweiten Theile dieser Zeitschrift abgedruckten Abhandlung No. XV. habe ich eine strenge und, so viel es die Natur des Gegenstandes zulässt, allgemeine, namentlich auch die Dicke der Gläser gehörig berücksichtigende Entwickelung der Formeln zu geben versucht, durch welche, nach den älteren verdienstlichen Arbeiten von Cotes, Euler und Lagrange über diesen interessanten Gegenstand, in neuerer Zeit von mehreren ausgezeichneten Mathematikern, namentlich von Piola, Möbius, Bessel, Clausen und Gauss, die Haupteigenschaften der Systeme von Linsengläsern vorzüglich mit Hülfe der Kettenbrüche dargestellt worden sind. Nach weiteren Untersuchungen über diesen wichtigen Theil der Optik bin ich aber jetzt der Meinung, dass sich die erwähnten merkwürdigen Ausdrücke auf eine einfachere und elegantere Form bringen lassen, welche insbesondere dadurch sich vor der älteren Form auszeichnet, dass die Anzahl der Glieder der betreffenden

Digitized by Google

Kettenbrüche eine weit geringere ist als bei jener, wodurch denn, wie es mir wenigstens scheint, zugleich auch bewirkt wird, dass sich die allgemeinen Gesetze, denen jedes beliebige Linsensystem unterworfen ist, noch deutlicher und bestimmter als bei der früheren Darstellungsweise herausstellen. Diese neuen von mir aufgefundenen Formeln werde ich daher zum Gegenstande des vorliegenden, an meine frühere oben erwähnte Abhandlung insofern sich anschliessenden Aufsatzes machen, als ich in demselben von den nämlichen Fundamentalformeln wie dort, welche natürlich jeder derartigen Untersuchung zur Grundlage dienen müssen, ausgeben werde, ohne diese Formeln jetzt von Neuem zu entwickeln.

§. 2.

Die am Ende des vorhergehenden Paragraphen erwähnten Grundformeln sind, mit Beibehaltung aller in der früheren Abhandlung eingeführten Bezeichnungen, die Thl. II. S. 159. und Thl. II. S. 162. gefundenen Formeln 58. und 68., nämlich die Gleichungen

$$\frac{1}{p} \pm \frac{1}{p_1} - (n-1)\left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R_1}\right) = \pm \frac{D}{n}\left(\frac{1}{p} - \frac{n-1}{R}\right)\left(\frac{1}{p_1} - \frac{n-1}{R_1}\right)$$

und

$$\frac{q}{q_1} = \frac{1-(n-1)\frac{p}{R}}{1 \mp (n-1)\frac{p_1}{R_1}}.$$

Um aber die durch die in der ersten dieser beiden Gleichungen vorkommenden doppelten Zeichen herbeigeführte Unbequemlichkeit, welche namentlich bei dem vorliegenden Gegenstande nicht unbeträchtlich ist, zu vermeiden, ist in §. 11. der mehr erwähnten Abhandlung eine Abänderung der Bezeichnung vorgenommen worden, über welche man das zum Verständnisse des Folgenden Nöthige dort selbst nachsehen muss. Dieser Abänderung der Bezeichnung zufolge muss man in den beiden obigen Gleichungen für

$$D,\ R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

jenachdem man in der ersten der beiden in Rede stehenden Gleichungen die oberen oder unteren Zeichen nimmt, respective

$$\mp D,\ \pm R,\ \pm R_1,\ \mp p,\ \mp p_1$$

oder

$$\mp D,\ \pm R,\ \mp R_1,\ \mp p,\ \pm p_1$$

setzen, wodurch, wie man leicht findet, die beiden obigen Gleichungen die folgende ganz allgemein gültige Gestalt erhalten:

$$1)\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} + (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) = \frac{D}{n}\left(\frac{1}{p} + \frac{n-1}{R}\right)\left(\frac{1}{p_1} + \frac{n-1}{R_1}\right)$$

und

$$2)\quad \frac{q}{q_1}=\frac{1+(n-1)\frac{p}{R}}{1+(n-1)\frac{p_1}{R_1}}.$$

Dies sind die Formeln, von denen wir im Folgenden unsern Auslauf nehmen werden.

§. 3.

Bezeichnen wir die Werthe, welche p, p_1 erhalten, wenn respective p_1, p unendlich werden, respective durch f, f_1; so ist wegen der Gleichung 1)

$$3)\quad \begin{cases} \frac{1}{f}+(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)=\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R_1}\left(\frac{1}{f}+\frac{n-1}{R}\right), \\ \frac{1}{f_1}+(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)=\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{n-1}{R_1}\right). \end{cases}$$

Zieht man jede dieser beiden Gleichungen von der Gleichung 1) ab, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{f}$$
$$=\frac{D}{n}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}+\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{1}{p}+\frac{n-1}{R}\cdot\frac{1}{p_1}-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}\right),$$
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{f_1}$$
$$=\frac{D}{n}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}+\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{1}{p}+\frac{n-1}{R}\cdot\frac{1}{p_1}-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{1}{f_1}\right)$$

oder

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}$$
$$=\left(1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{p}+\left(1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{p_1}-\left(1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{f},$$
$$\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}$$
$$=\left(1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{p}+\left(1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{p_1}-\left(1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{f_1}.$$

Nun ist aber nach 3), wie man leicht findet:

$$\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}=\left(1-\frac{1}{n}\right)D\left(\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{f_1}\right),$$

Digitized by Google

also

$$\frac{D}{n}=\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{f_1}\right)},$$

und folglich

$$1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}=\frac{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}}{\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{f}}\cdot\frac{1}{f},$$

$$1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}=\frac{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}}{\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{f_1}}\cdot\frac{1}{f_1}.$$

Führt man diese Ausdrücke in einen jeden der beiden obigen Ausdrücke von

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}$$

ein, so erhält man die Gleichung

$$4)\quad \left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}$$
$$=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{p_1}+\frac{1}{f_1}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{f_1}\right),$$

aus welcher sich ferner ohne Schwierigkeit die folgenden Formeln ergeben:

$$5)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{p}=\dfrac{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{f_1}-\frac{1}{p_1}\right)\frac{1}{f}}{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)\frac{1}{p_1}+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{1}{f_1}},\\[2ex]\dfrac{1}{p_1}=\dfrac{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{f_1}}{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)\frac{1}{p}+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{1}{f}};\end{cases}$$

oder

$$6)\quad\begin{cases}p=\dfrac{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)\frac{1}{p_1}+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{f_1}-\frac{1}{p_1}\right)\frac{1}{f}},\\[2ex]p_1=\dfrac{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)\frac{1}{p}+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{1}{f}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{f_1}};\end{cases}$$

oder auch

$$7)\quad \begin{cases} p = \dfrac{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)f_1 + (n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)p_1}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)(p_1-f_1)} f, \\ p_1 = \dfrac{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)f + (n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)p}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)(p-f)} f_1; \end{cases}$$

woraus man ferner ohne Schwierigkeit

$$8)\quad \begin{cases} p - f = \dfrac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1} + (n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)(p_1-f_1)} ff_1 \\ p_1 - f_1 = \dfrac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1} + (n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)(p-f)} ff_1; \end{cases}$$

also

$$9)\quad (p-f)(p_1-f_1) = \left\{1 + \frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}\right\} ff_1$$

erhält.

Weil nun nach 3)

$$\frac{1}{f} = \frac{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n} - (n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)}{1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}},$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n} - (n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)}{1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)} =$$

$$-\frac{\frac{D}{n}\left\{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n} - (n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)\right\}}{\left(1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}\right)}$$

also

$$1+\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}=\frac{1}{(1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n})(1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n})}$$

und folglich

$$10)\quad \left\{1+\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}\right\}ff_1$$

$$=\left\{\frac{1}{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}-(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)}\right\}^2;$$

so dass also nach 9) auch

$$11)\quad (p-f)(p_1-f_1)$$

$$=\left\{\frac{1}{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}-(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)}\right\}^2$$

oder

$$12)\quad (p-f)(p_1-f_1)$$

$$=\left\{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}-(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)\right\}^{-2}$$

ist.

§. 4.

Nach 2) ist

$$\frac{q}{q_1}=\frac{1+(n-1)\frac{p}{R}}{1+(n-1)\frac{p_1}{R_1}},$$

also

$$\frac{q}{q_1}=\frac{1+(n-1)\frac{f}{R}+(n-1)\frac{p-f}{R}}{1+(n-1)\frac{f_1}{R_1}+(n-1)\frac{p_1-f_1}{R_1}}.$$

Mittelst der im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Formeln ergiebt sich aber ohne Schwierigkeit

$$1+(n-1)\frac{f}{R}=\frac{R}{R+R_1-\frac{n-1}{n}D},$$

$$1+(n-1)\frac{f_1}{R_1}=\frac{R_1}{R+R_1-\frac{n-1}{n}D};$$

und folglich, wenn der Kürze wegen

$$13)\quad K=\frac{1}{R+R_1-\frac{n-1}{n}D}$$

gesetzt wird:

$$14)\quad \frac{q}{q_1}=\frac{KR+(n-1)\frac{p-f}{R}}{KR_1+(n-1)\frac{p_1-f_1}{R_1}}.$$

Nach 11) ist nun

$$(p-f)(p_1-f_1)=\left\{\frac{RR_1}{(n-1)(R+R_1-\frac{n-1}{n}D)}\right\}^2,$$

d. i. nach 13)

$$15)\quad (p-f)(p_1-f_1)=\left(\frac{KRR_1}{n-1}\right)^2,$$

und folglich

$$p_1-f_1=\frac{K^2R^2R_1^2}{(n-1)^2(p-f)}.$$

Führt man diesen Ausdruck von p_1-f_1 in die Gleichung 14) ein, und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man

$$\frac{q}{q_1}=\frac{(n-1)(p-f)}{KRR_1}.$$

Verbindet man nun aber hiermit die Gleichung 15), so erhält man für $\frac{q}{q_1}$ die beiden folgenden Ausdrücke:

$$16)\quad \frac{q}{q_1}=\frac{(n-1)(p-f)}{KRR_1}=\frac{KRR_1}{(n-1)(p_1-f_1)}.$$

Die Grösse

$$\frac{KRR_1}{n-1}=\frac{RR_1}{(n-1)(R+R_1-\frac{n-1}{n}D)}$$

hängt nur von der Grösse n, den beiden Halbmessern des Glases und der Dicke desselben ab, und soll im Folgenden, weil sie für jedes Glas offenbar charakteristisch ist, der **Modulus***) desselben genannt und durch M bezeichnet werden, so dass also nach dem Vorhergehenden

$$17)\quad M = \frac{RR_1}{(n-1)(R+R_1-\frac{n-1}{n}D)}$$

und

$$18)\quad (p-f)(p_1-f_1) = M^2,$$

so wie

$$19)\quad \frac{q}{q_1} = \frac{p-f}{M} = \frac{M}{p_1-f_1},$$

also auch, wie hieraus leicht folgt:

$$20)\quad \left(\frac{q}{q_1}\right)^2 = \frac{p-f}{p_1-f_1}$$

ist.

Den Modulus kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$21)\quad M = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}}$$

oder

$$22)\quad M = \{(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}\}^{-1}.$$

Eliminirt man die Grösse $\frac{D}{n}$ mittelst der aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Formel

$$\frac{D}{n} = \frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{f_1}\right)},$$

so erhält man

$$23)\quad M = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\frac{R}{f}-\frac{R_1}{f_1}}{\frac{1}{R_1}\cdot\frac{R}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{R_1}{f_1}}$$

*) Dieser von mir hier eingeführte Begriff des Modulus einer Linse scheint mir für die ganze optische Theorie nicht unwichtig zu sein.

oder

$$24)\quad M = \frac{RR_1}{n-1} \cdot \frac{Rf_1 - R_1 f}{R^2 f_1 - R_1{}^2 f}.$$

Auch ergiebt sich aus 9) und 18) für das Quadrat des Modulus unmittelbar der folgende Ausdruck:

$$25)\quad M^2 = \left\{1 + \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)}\right\} ff_1.$$

Will man bei der Berechnung des Modulus bloss D, f, f_1 als bekannte Grössen ansehen, so muss man aus diesen Grössen die Halbmesser R und R_1 berechnen, was auf folgende Art, freilich nur mit Hülfe einer quadratischen Gleichung, geschehen kann.

Nach dem Obigen ist

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{f_1} = (1 - \frac{1}{n}) D (\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{f} - \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{f_1}),$$

also

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{f_1} = (1 - \frac{1}{n}) D \{(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1})\frac{1}{f} - (\frac{1}{f} + \frac{1}{f_1})\frac{1}{R}\}.$$

Bestimmt man aus der ersten dieser beiden Gleichungen die Grösse

$$\frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{R_1},$$

aus der zweiten die Grösse

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1},$$

und führt die erhaltenen Ausdrücke in die zweite der Gleichungen 3) ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung:

$$\left(\frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{R}\right)^2 - \left(2 - \frac{D}{n} \cdot \frac{1}{f}\right) \cdot \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{R}$$
$$= \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{f_1} + \frac{D}{n} \cdot \frac{1}{ff_1}}{\frac{1}{f_1}},$$

und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergiebt sich ohne Schwierigkeit:

$$\frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{R} = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{D}{n} \cdot \frac{1}{f} \{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4n^2 ff_1}{D^2}}\}.$$

Bestimmt man nun mittelst dieses Ausdrucks von

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R}$$

und der ersten der beiden Gleichungen, von denen wir oben ausgegangen sind, auch die Grösse

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R_1};$$

so erhält man zur Bestimmung der Halbmesser R und R_1 überhaupt die beiden folgenden Ausdrücke, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$26)\quad \begin{cases} \frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{f}\{1\pm\sqrt{1+\frac{4n^2ff_1}{D^2}}\}, \\ \frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R_1}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{f_1}\{1\pm\sqrt{1+\frac{4n^2ff_1}{D^2}}\}; \end{cases}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\mu=\frac{1}{2}\cdot\frac{D}{n}\{1\pm\sqrt{1+\frac{4n^2ff_1}{D^2}}\}$$

setzen, die beiden Ausdrücke:

$$27)\quad \frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R}=1-\frac{\mu}{f},\quad \frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R_1}=1-\frac{\mu}{f_1};$$

oder

$$28)\quad \frac{1}{R}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{f-\mu}{fD},\quad \frac{1}{R_1}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{f_1-\mu}{f_1D};$$

oder

$$29)\quad R=(1-\frac{1}{n})\frac{fD}{f-\mu},\quad R_1=(1-\frac{1}{n})\frac{f_1D}{f_1-\mu}.$$

Auch erhellet aus der vorhergehenden Entwickelung, dass bei jedem Linsenglase

$$1+\frac{4n^2ff_1}{D^2}\geqq 0,\quad ff_1+\frac{1}{4}(\frac{D}{n})^2\geqq 0$$

oder

$$\frac{1}{4}(\frac{D}{n})^2\geqq -ff_1$$

sein muss.

In dem Folgenden werden wir nun immer den Modulus eines jeden in einem Systeme von Linsengläsern vorkommenden Glases als bekannt annehmen, wozu wir berechtigt sind, da derselbe mittelst der im Vorhergehenden entwickelten Formeln jederzeit ohne Schwierigkeit berechnet werden kann.

Digitized by Google

§. 5.

Indem wir jetzt zu der Betrachtung eines durch ein System von Linsengläsern von der gewöhnlichen bekannten Beschaffenheit gehenden Strahls übergehen, führen wir zuvörderst die folgenden Bezeichnungen ein.

Die Anzahl der das System bildenden Gläser sei i, und die im Vorhergehenden durch $p, q; p_1, q_1; f, f_1$ bezeichneten Grössen sollen für die einzelnen Gläser des Systems vom 1sten bis zum $i$ten jetzt durch

$$p^{(1)},\ q^{(1)};\ p_1^{(1)},\ q_1^{(1)};\ f^{(1)},\ f_1^{(1)};$$
$$p^{(2)},\ q^{(2)};\ p_1^{(2)},\ q_1^{(2)};\ f^{(2)},\ f_1^{(2)};$$
$$p^{(3)},\ q^{(3)};\ p_1^{(3)},\ q_1^{(3)};\ f^{(3)},\ f_1^{(3)};$$
u. s. w.
$$p^{(i)},\ q^{(i)};\ p_1^{(i)},\ q_1^{(i)};\ f^{(i)},\ f_1^{(i)}$$

bezeichnet werden. Die Moduli der einzelnen Gläser nach der Reihe vom 1sten bis zum $i$ten mögen

$$M^{(1)},\ M^{(2)},\ M^{(3)},\ M^{(4)},\ \ldots\ M^{(i)}$$

sein, und die sämmtlich als positiv betrachteten Entfernungen der einzelnen Gläser von einander, welche von der hinteren Fläche eines jeden Glases bis zu der vordern Fläche des nächst folgenden Glases gerechnet werden, wollen wir nach der Reihe durch

$$E^{(1)},\ E^{(2)},\ E^{(3)},\ E^{(4)},\ \ldots\ E^{(i-1)}$$

bezeichnen, wo wir dann die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen haben *):

$$30)\quad \begin{cases} p_1^{(1)} + p^{(2)} = -E^{(1)}, \\ p_1^{(2)} + p^{(3)} = -E^{(2)}, \\ p_1^{(3)} + p^{(4)} = -E^{(3)}, \\ \text{u. s. w.} \\ p_1^{(i-1)} + p^{(i)} = -E^{(i-1)}. \end{cases}$$

Nach 18) ist nun überhaupt

$$(p^{(k)} - f^{(k)})(p_1^{(k)} - f_1^{(k)}) = (M^{(k)})^2,$$

und nach 30) haben wir die Gleichung

$$p_1^{(k-1)} + p^{(k)} = -E^{(k-1)},$$

aus der sich leicht die Gleichung

$$p^{(k)} - f^{(k)} = -E^{(k-1)} - f_1^{(k-1)} - f^{(k)} - (p_1^{(k-1)} - f_1^{(k-1)}),$$

*) Man vergl. Thl. II. S. 178.

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$N^{(k-1)} = E^{(k-1)} + f_1^{(k-1)} + f^{(k)}$$

setzen, die Gleichung

$$p^{(k)} - f^{(k)} = - N^{(k-1)} - (p_1^{(k-1)} - f_1^{(k-1)})$$

ergiebt. Daher haben wir nach dem Obigen die Gleichung

$$31)\quad p_1^{(k)} - f_1^{(k)} = - \frac{(M^{(k)})^2}{N^{(k-1)} + (p_1^{(k-1)} - f_1^{(k-1)})},$$

aus welcher sich ferner leicht die Gleichung

$$32)\quad p_1^{(k-1)} - f_1^{(k-1)} = - N^{(k-1)} - \frac{(M^{(k)})^2}{p_1^{(k)} - f_1^{(k)}}$$

ergiebt.

Setzen wir jetzt analog mit dem Vorhergehenden

$$33)\quad \begin{cases} N^{(1)} = E^{(1)} + f_1^{(1)} + f^{(2)}, \\ N^{(2)} = E^{(2)} + f_1^{(2)} + f^{(3)}, \\ N^{(3)} = E^{(3)} + f_1^{(3)} + f^{(4)}, \\ \text{u. s. w.} \\ N^{(i-1)} = E^{(i-1)} + f_1^{(i-1)} + f^{(i)}; \end{cases}$$

wo die Grössen

$$N^{(1)},\ N^{(2)},\ N^{(3)},\ N^{(4)},\ \ldots\ N^{(i-1)}$$

natürlich eben so wie die Moduli der einzelnen Gläser als gegebene Grössen zu betrachten sind; so haben wir nach 31) und 18) die folgenden Gleichungen:

$$p_1^{(i)} - f_1^{(i)} = - \frac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)} + (p_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)})},$$

$$p_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)} = - \frac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)} + (p_1^{(i-2)} - f_1^{(i-2)})},$$

$$p_1^{(i-2)} - f_1^{(i-2)} = - \frac{(M^{(i-2)})^2}{N^{(i-3)} + (p_1^{(i-3)} - f_1^{(i-3)})},$$

u. s. w.

$$p_1^{(2)} - f_1^{(2)} = - \frac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)} + (p_1^{(1)} - f_1^{(1)})},$$

$$p_1^{(1)} - f_1^{(1)} = \frac{(M^{(1)})^2}{p^{(1)} - f^{(1)}};$$

und nach 18) und 32) haben wir auf ähnliche Weise die folgenden Gleichungen:

$$p^{(1)} - f^{(1)} = \frac{(M^{(1)})^2}{p_1^{(1)} - f_1^{(1)}},$$

$$p_1^{(1)} - f_1^{(1)} = -N^{(1)} - \frac{(M^{(2)})^2}{p_1^{(2)} - f_1^{(2)}},$$

$$p_1^{(2)} - f_1^{(2)} = -N^{(2)} - \frac{(M^{(3)})^2}{p_1^{(3)} - f_1^{(3)}},$$

$$p_1^{(3)} - f_1^{(3)} = -N^{(3)} - \frac{(M^{(4)})^2}{p_1^{(4)} - f_1^{(4)}},$$

u. s. w.

$$p_1^{(i-2)} - f_1^{(i-2)} = -N^{(i-2)} - \frac{(M^{(i-1)})^2}{p_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)}},$$

$$p_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)} = -N^{(i-1)} - \frac{(M^{(i)})^2}{p_1^{(i)} - f_1^{(i)}}.$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen ergeben sich aber unmittelbar die beiden folgenden Kettenbrüche:

$$34)\quad p_1^{(i)} - f_1^{(i)} = -\cfrac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)} - \cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)} - \cfrac{(M^{(i-2)})^2}{N^{(i-3)} - \cdots - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)} + \cfrac{(M^{(1)})^2}{p^{(1)} - f^{(1)}}}}}}$$

und

$$35)\quad p^{(1)} - f^{(1)} = -\cfrac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)} - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(2)} - \cfrac{(M^{(3)})^2}{N^{(3)} - \cdots - \cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-1)} + \cfrac{(M^{(i)})^2}{p_1^{(i)} - f_1^{(i)}}}}}}.$$

Auch ist

$$34^*)\quad f_1^{(i)} - p_1^{(i)} = \cfrac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)} - \cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)} - \cfrac{(M^{(i-2)})^2}{N^{(i-3)} - \cdots - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)} - \cfrac{(M^{(1)})^2}{f^{(1)} - p^{(1)}}}}}}$$

und

$$35^*)\quad f^{(1)} - p^{(1)} = \cfrac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)} - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(2)} - \cfrac{(M^{(3)})^2}{N^{(3)} - \cdots - \cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-1)} - \cfrac{(M^{(i)})^2}{f_1^{(i)} - p_1^{(i)}}}}}}.$$

Jeder dieser beiden Kettenbrüche besteht aus i, d. h. gerade aus eben so vielen Gliedern, als das System Linsen enthält. Zur Entwickelung derselben ist nur die Berechnung der Moduli

$$M^{(1)},\ M^{(2)},\ M^{(3)},\ M^{(4)},\ \ldots\ M^{(i)}$$

der einzelnen Linsen, und der oben durch

$$N^{(1)},\ N^{(2)},\ N^{(3)},\ N^{(4)},\ \ldots\ N^{(i-1)}$$

bezeichneten, von den Entfernungen der einzelnen Linsen von einander abhängenden Grössen erforderlich, welche, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, keiner Schwierigkeit unterliegt.

Bezeichnen wir bei unserem aus i Linsen bestehenden Systeme die Werthe, welche die Grössen $p_1^{(i)}$, $p^{(1)}$ erhalten, wenn respective $p^{(1)}$, $p_1^{(i)}$ unendlich werden, respective durch $F_1^{(i)}$, $F^{(i)}$; so ist nach 34) und 35) offenbar

$$36)\quad F_1^{(i)} - f_1^{(i)} = -\cfrac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)} - \cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)} - \cfrac{(M^{(i-2)})^2}{N^{(i-3)} - \cdots - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)}}}}}$$

und

$$37)\quad F^{(i)} - f^{(1)} = -\cfrac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)} - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(2)} - \cfrac{(M^{(3)})^2}{N^{(3)} - \cdots - \cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-1)}}}}},$$

wo jeder Kettenbruch nur aus $i-1$ Gliedern besteht.

§. 6.

Für ein Glas ist offenbar

$$f^{(1)} = F^{(1)}, \quad f_1^{(1)} = F_1^{(1)}$$

und daher nach 18)

$$38) \quad (p^{(1)} - F^{(1)})(p_1^{(1)} - F_1^{(1)}) = (M^{(1)})^2.$$

Für ein aus zwei Gläsern bestehendes System ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$p_1^{(2)} - f_1^{(2)} = -\frac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)} + \dfrac{(M^{(1)})^2}{p^{(1)} - f^{(1)}}}, \quad p^{(1)} - f^{(1)} = -\frac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)} + \dfrac{(M^{(2)})^2}{p_1^{(2)} - f_1^{(2)}}}$$

und

$$F_1^{(2)} - f_1^{(2)} = -\frac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)}}, \quad F^{(2)} - f^{(1)} = -\frac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)}}.$$

Aus der ersten, dritten und vierten Gleichung folgt:

$$p_1^{(2)} - f_1^{(2)} = \frac{N^{(1)}(F_1^{(2)} - f_1^{(2)})}{N^{(1)} + \dfrac{(M^{(1)})^2}{p^{(1)} - f^{(1)}}} = \frac{F_1^{(2)} - f_1^{(2)}}{1 + \dfrac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)}} \cdot \dfrac{1}{p^{(1)} - f^{(1)}}}$$

$$= \frac{F_1^{(2)} - f_1^{(2)}}{1 - \dfrac{F^{(2)} - f^{(1)}}{p^{(1)} - f^{(1)}}} = \frac{(F_1^{(2)} - f_1^{(2)})(p^{(1)} - f^{(1)})}{p^{(1)} - F^{(2)}};$$

und eben so ergiebt sich aus der zweiten, dritten und vierten Gleichung:

$$p^{(1)} - f^{(1)} = \frac{N^{(1)}(F^{(2)} - f^{(1)})}{N^{(1)} + \dfrac{(M^{(2)})^2}{p_1^{(2)} - f_1^{(2)}}} = \frac{F^{(2)} - f^{(1)}}{1 + \dfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)}} \cdot \dfrac{1}{p_1^{(2)} - f_1^{(2)}}}$$

$$= \frac{F^{(2)} - f^{(1)}}{1 - \dfrac{F_1^{(2)} - f_1^{(2)}}{p_1^{(2)} - f_1^{(2)}}} = \frac{(F^{(2)} - f^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)})}{p_1^{(2)} - F_1^{(2)}}.$$

Also hat man jetzt die beiden folgenden Gleichungen:

$$39) \begin{cases} (F_1^{(2)} - f_1^{(2)})(p^{(1)} - f^{(1)}) = (p^{(1)} - F^{(2)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)}), \\ (p_1^{(2)} - F_1^{(2)})(p^{(1)} - f^{(1)}) = (F^{(2)} - f^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)}); \end{cases}$$

aus denen sich durch Division

Digitized by Google

$$\frac{F_1{}^{(2)} - f_1{}^{(2)}}{p_1{}^{(2)} - F_1{}^{(2)}} = \frac{p^{(1)} - F^{(2)}}{F^{(2)} - f^{(1)}}$$

oder

$$40)\quad (p^{(1)} - F^{(2)})(p_1{}^{(2)} - F_1{}^{(2)}) = (f^{(1)} - F^{(2)})(f_1{}^{(2)} - F_1{}^{(2)})$$

ergiebt. Weil nun aber nach dem Obigen offenbar

$$(f^{(1)} - F^{(2)})(f_1{}^{(2)} - F_1{}^{(2)}) = \left\{\frac{M^{(1)}M^{(2)}}{N^{(1)}}\right\}^2$$

ist, so ist auch

$$41)\quad (p^{(1)} - F^{(2)})(p_1{}^{(2)} - F_1{}^{(2)}) = \left\{\frac{M^{(1)}M^{(2)}}{N^{(1)}}\right\}^2.$$

Aus 38) und 41) sieht man, dass für ein Glas das Product

$$(p^{(1)} - F^{(1)})(p_1{}^{(1)} - F_1{}^{(1)}),$$

für ein System von zwei Gläsern das ganz ähnliche Product

$$(p^{(1)} - F^{(2)})(p_1{}^{(2)} - F_1{}^{(2)})$$

einem constanten Quadrate gleich ist, und es frägt sich nun, ob dieser allerdings sehr merkwürdige Satz allgemein für jedes beliebige Linsensystem als gültig betrachtet werden kann.

Um hierüber zu einer bestimmten Entscheidung zu gelangen, wollen wir den Satz für ein System von $i-1$ Gläsern als gültig annehmen, und untersuchen, ob derselbe dann auch immer für ein System von i Gläsern gültig sein muss. Denken wir uns nun einen Strahl durch alle i Gläser hindurch gehend, so ist nach der Voraussetzung, wenn $\mathfrak{R}^{(i-1)}$ eine gewisse constante Grösse bezeichnet:

$$42)\quad (p^{(1)} - F^{(i-1)})(p_1{}^{(i-1)} - F_1{}^{(i-1)}) = (\mathfrak{R}^{(i-1)})^2,$$

und für das letzte $i$te Glas ist nach 18)

$$43)\quad (p^{(i)} - f^{(i)})(p_1{}^{(i)} - f_1{}^{(i)}) = (M^{(i)})^2,$$

oder, weil nach 30)

$$p^{(i)} = -E^{(i-1)} - p_1{}^{(i-1)}$$

ist:

$$44)\quad (E^{(i-1)} + p_1{}^{(i-1)} + f^{(i)})(p_1{}^{(i)} - f_1{}^{(i)}) = -(M^{(i)})^2.$$

Lässt man jetzt $p_1{}^{(i)}$ unendlich werden, so geht $p^{(1)}$ in $F^{(i)}$ und $p^{(i)}$ in $f^{(i)}$, also, weil nach 30)

$$p_1{}^{(i-1)} = -E^{(i-1)} - p^{(i)}$$

ist, $p_1{}^{(i-1)}$ in $-E^{(i-1)} - f^{(i)}$ über, und aus der Gleichung 42) erhält man daher, weil die Grösse $\mathfrak{R}^{(i-1)}$ constant ist, die Gleichung:

$$45)\quad (F^{(i)} - F^{(i-1)})(E^{(i-1)} + F_1{}^{(i-1)} + f^{(i)}) = -(\mathfrak{R}^{(i-1)})^2.$$

Digitized by Google

Lässt man aber $p^{(1)}$ unendlich werden, so gehen offenbar $p_1^{(i-1)}$ und $p_1^{(i)}$ in $F_1^{(i-1)}$ und $F_1^{(i)}$ über, und aus der Gleichung 44) erhält man daher, weil die Grösse $M^{(i)}$ constant ist, die Gleichung:

$$46)\quad (E^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}+f^{(i)})(F_1^{(i)}-f_1^{(i)})=-(M^{(i)})^2.$$

Aus den Gleichungen 42) und 45) erhält man:

$$p^{(1)}=F^{(i-1)}+\frac{(\mathfrak{K}^{(i-1)})^2}{p_1^{(i-1)}-F_1^{(i-1)}},$$

$$F^{(i)}=F^{(i-1)}-\frac{(\mathfrak{K}^{(i-1)})^2}{E^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}+f^{(i)}};$$

und aus den Gleichungen 44) und 46) ergiebt sich:

$$p_1^{(i)}=f_1^{(i)}-\frac{(M^{(i)})^2}{E^{(i-1)}+p_1^{(i-1)}+f^{(i)}},$$

$$F_1^{(i)}=f_1^{(i)}-\frac{(M^{(i)})^2}{E^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}+f^{(i)}}.$$

Also ist, wie man durch Subtraction leicht findet:

$$p^{(1)}-F^{(i)}=\frac{E^{(i-1)}+p_1^{(i-1)}+f^{(i)}}{(p_1^{(i-1)}-F_1^{(i-1)})\,(E^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}+f^{(i)})}(\mathfrak{K}^{(i-1)})^2,$$

$$p_1^{(i)}-F_1^{(i)}=\frac{p_1^{(i-1)}-F_1^{(i-1)}}{(E^{(i-1)}+p_1^{(i-1)}+f^{(i)})(E^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}+f^{(i)})}(M^{(i)})^2;$$

woraus sich durch Multiplication auf der Stelle

$$47)\quad (p^{(1)}-F^{(i)})(p_1^{(i)}-F_1^{(i)})=\left\{\frac{\mathfrak{K}^{(i-1)}M^{(i)}}{E^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}+f^{(i)}}\right\}^2,$$

oder, weil nach 33)

$$E^{(i-1)}+f^{(i)}=N^{(i-1)}-f_1^{(i-1)}$$

ist,

$$48)\quad (p^{(1)}-F^{(i)})(p_1^{(i)}-F_1^{(i)})=\left\{\frac{\mathfrak{K}^{(i-1)}M^{(i)}}{N^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}-f_1^{(i-1)}}\right\}^2$$

ergiebt.

Hieraus sieht man, dass der Satz, von welchem oben die Rede gewesen ist, für ein aus i Linsen bestehendes System gilt, wenn er für ein aus $i-1$ Linsen bestehendes System gilt, und daher allgemein gültig ist, weil er oben für eine Linse und ein aus zwei Linsen bestehendes System schon als richtig erkannt worden ist.

Zugleich hat sich bei der vorhergehenden Betrachtung, wenn allgemein

$$49)\quad (p^{(1)}-F^{(i)})(p_1^{(i)}-F_1^{(i)})=(\mathfrak{K}^{(i)})^2$$

gesetzt wird, die bemerkenswerthe Relation

$$50)\quad \mathfrak{K}^{(i)} = \frac{\mathfrak{K}^{(i-1)}M^{(i)}}{E^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}+f^{(i)}} = \frac{\mathfrak{K}^{(i-1)}M^{(i)}}{N^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}-f_1^{(i-1)}}$$

ergeben, mit deren Hülfe wir nun einen independenten Ausdruck der Grösse $\mathfrak{K}^{(i)}$ aufzufinden versuchen wollen.

Bei dieser Untersuchung wollen wir

$$51)\quad \frac{\mathfrak{Z}^{(i)}}{\mathfrak{N}^{(i)}} = N^{(i)} - \cfrac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)} - \cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)} - \cdots - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)}}}}$$

und zugleich

$$52)\quad \frac{\mathfrak{Z}^{(0)}}{\mathfrak{N}^{(0)}} = \frac{1}{0},\quad \frac{\mathfrak{Z}^{(1)}}{\mathfrak{N}^{(1)}} = \frac{N^{(1)}}{1}$$

setzen, d. h. Zähler und Nenner des dem Kettenbruche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Gleichung 51) gleichen gemeinen Bruchs durch $\mathfrak{Z}^{(i)}$ und $\mathfrak{N}^{(i)}$ bezeichnen, und

$$\mathfrak{Z}^{(0)} = 1,\ \mathfrak{N}^{(0)} = 0;\ \mathfrak{Z}^{(1)} = N^{(1)},\ \mathfrak{N}^{(1)} = 1$$

setzen.

Weil wegen der Gleichung 51) offenbar

$$\frac{\mathfrak{Z}^{(i)}}{\mathfrak{N}^{(i)}} = N^{(i)} - (M^{(i)})^2 \cdot \frac{\mathfrak{N}^{(i-1)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}} = \frac{N^{(i)}.\mathfrak{Z}^{(i-1)} - (M^{(i)})^2.\mathfrak{N}^{(i-1)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}}$$

ist, so haben wir die beiden folgenden Relationen:

$$53)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}^{(i)} = N^{(i)}.\mathfrak{Z}^{(i-1)} - (M^{(i)})^2.\mathfrak{N}^{(i-1)}, \\ \mathfrak{N}^{(i)} = \mathfrak{Z}^{(i-1)}; \end{cases}$$

welche wegen der Gleichungen 52) offenbar auch noch für $i=1$ und $i=2$ gelten.

Weil nun nach 38) und 41) offenbar

$$\mathfrak{K}^{(1)} = M^{(1)},\quad \mathfrak{K}^{(2)} = \frac{M^{(1)}M^{(2)}}{N^{(1)}}$$

ist, so ist nach 52)

$$\mathfrak{K}^{(1)} = \frac{M^{(1)}}{\mathfrak{Z}^{(0)}},\quad \mathfrak{K}^{(2)} = \frac{M^{(1)}M^{(2)}}{\mathfrak{Z}^{(1)}}.$$

Weil nach 36)

$$N^{(i-1)}+F_1{}^{(i-1)}-f_1{}^{(i-1)}=N^{(i-1)}-\cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)}-\cfrac{(M^{(i-2)})^2}{N^{(i-3)}-\cdots \, -\cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)}}}},$$

d. i. nach 51)

$$N^{(i-1)}+F_1{}^{(i-1)}-f_1{}^{(i-1)}=\frac{\mathfrak{Z}^{(i-1)}}{\mathfrak{N}^{(i-1)}}$$

ist, so ist nach 50)

$$\mathfrak{K}^{(i)}=\frac{\mathfrak{K}^{(i-1)}\mathfrak{N}^{(i-1)}M^{(i)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}},$$

und folglich, weil nach der zweiten der Relationen 53)

$$\mathfrak{N}^{(i-1)}=\mathfrak{Z}^{(i-2)}$$

ist:

$$\mathfrak{K}^{(i)}=\frac{\mathfrak{K}^{(i-1)}\mathfrak{Z}^{(i-2)}M^{(i)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}}.$$

Also ist

$$\mathfrak{K}^{(1)}=\frac{M^{(1)}}{\mathfrak{Z}^{(0)}},$$

$$\mathfrak{K}^{(2)}=\frac{\mathfrak{K}^{(1)}\mathfrak{Z}^{(0)}M^{(2)}}{\mathfrak{Z}^{(1)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}}{\mathfrak{Z}^{(1)}},$$

$$\mathfrak{K}^{(3)}=\frac{\mathfrak{K}^{(2)}\mathfrak{Z}^{(1)}M^{(3)}}{\mathfrak{Z}^{(2)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}}{\mathfrak{Z}^{(2)}},$$

$$\mathfrak{K}^{(4)}=\frac{\mathfrak{K}^{(3)}\mathfrak{Z}^{(2)}M^{(4)}}{\mathfrak{Z}^{(3)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}}{\mathfrak{Z}^{(3)}},$$

$$\mathfrak{K}^{(5)}=\frac{\mathfrak{K}^{(4)}\mathfrak{Z}^{(3)}M^{(5)}}{\mathfrak{Z}^{(4)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}M^{(5)}}{\mathfrak{Z}^{(4)}},$$

u. s. w.

und folglich allgemein

$$54)\quad \mathfrak{K}^{(i)}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}},$$

oder wegen der zweiten der Gleichungen 53):

$$55)\quad \mathfrak{K}^{(i)}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{N}^{(i)}}.$$

Nach 49) ist also

$$56)\quad (p^{(1)}-F^{(i)})(p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)})=\left\{\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}}\right\}^2$$

oder

$$57)\quad (p^{(1)}-F^{(i)})(p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)})=\left\{\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{N}^{(i)}}\right\}^2.$$

Die Grössen $\mathfrak{Z}^{(i-1)}$ und $\mathfrak{N}^{(i)}$ können nach den aus der Theorie der Kettenbrüche bekannten Regeln immer leicht berechnet werden.

§. 7.

Nach 19) hat man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{q^{(1)}}{q_1{}^{(1)}}=\frac{p^{(1)}-f^{(1)}}{M^{(1)}}=\frac{M^{(1)}}{p_1{}^{(1)}-f_1{}^{(1)}},$$

$$\frac{q^{(2)}}{q_1{}^{(2)}}=\frac{p^{(2)}-f^{(2)}}{M^{(2)}}=\frac{M^{(2)}}{p_1{}^{(2)}-f_1{}^{(2)}},$$

$$\frac{q^{(3)}}{q_1{}^{(3)}}=\frac{p^{(3)}-f^{(3)}}{M^{(3)}}=\frac{M^{(3)}}{p_1{}^{(3)}-f_1{}^{(3)}},$$

u. s. w.

$$\frac{q^{(i)}}{q_1{}^{(i)}}=\frac{p^{(i)}-f^{(i)}}{M^{(i)}}=\frac{M^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)}};$$

aus denen sich, weil offenbar

$$q_1{}^{(1)}=q^{(2)},\ q_1{}^{(2)}=q^{(3)},\ q_1{}^{(3)}=q^{(4)},\ \ldots.\ q_1{}^{(i-1)}=q^{(i)}$$

ist, durch Multiplication auf der Stelle die beiden Gleichungen

$$58)\quad \frac{q^{(1)}}{q_1{}^{(i)}}=\frac{(p^{(1)}-f^{(1)})(p^{(2)}-f^{(2)})(p^{(3)}-f^{(3)})\ldots.(p^{(i)}-f^{(i)})}{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots.M^{(i)}}$$

und

$$59)\quad \frac{q^{(1)}}{q_1{}^{(i)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots.M^{(i)}}{(p_1{}^{(1)}-f_1{}^{(1)})(p_1{}^{(2)}-f_1{}^{(2)})(p_1{}^{(3)}-f_1{}^{(3)})\ldots.(p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)})}$$

ergeben, woraus dann ferner auch

$$60)\quad \left(\frac{q^{(1)}}{q_1{}^{(i)}}\right)^2=\frac{(p^{(1)}-f^{(1)})(p^{(2)}-f^{(2)})(p^{(3)}-f^{(3)})\ldots.(p^{(i)}-f^{(i)})}{(p_1{}^{(1)}-f_1{}^{(1)})(p_1{}^{(2)}-f_1{}^{(2)})(p_1{}^{(3)}-f_1{}^{(3)})\ldots.(p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)})}$$

folgt.

Wenn man nun einige der Grössen

$$p_1^{(1)}-f_1^{(1)},$$
$$(p_1^{(1)}-f_1^{(1)})(p_1^{(2)}-f_1^{(2)}),$$
$$(p_1^{(1)}-f_1^{(1)})(p_1^{(2)}-f_1^{(2)})(p_1^{(3)}-f_1^{(3)}),$$
$$(p_1^{(1)}-f_1^{(1)})(p_1^{(2)}-f_1^{(2)})(p_1^{(3)}-f_1^{(3)})(p_1^{(4)}-f_1^{(4)}),$$

u. s. w.

vom Anfange an mit Hülfe der Gleichungen 18) und 36) entwickelt und durch $p^{(1)}-f^{(1)}$ ausdrückt, wobei man am Leichtesten rechnet, wenn man jedes dieser Producte für sich, unabhängig von den vorbergehenden, und mit der Multiplication der einzelnen Factoren in einander von Hinten anfangend, entwickelt; so bemerkt man sehr bald das allgemeine Gesetz, dass sich das Product

$$(p_1^{(1)}-f_1^{(1)})(p_1^{(2)}-f_1^{(2)})(p_1^{(3)}-f_1^{(3)})\ldots.(p_1^{(i)}-f_1^{(i)})$$

durch einen Ausdruck von der Form

$$(-1)^{i-1}\cdot\frac{(M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots.M^{(i)})^2}{G^{(i)}+H^{(i)}(p^{(1)}-f^{(1)})},$$

wo $G^{(i)}$ und $H^{(i)}$ zwei bloss von

$$M^{(1)},\ M^{(2)},\ \ldots.\ M^{(i-1)};\ N^{(1)},\ N^{(2)},\ \ldots.\ N^{(i-1)}$$

abhängende Grössen bezeichnen, darstellen lässt.

Um die allgemeine Richtigkeit dieses durch Induction gefundenen Gesetzes zu prüfen, wollen wir untersuchen, ob dasselbe unter der Voraussetzung, dass es bis $i-1$ gültig sei, auch immer bis i gelten müsse. Der Annahme zufolge ist also

$$(p_1^{(1)}-f_1^{(1)})(p_1^{(2)}-f_1^{(2)})(p_1^{(3)}-f_1^{(3)})\ldots.(p_1^{(i-2)}-f_1^{(i-2)})$$
$$=(-1)^{i-3}\cdot\frac{(M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}\ldots.M^{(i-2)})^2}{G^{(i-2)}+H^{(i-2)}(p^{(1)}-f^{(1)})}$$

und

$$(p_1^{(1)}-f_1^{(1)})(p_1^{(2)}-f_1^{(2)})(p_1^{(3)}-f_1^{(3)})\ldots.(p_1^{(i-1)}-f_1^{(i-1)})$$
$$=(-1)^{i-2}\cdot\frac{(M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}\ldots.M^{(i-1)})^2}{G^{(i-1)}+H^{(i-1)}(p^{(1)}-f^{(1)})},$$

folglich, wie sich hieraus durch Division ergiebt:

$$p_1^{(i-1)}-f_1^{(i-1)}=-(M^{(i-1)})^2\cdot\frac{G^{(i-2)}+H^{(i-2)}(p^{(1)}-f^{(1)})}{G^{(i-1)}+H^{(i-1)}(p^{(1)}-f^{(1)})}.$$

Nun ist aber nach 31)

$$p_1^{(i)}-f_1^{(i)}=-\frac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)}+(p_1^{(i-1)}-f_1^{(i-1)})},$$

und folglich mittelst des Vorhergehenden nach gehöriger Substitution, wenn wir der Kürze wegen

$$61)\quad \begin{cases} G^{(i)} = G^{(i-1)}N^{(i-1)} - G^{(i-2)}(M^{(i-1)})^2, \\ H^{(i)} = H^{(i-1)}N^{(i-1)} - H^{(i-2)}(M^{(i-1)})^2 \end{cases}$$

setzen:

$$p_1^{(i)} - f_1^{(i)} = -(M^{(i)})^2 \cdot \frac{G^{(i-1)} + H^{(i-1)}(p^{(1)} - f^{(1)})}{G^{(i)} + H^{(i)}(p^{(1)} - f^{(1)})}.$$

Also ist nach dem Obigen, wie man durch Multiplication dieser Gleichung mit der zweiten der beiden Gleichungen, von denen wir ausgegangen sind, sogleich findet:

$$62)\quad (p_1^{(1)} - f_1^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)})(p_1^{(3)} - f_1^{(3)}) \ldots . (p_1^{(i)} - f_1^{(i)})$$
$$= (-1)^{i-1} \cdot \frac{(M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)} \ldots . M^{(i)})^2}{G^{(i)} + H^{(i)}(p^{(1)} - f^{(1)})},$$

und die Allgemeinheit des bemerkten Gesetzes ist folglich hierdurch offenbar bewiesen. Zugleich haben wir die in den Gleichungen 61) ausgesprochenen Gesetze der Abhängigkeit der Grössen

$$G^{(1)},\ G^{(2)},\ G^{(3)},\ G^{(4)},\ \ldots .\ G^{(i)}$$

und

$$H^{(1)},\ H^{(2)},\ H^{(3)},\ H^{(4)},\ \ldots .\ H^{(i)}$$

von einander entdeckt.

Aus den Gleichungen 59) und 62) ergiebt sich nun aber sogleich

$$63)\quad \frac{q^{(1)}}{q_1^{(i)}} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{G^{(i)} + H^{(i)}(p^{(1)} - f^{(1)})}{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)} \ldots . M^{(i)}}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist, wie man leicht findet:

$$G^{(1)} = 0,$$
$$G^{(2)} = (M^{(1)})^2,$$
$$G^{(3)} = G^{(2)}N^{(2)} - G^{(1)}(M^{(2)})^2,$$
$$G^{(4)} = G^{(3)}N^{(3)} - G^{(2)}(M^{(3)})^2,$$
$$G^{(5)} = G^{(4)}N^{(4)} - G^{(3)}(M^{(4)})^2,$$

u. s. w.

und

$$H^{(1)} = 1,$$
$$H^{(2)} = N^{(1)},$$
$$H^{(3)} = H^{(2)}N^{(2)} - H^{(1)}(M^{(2)})^2,$$
$$H^{(4)} = H^{(3)}N^{(3)} - H^{(2)}(M^{(3)})^2,$$
$$H^{(5)} = H^{(4)}N^{(4)} - H^{(3)}(M^{(4)})^2,$$

u. s. w.

Setzt man nun überhaupt

$$64)\quad \frac{\mathfrak{Z}_1^{(i+1)}}{\mathfrak{N}_1^{(i+1)}} = \cfrac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)} - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(2)} - \cfrac{(M^{(3)})^2}{N^{(3)} - \cdots - \cfrac{(M^{(i)})^2}{N^{(i)}}}}}$$

und ausserdem zugleich

$$65)\quad \mathfrak{Z}_1^{(1)} = 0,\ \mathfrak{N}_1^{(1)} = 1;$$

so ist nach einem allgemein bekannten Satze von den Kettenbrüchen:

$$\mathfrak{Z}_1^{(1)} = 0,$$
$$\mathfrak{Z}_1^{(2)} = (M^{(1)})^2,$$
$$\mathfrak{Z}_1^{(3)} = \mathfrak{Z}_1^{(2)}N^{(2)} - \mathfrak{Z}_1^{(1)}(M^{(2)})^2,$$
$$\mathfrak{Z}_1^{(4)} = \mathfrak{Z}_1^{(3)}N^{(3)} - \mathfrak{Z}_1^{(2)}(M^{(3)})^2,$$
$$\mathfrak{Z}_1^{(5)} = \mathfrak{Z}_1^{(4)}N^{(4)} - \mathfrak{Z}_1^{(3)}(M^{(4)})^2,$$

u. s. w.

und

$$\mathfrak{N}_1^{(1)} = 1,$$
$$\mathfrak{N}_1^{(2)} = N^{(1)},$$
$$\mathfrak{N}_1^{(3)} = \mathfrak{N}_1^{(2)}N^{(2)} - \mathfrak{N}_1^{(1)}(M^{(2)})^2,$$
$$\mathfrak{N}_1^{(4)} = \mathfrak{N}_1^{(3)}N^{(3)} - \mathfrak{N}_1^{(2)}(M^{(3)})^2,$$
$$\mathfrak{N}_1^{(5)} = \mathfrak{N}_1^{(4)}N^{(4)} - \mathfrak{N}_1^{(3)}(M^{(4)})^2,$$

u. s. w.

Vergleicht man dies mit dem Vorhergehenden, so ergiebt sich auf der Stelle

$$G^{(i)} = \mathfrak{Z}_1^{(i)},\ H^{(i)} = \mathfrak{N}_1^{(i)};$$

Digitized by Google

also nach 63)

$$66)\quad \frac{q^{(1)}}{q_1^{(i)}} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{Q}_1^{(i)} + \mathfrak{R}_1^{(i)}(p^{(1)} - f^{(1)})}{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)} \ldots . M^{(i)}},$$

mittelst welcher Formel sich das Verhältniss $\frac{q^{(1)}}{q_1^{(i)}}$ berechnen und auch beurtheilen lässt, ob $q^{(1)}$ und $q_1^{(i)}$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

§. 8.

Nach 42) und 45), und nach 43) und 46) haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$(p^{(1)} - F^{(i-1)})(p_1^{(i-1)} - F_1^{(i-1)})$$
$$= -(F^{(i)} - F^{(i-1)})(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})$$

und

$$(p^{(i)} - f^{(i)})(p_1^{(i)} - f_1^{(i)})$$
$$= -(F_1^{(i)} - f_1^{(i)})(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)}),$$

oder die beiden Proportionen:

$$p^{(1)} - F^{(i-1)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})$$
$$= F^{(i)} - F^{(i-1)} : p_1^{(i-1)} - F_1^{(i-1)}$$

und

$$p_1^{(i)} - f_1^{(i)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})$$
$$= F_1^{(i)} - f_1^{(i)} : p^{(i)} - f^{(i)};$$

aus denen sich nach einem bekannten Satze von den Proportionen die beiden folgenden Proportionen ergeben:

$$p^{(1)} - F^{(i-1)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})$$
$$= p^{(1)} - F^{(i)} \ : -(E^{(i-1)} + p_1^{(i-1)} + f^{(i)})$$

und

$$p_1^{(i)} - f_1^{(i)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})$$
$$= p_1^{(i)} - F_1^{(i)} : -(E^{(i-1)} + p^{(i)} + F_1^{(i-1)}).$$

Weil nun aber nach 30)

$$E^{(i-1)} + p_1^{(i-1)} = -p^{(i)},\quad E^{(i-1)} + p^{(i)} = -p_1^{(i-1)}$$

ist, so werden die beiden vorhergehenden Proportionen:

$$p^{(1)} - F^{(i-1)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)}) = p^{(1)} - F^{(i)} : p^{(i)} - f^{(i)},$$
$$p_1^{(i)} - f_1^{(i)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)}) = p_1^{(i)} - F_1^{(i)} : p_1^{(i-1)} - F_1^{(i-1)};$$

und führen durch Division zu der Proportion

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i-1)}}{p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)}}:1=\frac{p^{(1)}-F^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)}}:\frac{p^{(i)}-f^{(i)}}{p_1{}^{(i-1)}-F_1{}^{(i-1)}},$$

woraus sich die Gleichung

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)}}=\frac{p^{(1)}-F^{(i-1)}}{p_1{}^{(i-1)}-F_1{}^{(i-1)}}\cdot\frac{p^{(i)}-f^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)}}$$

ergiebt. Daher hat man jetzt die folgenden Gleichungen:

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)}}=\frac{p^{(1)}-F^{(i-1)}}{p_1{}^{(i-1)}-F_1{}^{(i-1)}}\cdot\frac{p^{(i)}-f^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)}},$$

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i-1)}}{p_1{}^{(i-1)}-F_1{}^{(i-1)}}=\frac{p^{(1)}-F^{(i-2)}}{p_1{}^{(i-2)}-F_1{}^{(i-2)}}\cdot\frac{p^{(i-1)}-f^{(i-1)}}{p_1{}^{(i-1)}-f_1{}^{(i-1)}},$$

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i-2)}}{p_1{}^{(i-2)}-F_1{}^{(i-2)}}=\frac{p^{(1)}-F^{(i-3)}}{p_1{}^{(i-3)}-F_1{}^{(i-3)}}\cdot\frac{p^{(i-2)}-f^{(i-2)}}{p_1{}^{(i-2)}-f_1{}^{(i-2)}},$$

u. s. w.

$$\frac{p^{(1)}-F^{(2)}}{p_1{}^{(2)}-F_1{}^{(2)}}=\frac{p^{(1)}-F^{(1)}}{p_1{}^{(1)}-F_1{}^{(1)}}\cdot\frac{p^{(2)}-f^{(2)}}{p_1{}^{(2)}-f_1{}^{(2)}},$$

$$\frac{p^{(1)}-F^{(1)}}{p_1{}^{(1)}-F_1{}^{(1)}}=\frac{p^{(1)}-f^{(1)}}{p_1{}^{(1)}-f_1{}^{(1)}}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen, und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man:

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)}}$$

$$=\frac{(p^{(1)}-f^{(1)})\,(p^{(2)}-f^{(2)})\,(p^{(3)}-f^{(3)})\,\ldots\,(p^{(i)}-f^{(i)})}{(p_1{}^{(1)}-f_1{}^{(1)})\,(p_1{}^{(2)}-f_1{}^{(2)})\,(p_1{}^{(3)}-f_1{}^{(3)})\,\ldots\,(p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)})}.$$

Also ist nach 60)

$$67)\quad\left(\frac{q^{(1)}}{q_1{}^{(i)}}\right)^2=\frac{p^{(1)}-F^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)}}.$$

XI.

Bemerkungen zu zwei Abhandlungen in diesem Archiv in Betreff der Steinerschen Sätze über die conischen Sechsecke und Sechsseite.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Im dritten Bande des Archivs beweist Herr Dr. Schlömilch einige Sätze über die conischen Sechsecke und Sechsseite, welche Herr Adams im dritten Hefte des fünften Bandes wieder aufnimmt; allein es scheint mir, als hätten beide den Inhalt dieser Sätze verkannt. Je mehr die mathematischen Wissenschaften in den neuesten Zeiten materiell an Umfang gewinnen, um desto dringender wird auch die Pflicht des Mathematikers, den gewonnenen Stoff in eine übersichtliche Ordnung zu bringen und das Zusammengehörige aneinanderzureihen. Aus dieser Rücksicht wird es den Lesern des Archivs vielleicht nicht unwillkommen sein, noch einen andern Gesichtspunkt für die fraglichen Sätze kennen zu lernen. Es sind die folgenden.

Ister Lehrsatz. „In einem conischen Sechseck $ABCDEF$ wird jede der drei Hauptdiagonalen AD, BE, CF von den beiden nicht anliegenden Seiten des Sechsecks in zwei neuen Punkten geschnitten, so dass man zusammen sechs neue Punkte M', N', P'; M'', N'' P'' erhält. Von diesen sechs Punkten liegen die ersten drei, nämlich M', N', P', auf einer Geraden, und die drei andern M'', N'', P'' auf einer andern Geraden."

Beweis. Die Punkte

$$\left.\begin{matrix} M' \\ N' \\ P' \end{matrix}\right\} \text{ sind die Durchschnittspunkte der Hauptdiagonalen } \left\{\begin{matrix} CF \\ AD \\ BE \end{matrix}\right. \text{ mit den Seiten } \left\{\begin{matrix} AB \\ EF \\ CD \end{matrix}\right.$$

Sie sind folglich die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten des conischen Sechsecks

$$ADCFEB.$$

Folglich (Pascalscher Satz) liegen sie in einer Geraden.

Ebenso sind die Punkte

$$\left.\begin{matrix}M''\\N''\\P''\end{matrix}\right\}\text{ die Durchschnitte der Hauptdiagonalen }\left\{\begin{matrix}CF\\AD\\BE\end{matrix}\right.\text{ mit den Seiten }\left\{\begin{matrix}DE\\BC\\AF\end{matrix}\right.$$

Sie sind folglich die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten des conischen Sechsecks

AFCBED,

folglich liegen sie ebenfalls auf einer Geraden.

Aus dieser Darstellung ersieht man, dass der aufgestellte Satz nicht einmal eine Folgerung aus dem Pascalschen Satz, sondern lediglich der Pascalsche Satz selbst ist.

Ein ähnliches gilt von dem

IIIten Lehrsatze, welcher der polare Gegensatz des vorigen ist und den ich hier nicht zu wiederholen brauche. Er ist lediglich der Brianchonsche Lehrsatz vom conischen Sechsseit.

Um nun zu dem

IIten Lehrsatze nebst seinem polaren Gegensatz zu kommen, wollen wir nach Herrn Plückers Vorgange allgemein das conische Sechseck

ABCDEF

durch das Schema

$$\begin{matrix}A & C & E\\ B & D & F\end{matrix}$$

auffassen, so dass also z. B. das conische Sechseck

ADCFEB

durch das Schema

$$\begin{matrix}A & C & E\\ D & F & B\end{matrix}$$

dargestellt wird. — Wenn wir jetzt noch die Gegenseiten des ursprünglich gegebenen conischen Sechsecks $\begin{matrix}ACE\\BDF\end{matrix}$ verbinden, so erhalten wir drei Durchschnittspunkte M, N, P, welche nach Pascal wieder auf einer Geraden liegen. Nun lautet der zweite Lehrsatz dahin, dass die drei Geraden MNP, $M'N'P'$ und $M''N''P''$ sich in einem Punkte schneiden. Mit Benutzung des obigen Schemas werden wir ihn daher folgendermassen aussprechen können.

Die Pascalschen Linien der drei conischen Sechsecke

$$\begin{matrix}ACE\\BDF\end{matrix}\qquad\begin{matrix}ACE\\DFB\end{matrix}\qquad\begin{matrix}ACE\\FBD\end{matrix}$$

schneiden sich in einem Punkt.

Digitized by Google

In dieser Fassung erkennt man sogleich, dass dieser Satz einen geringen Theil von dem Steinerschen Satze über das conische Sechseck ausmacht, welchen dieser Gelehrte in dem Anhange zu seiner „Entwickelung der Abhängigkeit" gegeben, aber schon viel früher im (wenn ich nicht irre) 18ten Bande der Annalen von Gergonne*) bekannt gemacht hat. Herr Plücker hat ihn vor langer Zeit im 5ten Bande des Crelle'schen Journals bewiesen und derjenige Theil seines Beweises, welcher auf den obigen 11ten Lehrsatz Bezug hat, stimmt ganz mit dem von Herrn Adams dafür gegebenen überein.

Der IVte und Vte Lehrsatz sind wieder nichts weiter, als der Pascalsche und Brianchonsche Lehrsatz. Der erstere läuft z. B. darauf hinaus, dass der Durchschnittspunkt der beiden Gegenseiten AB und DE zur Bestimmung der Pascalschen Linie des Sechsecks

$$\begin{matrix} A\ C\ E \\ B\ D\ F \end{matrix}$$

und auch zur Bestimmung der Pascalschen Linie

$$\begin{matrix} A\ C\ D \\ B\ E\ F \end{matrix}$$

dient, was ohne weiteres aus dem Schema ersichtlich ist. Man kann hinzufügen, dass er auch auf den Pascalschen Linien von

$$\begin{matrix} A\ F\ E \\ B\ D\ C \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} A\ F\ D \\ B\ E\ C \end{matrix}$$

liegt. Zu dem Vten Satze bemerkt Herr Adams, dass er sich auch direct aus dem Brianchonschen Satze ableiten lasse. Er ist, wie ich an seinem reciproken Satze (IV.) gezeigt habe, lediglich der Brianchonsche Satz selbst.

Um den Lesern des Archivs die Mühe des Nachschlagens zu ersparen, will ich noch den Steinerschen Satz über das Sechseck wiederholen, aus welchem man sich dann durch polare Uebertragung den über das Sechsseit bilden kann.

„Das vollständige Sechseck hat 15 Seiten. Diese 15 Seiten schneiden sich ausserdem noch in 45 Punkten. Ist nun das Sechseck einem Kegelschnitte eingeschrieben, so liegen diese 45 Punkte zu dreien auf geraden Linien und zwar dergestalt, dass jeder dieser Punkte vier solchen Geraden zugleich angehört. Die Anzahl dieser Geraden ist daher 60; und sie sind die Pascalschen Linien zu den 60 einfachen Sechsecken, welche man erhält, wenn man die Ecken des vollständigen Sechsecks in allen ihren möglichen verschiedenen 60 Reihefolgen nimmt. Diese 60 Pascalschen Linien schneiden sich zu dreien in einem Punkte, so dass man 20 solcher Punkte erhält. Diese 20 Punkte liegen zu vieren auf geraden Linien, und zwar dergestalt, dass jeder dieser Punkte drei solchen Geraden zugleich angehört und die Anzahl dieser Geraden daher 15 ist."

*) T. XVIII. p. 339.

Welche Relation diese 15 Geraden zu einander haben, hat Herr Steiner bis jetzt unerörtert gelassen, und diese Frage ist es nur noch, welche ihrer Erledigung entgegensieht.

XII.

Einige Bemerkungen über die Rectification und Quadratur des Kreises.

Nach einem Aufsatze des Herrn E. Catalan in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Terquem et Gerono. T. I. Paris. 1842. p. 190. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Wenn wir die Flächen eines in und eines um einen Kreis beschriebenen regulären Vielecks von $2^k n$ Seiten respective durch

$$F_k \text{ und } F'_k$$

bezeichnen, so haben wir nach einem allgemein bekannten Satze die beiden folgenden Gleichungen:

$$1)\quad (F_k)^2 = F_{k-1}F'_{k-1},\; F'_k = \frac{2F_{k-1}F'_{k-1}}{F_{k-1}+F_k};$$

aus denen durch Division

$$2)\quad \frac{(F_k)^2}{F'_k} = \tfrac{1}{2}(F_{k-1}+F_k)$$

folgt.

Aus der zweiten der Gleichungen 1) erhält man:

$$F'_1 = \frac{2F_0 F'_0}{F_0 + F_1},$$

$$F'_2 = \frac{2F_1 F'_1}{F_1 + F_2},$$

$$F'_3 = \frac{2F_2 F'_2}{F_2 + F_3},$$

u. s. w.

$$F'_k = \frac{2F_{k-1} F'_{k-1}}{F_{k-1} + F_k};$$

und folglich, wenn man multiplicirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$3)\quad F'_k = 2^k F'_0 \frac{F_0 F_1 F_2 \ldots . F_{k-1}}{(F_0+F_1)(F_1+F_2)(F_2+F_3)\ldots .(F_{k-1}+F_k)}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 2) und 3) in einander, so erhält man:

$$4)\quad (F_k)^2 = 2^{k-1} F'_0 \frac{F_0 F_1 F_2 \ldots . F_{k-1}}{(F_0+F_1)(F_1+F_2)(F_2+F_3)\ldots .(F_{k-2}+F_{k-1})}.$$

Setzt man hier $k-1$ für k, so ergiebt sich:

$$5)\quad (F_{k-1})^2 = 2^{k-2} F'_0 \frac{F_0 F_1 F_2 \ldots . F_{k-2}}{(F_0+F_1)(F_1+F_2)(F_2+F_3)\ldots .(F_{k-3}+F_{k-2})}.$$

Dividirt man nun 4) durch 5), so kommt:

$$6)\quad (F_k)^2 = \frac{2(F_{k-1})^2}{F_{k-2} + F_{k-1}}\ ^{*}),$$

was man auch leicht in Worten aussprechen kann.

Man kann diese Gleichung aber auch auf folgende Art ausdrücken:

$$7)\quad \left(\frac{F_{k-1}}{F_k}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{F_{k-2}}{F_{k-1}}\right),$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man

$$8)\quad F_k = \frac{2^k}{\mathfrak{g}_k}$$

setzt, ferner die Gleichung:

$$9)\quad \left(\frac{\mathfrak{g}_k}{\mathfrak{g}_{k-1}}\right)^2 = 2 + \frac{\mathfrak{g}_{k-1}}{\mathfrak{g}_{k-2}}.$$

---

*) Sollte sich nicht eine ähnliche bemerkenswerthe Relation bloss zwischen den Flächenräumen der um den Kreis beschriebenen regulären Vielecke finden lassen?

Setzt man dagegen

$$10)\quad F_k = 2^k \Phi_k\,,$$

so erhält man

$$11)\quad (\Phi_k)^2 = \frac{(\Phi_{k-1})^2}{\Phi_{k-2} + 2\Phi_{k-1}}.$$

Gehen wir vom eingeschriebenen regulären Vierecke aus, und setzen folglich $n = 4$, so ist, wenn der Halbmesser des Kreises als Einheit angenommen wird, offenbar

$$F_0 = 2,\quad F'_0 = 4;$$

also nach der ersten der Gleichungen 1):

$$(F_1)^2 = F_0 F'_0 = 8,\quad F_1 = 2\sqrt{2}.$$

Folglich ist nach 8)

$$\mathfrak{F}_0 = \tfrac{1}{2},\ \mathfrak{F}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_0} = \sqrt{2};$$

und man erhält also mit Hülfe der Gleichung 9) überhaupt die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_0} = \sqrt{2},$$
$$\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{F}_1} = \sqrt{(2+\sqrt{2})},$$
$$\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{F}_2} = \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})},$$
$$\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{F}_3} = \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})},$$
$$\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{F}_4} = \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})})},$$

u. s. w.

Bezeichnet man nun aber die Grössen auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen der Kürze wegen nach der Reihe durch

$$f_1(2),\ f_2(2),\ f_3(2),\ f_4(2),\ \ldots;$$

so ist, wie man leicht findet:

$$\mathfrak{F}_1 = \tfrac{1}{2} f_1(2),$$
$$\mathfrak{F}_2 = \tfrac{1}{2} f_1(2) f_2(2),$$
$$\mathfrak{F}_3 = \tfrac{1}{2} f_1(2) f_2(2) f_3(2),$$
$$\mathfrak{F}_4 = \tfrac{1}{2} f_1(2) f_2(2) f_3(2) f_4(2),$$
$$\mathfrak{F}_5 = \tfrac{1}{2} f_1(2) f_2(2) f_3(2) f_4(2) f_5(2),$$

u. s. w.

Digitized by Google

und folglich nach 8), wenn wir der Kürze wegen

$$12)\quad \frac{2}{f_k(2)}=\varphi_k(2)$$

setzen:

$$13)\quad \begin{cases} F_1=2\varphi_1(2), \\ F_2=2\varphi_1(2)\varphi_2(2), \\ F_3=2\varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2), \\ F_4=2\varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2)\varphi_4(2), \\ F_5=2\varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2)\varphi_4(2)\varphi_5(2), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Gränze, welcher F_k sich nähert, wenn k in's Unendliche wächst, durch F_∞, so ist bekanntlich, wenn π wie gewöhnlich die halbe Peripherie des Kreises bezeichnet:

$$14)\quad \pi=F_\infty.$$

Bezeichnen wir also die Gränze, welcher das Product

$$\varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2)\varphi_4(2)\ldots\varphi_k(2)$$

sich nähert, wenn k in's Unendliche wächst, durch

$$\varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2)\varphi_4(2)\ldots\varphi_\infty(2);$$

so ist nach 13)

$$15)\quad \tfrac{1}{2}\pi=\varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2)\varphi_4(2)\ldots\varphi_\infty(2).$$

Leicht überzeugt man sich nun von der Richtigkeit der Relation

$$\varphi_k(2]=\frac{2}{\sqrt{\{2+f_{k-1}(2)\}}},$$

aus der sich ferner nach 12) sogleich die Relation

$$\varphi_k(2)=\frac{1}{\sqrt{\left\{\frac{1+\frac{1}{\varphi_{k-1}(2)}}{2}\right\}}}$$

ergiebt. Nun ist aber nach 12)

$$\varphi_1(2)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sec\frac{\pi}{4}.$$

Also ist

$$\varphi_1(2) = \sec\frac{\pi}{4},$$

$$\varphi_2(2) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sec\frac{\pi}{8},$$

$$\varphi_3(2) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}\right)}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{16}} = \sec\frac{\pi}{16},$$

$$\varphi_4(2) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{16}}{2}\right)}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{32}} = \sec\frac{\pi}{32},$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und es ist folglich allgemein

$$\varphi_k(2) = \sec\frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

Bezeichnen wir die Gränze, welcher das Product

$$\sec\frac{\pi}{2^2}\ \sec\frac{\pi}{2^3}\ \sec\frac{\pi}{2^4}\ \sec\frac{\pi}{2^5}\ \ldots.\ \sec\frac{\pi}{2^k}$$

sich nähert, wenn k in's Unendliche wächst, durch

$$\sec\frac{\pi}{2^2}\ \sec\frac{\pi}{2^3}\ \sec\frac{\pi}{2^4}\ \sec\frac{\pi}{2^5}\ \ldots.\ \sec\frac{\pi}{2^\infty},$$

so ist nach 15)

$$16)\quad \tfrac{1}{2}\pi = \sec\frac{\pi}{2^2}\ \sec\frac{\pi}{2^3}\ \sec\frac{\pi}{2^4}\ \ldots.\ \sec\frac{\pi}{2^\infty}.$$

Dies ist eine längst bekannte, von Euler gefundene, hier aber ganz elementar bewiesene Formel.

XIII.
Allgemeiner Beweis der bekannten Ausdrücke für sin $(\alpha \pm \beta)$ und cos $(\alpha \pm \beta)$.

Von
Herrn F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

1.

Um zu einer allgemeinen Definition des Sinus und Cosinus zu gelangen, ist es nöthig, folgende Betrachtung über das Zählen der Kreisbogen anzustellen.

In der Peripherie eines mit der Einheit als Radius beschriebenen Kreises werde ein fester Punkt A angenommen. Ist dann M ein beliebiger anderer Punkt in der Kreislinie, so verstehe ich unter dem zwischen A und M liegenden, oder dem dem Punkte M zugehörigen (entsprechenden) Bogen den Weg, welchen man auf der Peripherie zurück legen muss, um von A nach M zu gelangen. Diese Bewegung kann nicht nur von A aus nach zwei verschiedenen Richtungen geschehen, deren eine positive, die andere negative Bogen bestimmt, sondern einmal in M angelangt, wird man noch beliebig oft in diesem Punkt ankommen, wenn man die Peripherie mehrmal durchläuft. Es gehören daher dem Punkte M unendlich viele Bogen zu.

Nun denke man sich durch des Kreises Mittelpunkt ein rechtwinkliges Coordinatensystem in des Kreises Ebene gelegt, so dass der positive Theil der Abscissenaxe vom Mittelpunkte nach dem festen Punkte A, von dem alle Bogen an gezählt werden, gerichtet ist. Dies vorausgesetzt, nenne ich mit Grunert*) den Sinus und Cosinus des dem Punkte M zugehörigen Bogens resp. die Ordinate und Abscisse des Punktes M in Bezug auf das angenommene System.

2.

Da nach dem Obigen, wenn α ein ganz beliebiger (positiver oder negativer) dem Punkte M zugehöriger Bogen ist, eben diesem Punkte überhaupt der Bogen $\alpha \pm 2k\pi$ entspricht, wo k eine

*) Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie zum Gebrauche bei Vorlesungen.

positive ganze Zahl bezeichnet, so folgt aus der Definition des Sinus und Cosinus, dass

$$1)\quad \begin{cases} \sin(\alpha \pm 2k\pi) = \sin\alpha \\ \cos(\alpha \pm 2k\pi) = \cos\alpha \end{cases}$$

ist.

Hierdurch sind die Sinusse und Cosinusse zweier Bogen verglichen, die sich um $\pm 2k\pi$ unterscheiden. Um nun eine Vergleichung für zwei sich um $\pm(2k+1)\pi$ unterscheidende Bogen anzustellen, sei M' der dem Punkte M diametral gegenüberliegende Punkt der Peripherie. Die diesem Punkte zugehörigen Bogen zu finden, stelle man sich vor, dass man auf der Kreislinie fortschreitend in M angelangt sei, und der Bogen α sei das Resultat dieser Bewegung. Von diesem Moment an gerechnet, wird man zum ersten Mal in M' ankommen, wenn der Bogen $\pm\pi$ durchlaufen ist, weswegen dem Punkte M' schon der Bogen $\alpha \pm \pi$ entspricht. Da man nun von M' die ganze Peripherie noch mehremal durchlaufen muss, um immer wieder von Neuem in diesem Punkte anzukommen, so gehört dem Punkte M' überhaupt der Bogen $\alpha \pm \pi \pm 2k\pi$ zu. Jenachdem man nun die obern oder untern Zeichen auf einander bezieht, oder nicht, findet man die Bogen $\alpha \pm (2k+1)\pi$, oder $\alpha \pm (2k-1)\pi$; da aber $2k-1$ so gut als $2k+1$ jede ungerade Zahl repräsentirt, so ist der letzte Bogen im ersten schon enthalten, und somit entspricht dem Punkte M' der Bogen $\alpha \pm (2k+1)\pi$.

Da nun Sinus und Cosinus der den Punkten M und M' entsprechenden Bogen absolut gleich, den Vorzeichen nach aber entgegengesetzt sind, so erhält man die Relationen

$$2)\quad \begin{cases} \sin\{\alpha \pm (2k+1)\pi\} = -\sin\alpha \\ \cos\{\alpha \pm (2k+1)\pi\} = -\cos\alpha \end{cases}$$

Die Ausdrücke 1) und 2) lassen sich aber so mit einander vereinigen:

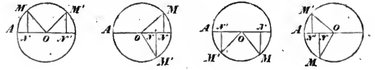
$$3)\quad \begin{cases} \sin(\alpha \pm k\pi) = (-1)^k \sin\alpha \\ \cos(\alpha \pm k\pi) = (-1)^k \cos\alpha \end{cases}$$

indem jetzt k eine beliebige (gerade oder ungerade) positive ganze Zahl bezeichnet.

Dadurch sind die Functionen zweier Bogen verglichen, die sich um ein gerades Vielfache von $\frac{1}{2}\pi$ unterscheiden.

Endlich betrachten wir zwei Bogen, die sich um ein ungerades Vielfache von $\frac{1}{2}\pi$ unterscheiden.

Zu dem Ende sei wieder α ein ganz beliebiger, dem Punkte M zugehöriger Bogen, der in einem der vier Quadranten (s. die nachfolgende Figur) endigen kann:



Digitized by Google

O ist des Kreises Mittelpunkt, von M schreitet man in allen Fällen nach derselben (positiven) Richtung zu M' fort durch den rechten Winkel MOM' hindurch. Dann ist $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ ein dem Punkte M' entsprechender Bogen. Sind MN, $M'N'$ auf AO senkrecht, so erhellt die Aehnlichkeit der Triangel MON, $M'ON'$, weswegen $MN = ON'$, und $ON = M'N'$. Da nun in allen Fällen $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi)$ und $\cos\alpha$ dasselbe, dagegen $\cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi)$ und $\sin\alpha$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist

$$4)\quad \begin{cases} \sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = \cos\alpha \\ \cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = -\sin\alpha. \end{cases}$$

Zieht man in diesen Relationen von $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ den Bogen π ab, und berücksichtigt die Formeln 3), so entsteht

$$5)\quad \begin{cases} \sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi) = -\cos\alpha \\ \cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi) = \sin\alpha. \end{cases}$$

Addirt man in 4) zu $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ die Grösse $k\pi$, und beachtet die Formeln 3), so wird

$$6)\quad \begin{cases} \sin\{\alpha + (2k+1)\frac{1}{2}\pi\} = (-1)^k \cos\alpha \\ \cos\{\alpha + (2k+1)\frac{1}{2}\pi\} = -(-1)^k \sin\alpha. \end{cases}$$

Subtrahirt man dagegen in 5) von $\alpha - \frac{1}{2}\pi$ den Bogen $k\pi$, und beachtet ebenfalls 3), so entsteht

$$7)\quad \begin{cases} \sin\{\alpha - (2k+1)\frac{1}{2}\pi\} = -(-1)^k \cos\alpha \\ \cos\{\alpha - (2k+1)\frac{1}{2}\pi\} = (-1)^k \sin\alpha \end{cases}$$

So sind nun in den Formeln 3), 6), 7) die Sinusse und Cosinusse zweier sich um ein beliebiges Vielfache von $\pm \frac{1}{2}\pi$ unterscheidender Bogen verglichen.

3.

Jetzt haben wir noch zu untersuchen, wie sich die Sinus und Cosinus eines negativen Bogens zu denen des positiven verhalten.

Es sei deshalb $\alpha = \alpha' + 2k\pi$, wo α, α' positiv und $\alpha' < 2\pi$; dann ist $-\alpha = -\alpha' - 2k\pi$, und folglich $\sin\alpha = \sin\alpha'$ und $\sin(-\alpha) = \sin(-\alpha')$, $\cos\alpha = \cos\alpha'$ und $\cos(-\alpha) = \cos(-\alpha')$ nach 1).

Rechnet man die Bogen α' und $-\alpha'$ beide vom Punkte A aus, so erhellt durch einfache geometrische Betrachtung, dass dieselben zugleich im ersten und vierten, oder im zweiten und dritten Quadranten endigen, weshalb $\sin(-\alpha') = -\sin\alpha'$, und $\cos(-\alpha') = \cos\alpha'$. Daher ist auch

$$8)\quad \begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha. \end{cases}$$

Die Formeln 3), 6), 7), 8) reichen nun vollständig aus, um die allgemeine Gültigkeit der Formeln

$$9)\quad \begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

darzuthun.

4.

In den Elementen der Trigonometrie wird ohne Weitläufigkeit erwiesen, dass

$$10)\quad \begin{cases}\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

ist, wenn die Bogensumme $\alpha+\beta$ im ersten Quadranten liegt, so dass die Bogen α, β beide positiv sind, und keiner von ihnen hinsichtlich des absoluten Werths die Grösse $\frac{1}{4}\pi$ übersteigt.

Für das untere Vorzeichen nun haben wir nach 8)

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

und wenn wir daher $\alpha-\beta$ als Summe der Bogen α und $-\beta$ ansehen, so bleibt für diesen Fall die erste der Relationen 9) richtig.

Ferner ist nach 8) $\sin(-\alpha-\beta)=-\sin(\alpha+\beta)=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, welches wiederum nach 8) $=\sin(-\alpha)\cos(-\beta)+\cos(-\alpha)\sin(-\beta)$.

Endlich ist $\sin(-\alpha+\beta)=-\sin(\alpha-\beta)=-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ nach 10), welches nach 8) wieder $=\sin(-\alpha)\cos\beta+\cos(-\alpha)\sin\beta$ ist.

Deshalb ist die erste der Relationen 9) richtig in allen den Fällen, wo α, β beliebige positive oder negative Bogen sind, deren keiner bloss mit Rücksicht auf den absoluten Werth die Grösse $\frac{1}{4}\pi$ übersteigt. Ganz ähnlich wird die Richtigkeit der zweiten Gleichung in 9) erwiesen.

5.

Sind nun α, β zwei ganz beliebige Bogen, dagegen α', β' zwei Bogen, deren keiner hinsichtlich des absoluten Werths $\frac{1}{4}\pi$ übersteigt, so können die positiven ganzen Zahlen k, ϱ jederzeit so bestimmt werden, dass

$$11)\quad \begin{cases}\alpha=\alpha'\pm\frac{1}{2}\pi\,.\,k\\ \beta=\beta'\pm\frac{1}{2}\pi\,.\,\varrho\end{cases}$$

ist.

Denn ist α zuerst positiv, so nehme man $\frac{1}{2}\pi$ so oft davon weg, als es angeht, z. B. $m$mal, der Rest α' wird $<\frac{1}{2}\pi$ sein. Ist nun dieser Rest auch kleiner als $\frac{1}{4}\pi$, so hat man nur $k=m$ zu nehmen. Wenn aber α' die Grösse $\frac{1}{4}\pi$ übersteigen sollte, so setzt man $\alpha=-(\frac{1}{2}\pi-\alpha')+\frac{1}{2}\pi(m+1)$, welches ebenso viel als $\alpha'+\frac{1}{2}\pi.m$, und nimmt $k=m+1$, da nun $\frac{1}{2}\pi-\alpha'$ stets kleiner als $\frac{1}{4}\pi$ ist.

Ist ferner α negativ, so kann nach dem eben Bewiesenen $-\alpha=\alpha'+\frac{1}{2}\pi\,.\,k$ gesetzt werden, dass $\alpha'<\frac{1}{4}\pi$, und dann ist $\alpha=-\alpha'-\frac{1}{2}\pi\,.\,k$.

Dieselben Schlüsse gelten für β, und unsere Behauptung ist somit erwiesen.

6.

Der Fortgang der Betrachtung erfordert die Unterscheidung dreier Hauptfälle, nämlich:

I. Sind k, ϱ beide gerade $= 2k'$, $2\varrho'$, so ist entweder

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' \pm \pi(k' + \varrho')$$

oder

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' \pm \pi(k' - \varrho').$$

a) Ist nun $k' > \varrho'$, so ist $k' - \varrho'$ positiv, und nach 3)

$$\sin(\alpha + \beta) = (-1)^{k' \pm \varrho'} . \sin(\alpha' + \beta').$$

Entwickelt man den Sinus auf der rechten Seite nach 9), welches nach 4) erlaubt ist, und beachtet, dass nach 3)

$$\sin \alpha' = \sin(\alpha \mp k'\pi) = (-1)^{k'} \sin \alpha$$
$$\cos \alpha' = \cos(\alpha \mp k'\pi) = (-1)^{k'} \cos \alpha,$$

und ähnliche Ausdrücke für $\sin \beta'$ und $\cos \beta'$ entspringen, so erhält man

$$\sin(\alpha + \beta) = (-1)^{k' \pm \varrho'} . (-1)^{k' + \varrho'} (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta).$$

Da nun das Product $(-1)^{k' \pm \varrho'} . (-1)^{k' + \varrho'}$ entweder $= (-1)^{2(k' + \varrho')}$ oder $= (-1)^{2k'}$, also stets die positive Einheit ist, so bleibt die erste der Relationen 9) richtig.

b) Ist dagegen $k' < \varrho'$, so wird man nur α und β mit einander verwechseln, wobei aber $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ seinen Werth nicht ändert.

II. Sind k, ϱ beide ungerade $= 2k' + 1$, $2\varrho' + 1$, so ist entweder

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' \pm \pi(k' + \varrho' + 1)$$

oder

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' \pm \pi(k' - \varrho');$$

und, wenn $k' - \varrho'$ positiv, nach 3) entweder

$$\sin(\alpha + \beta) = (-1)^{k' + \varrho' + 1} . \sin(\alpha' + \beta'),$$

oder

$$\sin(\alpha + \beta) = (-1)^{k' - \varrho'} . \sin(\alpha' + \beta').$$

Entwickelt man die Function auf der rechten Seite nach 9), und beachtet, dass nach 6) und 7)

$$\sin \alpha' = \sin\{\alpha \mp \tfrac{1}{2}\pi(2k' + 1)\} = \mp (-1)^{k'} \cos \alpha$$
$$\cos \alpha' = \cos\{\alpha \mp \tfrac{1}{2}\pi(2k' + 1)\} = \pm (-1)^{k'} \sin \alpha,$$

und ähnliche Ausdrücke für $\sin\beta'$ und $\cos\beta'$ entspringen, so folgt, dass, jenachdem man die Vorzeichen in 11) auf einander bezieht oder nicht,
entweder

$$\sin(\alpha+\beta)=(-1)^{k'+\varrho'+1}\,.\,(-1)^{k'+\varrho'+1}(\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta)$$

oder

$$\sin(\alpha+\beta)=(-1)^{k'-\varrho'}\,.\,(-1)^{k'+\varrho'}(\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta),$$

weswegen die erste der Relationen 9) richtig bleibt.

Ist $k'-\varrho'$ negativ, so vertauscht man β mit α, und es ändert sich nichts.

III. Ist k gerade $=2k'$, und ϱ ungerade $=2\varrho'+1$, so ist entweder

$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'\pm\tfrac{1}{2}\pi\{2(k'+\varrho')+1\}$$

oder

$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'\pm\tfrac{1}{2}\pi\{2(k'-\varrho'-1)+1\}$$

oder

$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'\pm\tfrac{1}{2}\pi\{2(\varrho'-k')+1\}.$$

Die erste Gleichung entspringt, wenn man in 11) die obern und untern Vorzeichen auf einander bezieht, die zweite und dritte, wenn dies nicht geschieht, und es findet die erste von den beiden letztern, oder die andere ihre Anwendung, jenachdem $k'>\varrho'$ oder $k'<\varrho'$ ist. Daher ist nach 6) und 7)
entweder

$$\sin(\alpha+\beta)=\pm(-1)^{k'+\varrho'}\cos(\alpha'+\beta')$$

oder

$$\sin(\alpha+\beta)=\pm(-1)^{k'-\varrho'-1}\cos(\alpha'+\beta')$$

oder

$$\sin(\alpha+\beta)=\mp(-1)^{\varrho'-k'}\cos(\alpha'+\beta').$$

Entwickelt man die Function auf der rechten Seite nach 9), und beachtet, dass nach 3)

$$\sin\alpha'=\sin(\alpha\mp k'\pi)=(-1)^{k'}\sin\alpha,$$
$$\cos\alpha'=\cos(\alpha\mp k'\pi)=(-1)^{k'}\cos\alpha,$$

und nach 6) und 7)

$$\sin\beta'=\sin\{\beta\mp\tfrac{1}{2}\pi(2\varrho'+1)\}=\mp(-1)^{\varrho'}\cos\beta,$$
$$\cos\beta'=\cos\{\beta\mp\tfrac{1}{2}\pi(2\varrho'+1)\}=\pm(-1)^{\varrho'}\sin\beta,$$

so ergiebt sich
entweder

$$\sin(\alpha+\beta)=\pm(-1)^{k'+\varrho'}\,.\pm(-1)^{k'+\varrho'}(\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta)$$

oder

$$\sin(\alpha+\beta) = \pm(-1)^{k'-\varrho'-1} \cdot \mp(-1)^{k'+\varrho'}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

oder

$$\sin(\alpha+\beta) = \mp(-1)^{\varrho'-k'} \cdot \mp(-1)^{k'+\varrho'}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),$$

woraus ersichtlich, dass die erste der Relationen 9) richtig bleibt.

Ist endlich k ungerade und ϱ gerade, so würde nur β mit α zu vertauschen sein, und alles ungeändert bleiben.

Ganz ähnlich kann der Satz für $\cos(\alpha+\beta)$ bewiesen werden, einfacher jedoch auf folgende Weise:

7.

Nach 4) ist $\cos(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\pi)$, welches nach dem bisher bewiesenen allgemeinen Satze $= \sin\alpha\cos(\beta+\frac{1}{2}\pi) + \cos\alpha\sin(\beta+\frac{1}{2}\pi)$, das wiederum nach 4) $= \sin\alpha \,.\, -\sin\beta + \cos\alpha \,.\, \cos\beta$ ist.

Wie daher auch die Bogen α, β beschaffen sein mögen, es ist jederzeit

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Endlich verdient herausgehoben zu werden, was sich aus 5) und 8) ergiebt, nämlich:

$$12)\quad \begin{cases} \sin(\frac{1}{2}\pi-\alpha) = -\sin(\alpha-\frac{1}{2}\pi) = \cos\alpha \\ \cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha) = \quad\cos(\alpha-\frac{1}{2}\pi) = \sin\alpha. \end{cases}$$

Da die Bogen $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ und α sich complementiren (d. h. zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen), so folgt, dass Sinus und Cosinus eines Bogens resp. der Cosinus und Sinus des Complementarbogens sind.

XIV.

Eine Bemerkung über den Beweis des Moivreschen Lehrsatzes ohne Hülfe des Imaginären.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Die Bemühungen, das Imaginäre bei analytischen Deductionen zu umgehen, dürften Manchem als völlig antiquirt und in jene Zeit gehörig erscheinen, wo man das Imaginäre noch eben so sehr, als heutigen Tages die divergenten Reihen, perhorrescirte. Indessen können sie zuweilen durch ausserwissenschaftliche Umstände geboten sein, und aus dieser Rücksicht nimmt die folgende Bemerkung einige Nachsicht in Anspruch.

Lagrange argumentirt zu dem angedeuteten Zwecke in den Leçons sur le calcul des fonctions p. 143 auf diese Art:

Die beiden Reihen

$$2,\ x+\frac{1}{x},\ x^2+\frac{1}{x^2},\ x^3+\frac{1}{x^3},\ \ldots.$$

und

$$2,\ 2\cos a,\ 2\cos 2a,\ 2\cos 3a,\ \ldots.$$

entsprechen einem und demselben recurrenten Gesetz:

$$X_{r+1}=(x+\frac{1}{x})X_r-X_{r-1}$$

und

$$A_{r+1}=2\cos aA_r-A_{r-1},$$

wo X_r und A_r im Allgemeinen beziehlich $x^r+\frac{1}{x^r}$ und $2\cos ra$ bedeuten. Setzt man also $x+\frac{1}{x}=2\cos a$, so werden jene beiden Reihen identisch und man hat $X_r=A_r$, oder $x^r+\frac{1}{x^r}=2\cos ra$. Mit andern Worten, wenn $x^2-2x\cos a+1=0$, so ist auch $x^{2r}-2x^r\cos ra+1=0$, und folglich ist $x^{2r}-2x^r\cos ra+1$ durch $x^2-2x\cos a+1$ theilbar.

Hier ist aber das Imaginäre nur scheinbar vermieden, denn $x+\frac{1}{x}$ kann nicht gleich $2\cos\alpha$ gesetzt werden, weil $2\cos\alpha$ jedenfalls innerhalb der Gränzen -2 und $+2$, dagegen $x+\frac{1}{x}$ immer ausserhalb derselben liegt. Oder besser gesagt, mit dem Setzen von $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$ ist eben ein Imaginäres gesetzt worden, was doch vermieden werden sollte.

Lagrange würde aber seinen Zweck mittelst einer ganz geringen Abänderung erreicht haben. Wenn man nämlich mittelst jenes recurrenten Gesetzes allmälig X_2, X_3 .... X_r und zwar

$$X_r=p(x+\frac{1}{x})^r+q(x+\frac{1}{x})^{r-1}+\ldots.$$

erhält, so muss man für das allgemeine Glied der andern Reihe A_r ebenfalls

$$A_r=p(2\cos\alpha)^r+q(2\cos\alpha)^{r-1}+\ldots.$$

erhalten, weil es durch eben dasselbo recurrente Gesetz entstebt. Folglich ist

$$X_r-A_r=\quad p\{(x+\frac{1}{x})^r-(2\cos\alpha)^r\}$$
$$+q\{(x+\frac{1}{x})^{r-1}-(2\cos\alpha)^{r-1}\}+\ldots.$$

Wird nun rechts und links mit x^r multiplicirt, so hat man

$$x^{2r}-2x^r\cos r\alpha+1=\quad p\{(x^2+1)^r-(2x\cos\alpha)^r\}$$
$$+qx\{(x^2+1)^{r-1}-(2x\cos\alpha)^{r-1}\}+\ldots,$$

wo auf der rechten Seite jedes Glied durch $(x^2+1)-(2x\cos\alpha)$ theilbar ist, was mithin auch für die linke Seite gilt.

Man erhält auch durch eine theilweise Division:

$$\frac{x^{2r}-2x^r\cos r\alpha+1}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\quad x^{2r-2}+1$$
$$+2x\cos\alpha.\frac{x^{2r-2}-2x^{r-1}\cos(r-1)\alpha+1}{x^2-2x\cos\alpha+1}$$
$$-x^2.\frac{x^{2r-4}-2x^{r-2}\cos(r-2)\alpha+1}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$$

Wenn also irgend zwei auf einander folgende Glieder der Reibe

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3\ \ldots,$$

wo Y_r allgemein den Ausdruck $x^{2r}-2x^r\cos r\alpha+1$ bezeichnet, durch $x^2-2x\cos\alpha+1$ theilbar sind, so ist es auch das nächste, mithin alle übrigen. Nun ist es aber das erste Y_0, welches

Digitized by Google

Null ist; und das zweite Y_1, welches $x^2 - 2x \cos a + 1$ selbst ist; folglich ist auch $x^{2r} - 2x^r \cos ra + 1$ durch $x^2 - 2x \cos a + 1$ theilbar.

XV.

Bemerkungen über die Lehre von den geometrischen Progressionen *).

Von

Herrn E. Heis,

Oberlehrer an der höheren Bürger- und Provinzial-Gewerbschule zu Aachen.

Bekanntlich lassen sich, wenn von den fünf Grössen: Anfangsglied a, Endglied t, Anzahl der Glieder n, Exponent e und Summe aller Glieder s einer geometrischen Progression drei gegeben sind, die beiden übrigen leicht finden. Die Lehrbücher der Algebra geben zu den 20 möglichen Aufgaben die Resultate theils direct an, theils stellen sie die Gleichungen auf, deren Wurzeln zur Bestimmung der gesuchten Grössen dienen; so wird zur Bestimmung von e aus a, n, s die Gleichung $e^n - \frac{s}{a}e + \frac{s-a}{a} = 0$, zur Bestimmung von t aus a, n, s, so wie zur Bestimmung von a aus t, n, s die Gleichung $t(s-t)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$, und endlich zur Bestimmung von e aus n, t, s die Gleichung $e^n - \frac{s}{s-t}e^{n-1} + \frac{t}{s-t} = 0$ aufgestellt. Diese drei Gleichungen vom $n$ten Grade enthalten aber jede einen Wurzelwerth, welcher der Gleichung, nicht aber den Forderungen der Aufgabe zukommt. Zur Vereinfachung des Ausdruckes sind nämlich die ursprünglichen Gleichungen vom $(n-1)$ten Grade durch Multiplication mit einem binomischen Factor in Gleichungen vom $n$ten Grade verwandelt worden, erhielten aber eben durch diese Multiplication einen Wurzelwerth, welcher als Antwort auf die gegebene Aufgabe ganz und gar nicht passt. Um e aus a, n, s zu bestimmen dient nun die

*) S. meine Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, dritte vermehrte Auflage. Köln. 1844. Seite 271.

Gleichung des $(n-1)$ten Grades $e^{n-1}+e^{n-2}+e^{n-3}\ldots.+1-\frac{s}{a}$ $=0$, welche auch unter der Form $\frac{e^n-1}{e-1}-\frac{s}{a}=0$ sich darstellen lässt. Multiplicirt man diese letztere Gleichung mit $e-1$, so erhält man die Gleichung $e^n-\frac{s}{a}e+\frac{s-a}{a}=0$ vom $n$ten Grade, welche in den Lehrbüchern gewöhnlich angeführt wird, die aber den Wurzelwerth $e=1$ in sich enthält, welcher in Bezug auf die Forderung der Aufgabe unrichtig ist. Die Gleichung $t(s-t)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}$ $=0$ zur Bestimmung von a oder t enthält den Wurzelwerth $t=a$, diese Gleichung ist demnach zu verwerfen und statt ihrer die Gleichung vom $(n-1)$ten Grade $y^{n-1}+y^{n-2}+y^{n-3}\ldots.+1-\frac{s}{a}=0$ oder $\frac{y^n-1}{y-1}-\frac{s}{a}=0$ aufzustellen, wo $y=\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$, deren Wurzeln alle den Forderungen genügen. Die Gleichung $e^n-\frac{s}{s-t}e^{n-1}+\frac{t}{s-t}$ $=0$ endlich giebt den Wurzelwerth $e=1$, welcher ebenfalls nur der Gleichung genügt; statt dieser Gleichung vom $n$ten Grade ist daher die Gleichung $e^{n-1}(1-\frac{s}{t})+e^{n-2}+e^{n-3}\ldots.+e+1$ $=0$ oder $\frac{e^n-1}{e-1}-\frac{s}{t}e^{n-1}=0$ aufzustellen. In einem ganz besonderen Falle kann zwar $e=1$ und $a=t$ sein, aber alsdann liefert auch die Gleichung vom $(n-1)$ten Grade diese Werthe und die Gleichung vom $n$ten Grade würde diese Werthe doppelt geben.

XVI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Es ist

$$4a_1a_2=(a_1+a_2)^2-(a_1-a_2)^2$$

und

$$\begin{aligned}24a_1a_2a_3= & \;(a_1+a_2+a_3)^3\\ & -(a_1+a_2-a_3)^3\\ & -(a_1+a_3-a_2)^3\\ & -(a_2+a_3-a_1)^3.\end{aligned}$$

Lassen sich ähnliche Gesetze für Producte mit mehr als drei Factoren angeben?

Wenn die Seiten zweier Dreiecke einander parallel sind, und das eine dieser beiden Dreiecke in, das andere um ein drittes Dreieck beschrieben ist, so ist der Flächenraum dieses letzteren Dreiecks die mittlere Proportionale zwischen den Flächenräumen der beiden ersten Dreiecke.

Zusatz zu den zu beweisenden Sätzen. Tbl. V. S. 335. Von Herrn A. Göpel zu Berlin.

1) Von der Reihe

$$\tfrac{1}{2}-\frac{m^2-1^2}{2^2}\cdot\tfrac{1}{4}+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^2\cdot 4^2}\cdot\tfrac{1}{6}-\dots\dots$$

ist für jedes m

die Summe der ersten n Glieder $=\dfrac{(3^2-m^2)(5^2-m^2)\dots(2n-1)^2-m^2}{2^2\cdot 4^2\dots(2n-2)^2\cdot 2n}$,

also die Summe sämmtlicher Glieder $=\dfrac{2\cos\frac{m}{2}\pi}{\pi(1-m^2)}$.

2) Von der Reihe

$$\tfrac{1}{1}-\frac{m^2-2^2}{3^2}\cdot\tfrac{1}{5}+\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{3^2\cdot 5^2}\cdot\tfrac{1}{7}-\dots\dots$$

ist für jedes m

die Summe der ersten n Glieder

$$=\frac{1}{m^2-1}-\frac{1}{m^2-1}\cdot\frac{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\dots(4n^2-m^2)}{3^2\cdot 5^2\dots(2n-1)^2(2n+1)},$$

also die Summe sämmtlicher Glieder $=\dfrac{1-\frac{1}{m}\sin\frac{m}{2}\pi}{m^2-1}$.

3) Wenn m eine gerade Zahl ist, so ist die Summe der Reihe

$$1+\frac{(-1)^2}{m^2-2^2}\cdot 1-\frac{(-1)^2\cdot 1^2}{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}\cdot 3$$
$$+\frac{(-1)^2\cdot 1^2\cdot 3^2}{(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)}\cdot 5-\dots\dots$$

bis zu den unendlich werdenden Gliedern fortgesetzt:

$$=\frac{m^2}{m^2-1}\left(1\pm\frac{1}{2^{m-1}}\cdot\frac{1.3\ldots.m-3}{2.4\ldots.m-2.m}\right),$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $\frac{m}{2}$ gerade oder ungerade is.

Welches ist ihre Summe für ein beliebiges m?

4) Wenn m eine ungerade Zahl, grösser als 1, ist, so ist die Summe der Reihe

$$\frac{1}{m^2-3^2}.2-\frac{2^2}{(m^2-3^2)(m^2-5^2)}.4+\frac{2^2.4^2}{(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)}.6-\ldots.$$

bis zu den unendlich werdenden Gliedern fortgesetzt:

$$=\frac{2}{m^2-1}\pm\frac{1}{2^{m-1}}\cdot\frac{2.4\ldots.m-3}{1.3\ldots.m-4.m-2},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $\frac{m-1}{2}$ gerade oder ungerade ist.

Welches ist ihre Summe für ein beliebiges m?

XVII.

Miscellen.

Académie des sciences de Saint-Pétersbourg.

(Séances des mois de janvier, février et mars 1844.)

Un rapport a été fait à l'Académie sur une découverte faite en météorologie par M. Nervander, professeur à Helsingfors; les auteurs de ce rapport sont MM. W. Struve, E. Lenz et Hess. En voiçi le texte même:

„M. Nervander, professeur à Helsingfors et membre correspondant de l'Académie, vient de lui communiquer, sous forme de lettre, le résultat d'un travail sur la météorologie, qui contient l'exposition d'un phénomène tellement important, et si parfaitement ignoré jusqu'à ce jour, que nous avons cru de notre devoir de recommander à l'attention de l'Académie.

Les travaux météorologiques qui ont rapport aux phénomènes de la chaleur dans notre atmosphère ont été toujours dirigés vers le but de trouver la loi qui régit certaines variations dépendantes d'une cause manifeste, comme par exemple les variations de température qui résultent de la position de la Terre par rapport au Soleil, ou de la rotation de la Terre même autour de son axe. Mais ces lois devaient être déduites de phénomènes variables et constamment modifiés par l'influence de causes perturbatrices qui les faisaient paraître irréguliers. Le moyen dont on s'est servi pour découvrir quelque régularité dans la masse des variations produites par les différentes causes perturbatrices a été, comme on le sait, l'application du principe des grands nombres. Pour appliquer ce principe, on distribue les observations en groupes qui embrassent une période déterminée, comme par exemple un jour, une année.

On prend alors la moyenne des observations correspondantes au même mois ou à la même heure, selon la durée de la période. En se servant d'un grand nombre de groupes, les variations irrégulières se détruisent réciproquement, et il ne reste plus d'apparent que les variations essentielles provenant des causes qui agissent dans le même sens. Dans cette sorte de recherches, qui ont pour but la marche de la chaleur pendant une période d'un jour ou d'une année, on est toujours sûr de parvenir à un résultat déterminé; car il ne peut y avoir aucun doute sur l'existence de la période. La loi ou la marche cherchée de la température une fois déterminée, on est convenu de considérer comme des irrégularités toute déviation de cette marche indiquée par les observations isolées. Personne ne pouvait cependant douter que ces irrégularités elles mêmes ne fussent la conséquence nécessaire de causes déterminées, comme il en est pour le phénomène dont la régularité a été reconnue. Les autres phénomènes ne nous paraissent irréguliers que par l'ignorance où nous sommes, tant de causes aux quelles il faut les attribuer que, par conséquent aussi, des périodes qui suivent ces irrégularités. On voit par-là qu'il n'y a d'autre moyen de parvenir à cette connaissance que celui de soumettre les différents phénomènes de périodicité que présente notre système solaire à un examen comparé avec les variations que présentent les phénomènes de la chaleur, déterminées par de bonnes expériences. Mais on voit aussi que cette voie pour parvenir au but est très laborieuse, et il est d'autant plus difficile de se résoudre à la suivre, qu'il est impossible de prévoir si, parmi toutes ces recherches, il en existe réellement une qui doive être couronnée de succès.

Quoi qu'il en soit, c'est le seul mode de procéder que nous offre la science. D'autant plus grande est notre satisfaction en voyant se vouer à ce travail un physicien aussi consciencieux et d'une perspicacité aussi reconnue que l'est M. Nervander, et nous nous félicitons sincèrement de voir ces recherches couronnées d'un succès aussi évident que celui qui résulte du présent travail.

M. Nervander avait découvert antérieurement, par une recherche sur le temps de la debâcle de quelques rivières, que ces époques manifestaient une périodicité de sept ans qui se reproduisait avec une assez grande régularité. Supposant que cette période devrait se retrouver dans la marche des températures, il tâcha de la rendre évidente en groupant les observations par périodes de sept ans. Cela le conduisit à examiner la période d'une révolution

du Soleil autour de son axe. Le temps de cette révolution, pour un observateur placé au centre de la Terre, ou le temps de la rotation géocentrique, a été fixé en dernier lieu par M. Laugier à 27, 23 jours. M. Nervander ordonne les observations thermométriques de Paris en groupes d'après cette période, et obtient pour résultat, qu'il existe réellement une période semblable pour les températures. La durée n'en était pourtant pas absolument la même; en la modifiant jusqu'à ce que la périodicité se manifestât de la manière la plus prononcée par les températures, il obtint une durée de 27,26 jours. Cette durée approche beaucoup de celle trouvée par M. Laugier, et si l'on considère que la détermination de cette durée au moyen d'observations astronomiques laisse toujours une incertitude à cause de la mobilité des taches du Soleil, on ne peut hésiter à admettre pour la durée de la rotation du Soleil le nombre fourni par le meilleur accord des observations météorologiques.

Nous voyons donc, pour la première fois, ce fait remarquable qu'un phénomène appartenant à notre système solaire a été determiné, par la météorologie, la plus vague des sciences physiques, avec une précision plus grande que celle qu'il ait été possible d'atteindre par des observations astronomiques.

La superficie du Soleil offre donc des endroits qui émettent plus ou moins de chaleur, de manière que, selon le coté, que nous présente le Soleil, la Terre en reçoit plus ou moins de chaleur, et que pendant la durée de notre été la marche de la température est soumise, à la surface de la Terre, au moins deux fois à un abaissement. La limite de cette variation est de 0°,6 C. Mais ce qui prouve que le résultat obtenu n'est pas dû à une cause fortuite, mais à une cause bien déterminée, c'est:

„1. Que les observations de Paris et les observations faites pendant 50 ans à Inspruck donnent la même marche périodique.

2. Que la première moitié des observations d'Inspruck, calculée de la même manière que la seconde moitié, offre le même résultat.

3. Que si l'on combine ensemble les premiers semestres de chaque année, et de même les seconds semestres de chaque année, ils conduisent encore à la même marche périodique.

L'importance du résultat obtenu pour la science météorologique est évidente, et il ne nous reste qu'à émettre le voeu de voir cette découverte publiée par M. Nervander dans tous ses détails. Nous désirons le voir étendre ses recherches à d'autres périodes; toutefois il serait indispensable qu'on lui fournit les moyens nécessaires pour éviter, dans un travail de cette importance, cette partie fastidieuse et purement mécanique, mais néanmoins absolument indispensable, comme l'arrangement et la copie des nombres, leur sommation etc."

Digitized by Google

Satz vom Trapezium.

(Von Herrn Lebelin, élève du collège de Dijon.)

In Taf. I. Fig. 5. sei $ABCD$ ein Trapezium mit den beiden parallelen Seiten AB und CD, und E sei der Durchschnittspunkt seiner beiden Diagonalen. Zieht man von E aus mit AC und BD die Parallelen EF und EF_1, so sind die Dreiecke ABC, CEF und ACD, DEF einander ähnlich, und man hat also die folgenden Proportionen:

$$AB:AC=CF:EF,$$

$$AC:CD=EF:CD-CF;$$

aus denen sich nach einem bekannten Satze

$$AB:CD=CF:CD-CF,$$

also

$$AB:AB+CD=CF:CD,$$

folglich

$$CF=\frac{AB.CD}{AB+CD}$$

ergiebt. Ganz eben so ist

$$DF_1=\frac{AB.CD}{AB+CD}.$$

Also ist $CF=DF_1$, und zugleich sieht man hieraus, dass, so lange die Grösse der beiden parallelen Seiten des Trapeziums sich nicht ändert, wie sich auch die beiden anderen Seiten desselben ändern mögen, die einander gleichen Linien CF und DF_1 constant sind.

Führt man den gefundenen Werth von CF in die Proportion

$$AB:AC=CF:EF$$

ein, und bestimmt EF, so erhält man:

$$EF=\frac{AC.CD}{AB+CD},$$

und ganz eben so ist

$$EF_1=\frac{BD.CD}{AB+CD}.$$

Also ist

$$EF+EF_1=CD.\frac{AC+BD}{AB+CD}.$$

Aus allem Vorhergehenden ergiebt sich der folgende Satz:

Der geometrische Ort der Durchschnittspunkte der Diagonalen aller über derselben Grundlinie beschriebenen Trapeze, deren der Grundlinie parallele Seite constant ist, und deren beide anderen Seiten eine constante Summe haben, ist eine Ellipse.

Digitized by Google

Die Brennpunkte und die Hauptaxe dieser Ellipse sind nach dem Obigen leicht zu bestimmen.

Satz vom regulären Octaeder.

(Von Abélard Servedieu Lévy *). Bewiesen von Herrn H. Breton.)

Wenn der körperliche Winkel S **(Taf. I. Fig. 6.) eines regulären Octaeders von einer beliebigen Ebene** $A'B'C'D'$ **geschnitten wird, so ist immer**

$$\frac{1}{SA'}+\frac{1}{SC'}=\frac{1}{SB'}+\frac{1}{SD'}.$$

Beweis. Die zu beweisende Relation wird bewiesen sein, wenn man die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{SA'+SC'}{SA'.SC'}=\frac{SB'+SD'}{SB'.SD'},$$

oder die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{SA'.SC'}{SA'+SC'}=\frac{SB'.SD'}{SB'+SD'}$$

beweisen kann. Nun überzeugt man sich aber leicht, dass die Grössen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Seiten der in die rechtwinkligen Dreiecke $A'SC'$ und $B'SD'$ so beschriebenen Quadrate, dass ein Winkel dieser Quadrate mit den rechten Winkeln $A'SC'$ und $B'SD'$ zusammenfällt, ausdrücken. Daher kommt der Beweis darauf zurück, die Gleichheit dieser beiden Quadrate zu beweisen, was leicht auf folgende Art geschehen kann. Die Linie SO, welche als die Durchschnittslinie der Ebenen ASC und BSD nothwendig durch den Durchschnittspunkt O' der Diagonalen des Vierecks $A'B'C'D'$ gehen muss, halbirt die rechten Winkel ASC und BSD. Also halbirt die Linie SO' die rechten Winkel der Dreiecke $A'SC'$ und $B'SD'$. Da nun aber die Diagonale eines auf die oben näher bezeichnete Weise in ein rechtwinkliges Dreieck beschriebenen Quadrats den rechten Winkel dieses Dreiecks offenbar halbiren muss, so ist SO' sowohl die Diagonale des in das rechtwinklige Dreieck $A'SC'$, als auch die Diagonale des in das rechtwinklige Dreieck $B'SD'$ auf die angegebene Art beschriebenen Quadrats, und diese beiden Quadrate haben folglich gleiche Diagonalen, sind also einander gleich, w. z. b. w.

---

*) A. S. Lévy, geboren den 14ten November 1795 zu Paris, war, nachdem er sich lange in England und Belgien aufgehalten, zuletzt Professor der Mathematik am Collége Charlemagne zu Paris, und starb am 21sten Juni 1841, wegen seiner Kenntnisse, seines ausgezeichneten Lehrtalents und seines trefflichen Charakters allgemein geachtet.

Berichtigung.

In meinem Aufsatze No. VIII. in diesem Hefte bitte ich S. 51. unten und S. 52. oben die, eine Unrichtigkeit enthaltenden, Worte von „Nun ist aber offenbar $u < 2$, $v > \sqrt{2}$, $w > \sqrt{2}$, u. s. w. bis und folglich um so mehr $-u+v+w+x > 2$, d. i. $X > 2$" zu streichen, und dafür Folgendes zu setzen.

Nun ist aber offenbar $A_1E = x$ als die Sehne von $\frac{1}{34}$ der Peripherie kleiner als die Seite des regulären 32ecks, und $A_1D = w$, als die Sehne von $\frac{9}{34}$ der Peripherie, kleiner als die Seite des regulären 3ecks. Die Seite des 32ecks ist bekanntlich

$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})} = 0{,}1960343$$

und die Seite des 3ecks ist

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508.$$

Daher ist

$$w < 1{,}7320508 \text{ und } x < 0{,}1960343$$

also $w + x < 1{,}9280851$, d. i. $w + x < 2$, und folglich, weil offenbar $-u+v$ negativ ist, um so mehr $-u+v+w+x < 2$, d. i. $X < 2$.

Man kann dies aber auch auf folgende Art zeigen. Wenn AB (Taf. I. Fig. 7.) die Seite des 10ecks und AD die Seite des 30ecks ist, so ist in dem Dreiecke ADF, wie man leicht findet, $\angle ADF = \angle AFD = 84°$, also $AD = AF$ und folglich offenbar die Seite des 30ecks kleiner als die Hälfte der Seite des 10ecks. Also ist um so mehr x, als die Sehne von $\frac{1}{34}$ der Peripherie, kleiner als die Hälfte der Seite des Zehnecks, d. i.

$$x < \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ferner ist w, als die Sehne von $\frac{9}{34}$ der Peripherie, kleiner als die Sehne von $\frac{3}{10}$ der Peripherie. Da nun bekanntlich $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ die Seite des Fünfecks ist, so ist

$$\sqrt{\left(4-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

die Sehne von $\frac{3}{10}$ der Peripherie, also

$$w < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Weil aber offenbar $u < 2$, $v < 2$ ist, so ist

$$uvwx < 2 \, . \, 2 \, . \, \frac{\sqrt{5}+1}{2} \, . \, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{ d. i. } uvwx < 2,$$

und folglich der absolute Werth von Z kleiner als 2. Für $X = 2$ ist aber $Y = -2$, also $Z = -3$, nach der dritten der Gleichungen 11), was gegen das Vorhergehende streitet.

XVIII.

Berechnung des Körperinhaltes der Prismen.

Von dem

Herrn Professor W. Matzka

an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow in Galizien.

Die Herleitung des Ausdrucks für den Körperinhalt der Prismen, wie sie in den mir bekannten Lehrbüchern gegeben wird, vermag durchaus nicht mich zufrieden zu stellen, weil die ihr zu Grunde liegende Untersuchung, unter was für Bedingungen Prismen gleich sind, überall mehr oder weniger mühselig durch allerhand particuläre Fälle und Verwandlungen sich hindurchzieht, und die Beweise der Proportionalität der Prismen entweder nur obenhin oder gegentheilig schleppend gegeben werden. Ich will hier zeigen, wie sich diesem Mangel der Stereometrie gründlich abhelfen lässt, und zwar nach zwei Verfahren, von denen das erstere neu und entschieden kürzer ist, und das zweite mehr an das übliche sich anschliesst.

Erstes Verfahren.

A. Vergleichung der Prismen.

§ 1. *Hauptlehrsatz. I.* Prismen von gleichen Seiten und *congruenten* Querschnitten*) sind gleich.

Beweis. Man erweitere die (prismatischen) Seitenflächen der Prismen *ACEace* und *A'C'E'a'c'e'* (Taf. II. Fig. 1.), führe ganz ausserhalb der Prismen Querschnitte, und bringe diese, da sie

*) Die Durchschnittsfigur einer Ebene, welche eine, also auch sämmtliche Seiten einer prismatischen Fläche oder eines Prisma schneidet, nenne ich kurz einen Querschnitt oder Schrägschnitt, je nachdem die Ebene auf den Seiten senkrecht oder schief (schräg) steht.

der Annahme gemäss congruent sind, dergestalt mit einander überein, dass die Prismen selbst auf verschiedene Seiten dieses gemeinschaftlichen Querschnittes $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ zu stehen kommen. Dann fallen, weil in einem Punkte auf einer Ebene nur eine einzige Gerade senkrecht sein kann, die auf dem gemeinsamen Querschnitte senkrechten Seiten, also auch die durch sie gehenden Seitenebenen und sofort selbst die prismatischen Seitenflächen der Prismen überein; und es entstehen zwei, im Allgemeinen, nicht parallel abgeschnittene Prismen $ACEA'C'E'$ und $acea'c'e'$, deren Congruenz sich leicht nachweisen lässt.

Denn 1) weil die Seiten, Aa und $A'a'$, der Prismen gleichlang vorausgesetzt worden sind, müssen, wenn man zu jeder von zweien in einerlei Geraden liegenden solchen Seiten, wie Aa und $A'a'$, das zwischen ihnen befindliche Stück aA' addirt, die als Summen entstehenden Seiten, AA' und aa', welche in einerlei Geraden liegen, einander gleich sein; also $AA'=aa'$ und ebenso $BB'=bb'$, $CC'=cc'$,.... Ferner sind 2) die parallelen Grundkanten der ursprünglichen Prismen gleich, wie $AB=ab$, $Bc=bc$, ..., $A'B'=a'b'$, $B'C'=b'c'$,..... Daher sind 3) in den nicht parallel abgeschnittenen Prismen $ACEA'C'E'$ und $acea'c'e'$ die Seiten- und Grundkanten, paarweise verglichen, gleich gerichtet und gleichlang; mithin müssen auch die Winkel jedweder zwei Paar gleichgerichteter Kanten gleich sein, wie $ABB'=abb'$, $B'BC=b'bc$, $ABC=abc$,.... Endlich 4) sind an ihnen auch die Winkel der gleichgestreckten Ebenen gleich, wie die Grundkantenwinkel an AB und ab, und wie die Seitenkantenwinkel an AA' und aa'. Denkt man sich daher die beiden nicht parallel abgeschnittenen Prismen $ACEA'C'E'$ und $acea'c'e'$ dergestalt zu einander gebracht, dass zwei gleiche Kanten, AA' und aa', und ihre gleichen Kantenwinkel überein fallen; so kommen auch die, diese Kanten bildenden Seitenebenen und die an den Grenzpunkten derselben befindlichen Ecken, wie jene an A und a, an A' und a', und überhaupt jeden zwei parallel gestellten Ecken, mit einander überein; ein solches Prisma $acea'c'e'$ wird gleichsam zwischen der sie beide einhüllenden prismatischen Fläche $Ab'Cd'Ea'$, um die Länge einer Seite Aa oder $A'a'$ der ursprünglichen Prismen, von a nach A geschoben und füllt sonach das andere Prisma $ACEace$ ganz aus. Weil nun in dieser Lage der nicht parallel abgeschnittenen Prismen $ACEA'C'E'$ und $acea'c'e'$ jedweder Unterschied zwischen ihnen aufgehoben erscheint, so sind sie congruent. — Zieht man demnach von denselben das ihnen gemeinschaftliche eben solche Prisma $aceA'C'E'$, oder sie selbst von dem ganzen Prisma $ACEa'c'e'$ ab; so müssen die Reste, welche eben jene mit einander zu vergleichenden ursprünglichen Prismen $ACEace$ und $A'C'E'a'c'e'$ sind, gleich gross sein.

§. 2. *Lehrsatz. II.* Prismen von gleichen Seiten und Querschnitten sind gleich.

Beweis. Können die gleichen Querschnitte

1) entweder als Aggregate oder als Unterschiede congruenter Vielecke dargestellt oder dadurch erzeugt werden, dass einige stückweise congruente Vielecke vereint und andere davon abgetrennt werden; so lege man durch die Geraden, welche die gleichen Querschnitte als Zusammensetzungen oder Ueberreste

congruenter Vielecke vorstellen, Ebenen zu den Seiten der Prismen parallel, bis sie in die, wo nöthig erweiterten, Grundebenen einschneiden. Dann erscheinen auch die Prismen selbst auf die nemliche Weise als Summen oder Reste von gleichlangen Prismen mit congruenten Querschnitten, also vermöge §. 1. von gleichgrossen Prismen, und sind daher gleich.

2) Sind die Querschnitte *Dreiecke* oder *Parallelogramme*, folglich die Prismen dreiseitig oder Parallelepipede, und haben die Querschnitte a) eine Seite gleich, also wegen ihrer eigenen Gleichheit auch die, der Seite als Grundlinie angehörige, Höhe gleich; so können sie bekanntlich leicht als Summen oder Differenzen congruenter Dreiecke oder Trapeze vorgestellt werden*), daher sind die Prismen, vermöge 1), einander gleich. Haben aber b) die als Querschnitte vorkommenden zwei gleichen Dreiecke oder Parallelogramme keine Seite gleich; so kann man zur Hilfe ein drittes Dreieck oder Parallelogramm construiren, welches beiden gleicht und mit jedem eine Seite gleich hat.**) Bildet man dann über diesem als Querschnitt ein eben so langes Prisma wie die zwei verglichenen; so sind diese einzeln, vermöge a), *ihm* gleich, also auch *einander* selbst gleich.

3) Sind die Querschnitte der Prismen *Vielecke, die sich in einder verwandeln lassen*; so können sie nicht bloss, wenn durch solche Verwandlung zunächst nur eine Seite weggebracht wird, sondern auch, weil dies sich wiederholt, ganz allgemein als Summen oder Unterschiede theils von congruenten Vielecken, theils von gleichen Dreiecken oder Parallelogrammen dargestellt werden. Mithin sind auch die Prismen selbst gleich, da sie als eben solche Summen oder Unterschiede von Prismen die vermöge 1) und 2) gleich sind, sich vorstellen lassen.

4) Seien endlich die gleichgrossen Querschnitte Q, Q' zweier gleichlanger Prismen P, P' *was immer für Vielecke von gleich- oder ungleichviel Seiten*. Man denke sich diese gleichen Querschnitte nach und nach in Dreiecke oder Parallelo-

---

*) Für Parallelogramme ersieht man dies aus den gewöhnlichen Lehrbüchern nach Euklid. Elem. I. 35, oder einfacher nach Leslie aus Vega's Vorles. über Math. 7. Aufl. verbessert v. Matzka. 2. Bd. §. 389; für Dreiecke aus *Gerwien's* sinnreicher Zertheilung gleicher Dreiecke in congruente Stücke, in Crelle's Journal Bd. X. S. 228, oder im Archiv. 4. Theil. S. 237.

**) Diese planimetrische *Hilfsaufgabe* lässt sich wie folgt einfach lösen.

Denkt man sich (Taf. II. Fig. 2) zu dem einen Parallelogramm $ABCD$ das gleiche so gebracht, dass eine Spitze A derselben übereinfalle, eine Seite Ab längs der anderen AB liege und das Parallelogramm selbst zum Theil auf das erstere in die Lage $Abcd$ komme, so müsste Ab und AB ungleich sein. Sei Ab die kleinere; dann muss das über ihr zwischen den nemlichen Parallelen AB und CD wie $ABCD$ liegende Parallelogramm $Abc\mathfrak{d} < ABCD$, also auch $< Abcd$ sein, folglich die aus A ausgehende Seite Ad die CD in $\mathfrak{d}$ schneiden. Der um A mit dem Halbmesser Ad beschriebene Kreisbogen schneidet demnach die CD in zwei Punkten, von denen einer δ. Führt man nun die $A\delta$, welche $= Ad$, und $B\gamma \parallel A\delta$, so ist $AB\gamma\delta$ das geforderte Parallelogramm; denn es ist $= ABCD$, daher auch $= Abcd$, und hat mit jenem die Seite AB und mit diesem die Seite $Ad = A\delta$ gleich.

gramme q, q' verwandelt, die demnach ebenfalls gleich werden müssen, und stelle sich über diesen dreiseitigen oder parallelogrammischen Querschnitten q, q' eben so lange Prismen p, p' vor. Dann ist vermöge 3), wegen $q=Q$ und $q'=Q'$, auch $p=P$ und $p'=P'$. Allein wegen $q=q'$ ist nach 2) auch noch $p=p'$, daher muss auch $P=P'$ sein.

Der behauptete Lehrsatz gilt demnach völlig allgemein.

B. Proportionalität der Prismen.

§. 3. *Lehrsatz. I.* **Prismen von gleichen Seiten sind ihren Querschnitten direct proportional.**

Beweis. Man denke sich zwei den Querschnitten Q, q der gleichlangen Prismen P, p congruente oder gleiche Vielecke Q', q' mit einer Seite oder einem Theil derselben an und neben, jedoch ganz ausser einander gelegt, so dass sie, wenn man diese gemeinschaftliche Seite auslässt, zusammen ein Vieleck $=Q'+q'$ ausmachen. Nimmt man nun dieses Vieleck zum Querschnitt eines eben so langen Prisma, so muss der durch die wiederhergestellt gedachte gemeinsame Seite gehende Diagonalschnitt das Prisma in zwei Prismen P', p' von den Querschnitten Q', q' zertheilen, welche den Prismen P, p gleich sein müssen, weil sie mit diesen die Querschnitte und Seiten gleich oder congruent haben. Das den Querschnitt $Q'+q'=Q+q$ enthaltende Prisma $P'+p'$ ist also $=P+p$, d. h. zur Summe der Querschnitte Q, q gehört bei gleichen Seiten die Summe der zugehörigen Prismen P, p; mithin sind die gleichlangen Prismen ihren Querschnitten direct proportionirt, nemlich $P:p=Q:q$. *)

§. 4. *Lehrsatz II.* **Prismen von gleichen Querschnitten sind ihren Seiten direct proportional.**

Beweis. Seien P, p irgend zwei Prismen von gleichen Querschnitten, und S, s ihre Seiten. Man denke sich eine prismatische Fläche von einem eben so grossen Querschnitte, auf ihrer unbestimmt langen Seite die Seiten S und s nach einander abgetragen, folglich in ihre Summe $S+s$ vereint, und endlich durch die erhaltenen drei Auftragepunkte parallele Ebenen geführt. Dadurch erhält man an der Seite $S+s$ ein Prisma, das aus zwei Prismen besteht, welche den Prismen P und p einzeln gleich sind, weil sie mit ihnen Querschnitt und Seite gleich haben, und das daher $=P+p$ ist. Zur Summe jeder zwei Seiten gehört dem-

---

*) Diese kurze und gründliche Beweisführung über die directe Proportionalität zweier zusammengehöriger Gattungen von Grössen scheint den mathematischen Schriftstellern und Lehrern nur wenig bekannt zu sein, da ich sie bloss in La Place Mécanique céleste. vol. 1. pag. 15 angedeutet und in Dr. Jos. Knar's, Prof. der Mathematik an der Grätzer Universität, Anfangsgründen der reinen Mathematik, 2 Theile. Arithmetik und Geometrie. Grätz, bei Damian und Sorge. 1829, im §. 528 des 1. Theils erwiesen, und in den §§. 260, 261, 399, 670, 671 des 2. Theils angewendet finde. Dieses kleine österreichische, ja sogar nur steyerische, Werkchen übertrifft, besonders in der Gründlichkeit und Systematik der Behandlung seines Gegenstandes, sehr viele derartige Schriften, und verdient daher mehr gekannt und nachgeahmt zu werden.

nach bei gleichen Querschnitten die Summe der zugehörigen Prismen; mithin sind Prismen von gleichen Querschnitten ihren Seiten direct proportional, nemlich $P:p=S:s$.

§ 5. *Hauptlehrsatz.* **Prismen überhaupt sind ihren Querschnitten und Seiten zusammengesetzt direct proportional;** oder: **Prismen überhaupt stehen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse ihrer Querschnitte und Seiten.**

Denn sie sind, nach §. 3., bei gleichen Seiten, ihren Querschnitten, und nach §. 4., bei gleichen Querschnitten, ihren Seiten direct proportional, daher *) überhaupt ihren Querschnitten und Seiten zusammengesetzt direct proportional.

Haben demnach die Prismen P, p die Querschnitte Q, q und die Seiten S, s, so ist

$$P : p = \left.\begin{matrix} Q : q \\ S : s \end{matrix}\right\}$$

§. 6 *Folgesatz.* **Prismen überhaupt verhalten sich zu einander wie die Producte der Zahlwerthe **) ihrer Querschnitte und Seiten.**

Denn behält man wie üblich die gewählte Bezeichnung der Querschnitte und Seiten auch für ihre Zahlwerthe bei, so gilt die angesetzte Proportion, da man in jedem Verhältnisse von (gleichartigen) Grössen anstatt dieser ihre (auf einerlei Messeinheit bezogenen) Zahlwerthe einsetzen darf, auch jetzt noch. Da aber lassen sich die beiden Zahlenverhältnisse durch Multiplication zusammensetzen, und man erhält die behauptete Proportion

$$P : p = QS : qs.$$

C. Messung des Raumes eines Prisma.

§. 7. *Körpereinheit.* Zur Messeinheit der Körper setzt man gewöhnlich ein Prisma fest, dessen Seite die Einheit der Längen und dessen Querschnitt die Einheit der Flächen ist. Fast durchgehends nimmt man dazu den **Würfel**, dessen Seite die Längeneinheit ist, oder die sogenannte **cubirte Längeneinheit.**

§ 8. *Messung oder Ausdruck des Inhalts der Prismen.* **Der Rauminhalt eines Prisma gleicht dem Producte der Zahlwerthe des Querschnittes und der Seite desselben.**

Denn lässt man in der letzten Proportion die Zeichen der Räume der Prismen, wie es erlaubt ist, auch die Zahlwerthe, die **Raum- oder Körperinhalte**, der Prismen vorstellen, und nimmt man jenes Prisma zur Körpereinheit, also seinen Zahl-

*) nach Knar Arithmetik §. 532.

) gewöhnlich, jedoch grammatisch unrichtig, Zahlenwerthe, und wohl eigentlich **Werthzahlen?

Digitized by Google

werth $P=1$, dessen Querschnitt den Zahlwerth $Q=1$ und die Seite den Zahlwerth $S=1$ hat: so geht diese Proportion in

$$1 : p = 1.1 : qs$$

über, und daraus folgt $p = qs$.

D. Einführung der Grundebene und Höhe der Prismen.

§. 9. *Leitender Lehrsatz.* **In jedem Prisma verhält sich der Querschnitt zur Grundebene wie die Höhe zur Seite; oder: In jedem Prisma ist das Product aus den Zahlwerthen des Querschnittes und der Seite gleich dem Producte aus den Zahlwerthen der Grundebene und Höhe.**

Denn führt man, da in einer prismatischen Fläche alle parallelen Schnitte congruent ausfallen müssen, in einem Prisma *ACca* (Taf. II. Fig. 3.) den Querschnitt $\alpha\beta\gamma\delta$, so dass er eine Grundebene desselben, *ABCD*, in der Geraden *KL* schneidet; so ist er jederzeit die (winkelrechte) Projection jeder Grundebene auf einer auf den Seiten des Prisma senkrechten (Projections-) Ebene. Projicirt man nun auf die Durchschnittslinie der Grundebene und ihrer Projection — des Querschnittes — sämmtliche ihrer Spitzen; so haben die Spitzen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des Querschnittes mit denjenigen Spitzen *A, B, C, D* der Grundebene, deren Projectionen sie sind, einerlei Projectionen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, und die Projicienden $\alpha\mathfrak{a}, \beta\mathfrak{b}, \gamma\mathfrak{c}, \delta\mathfrak{d}$ der ersteren Spitzen sind selbst die Projectionen der Projicienden $A\mathfrak{a}, B\mathfrak{b}, C\mathfrak{c}, D\mathfrak{d}$ der letzteren Spitzen auf der Ebene des Querschnittes. — Durch diese Projicirenden werden beide Vielecke in einerlei Weise als Aggregate oder Unterschiede theils von rechtwinkligen Dreiecken, theils von rechtwinkligen Trapezen dargestellt. Jedes solche Bestandstück des Querschnittes, wie $E\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{a}\alpha\delta\mathfrak{d}$, ist zugleich die Projection des analogen Bestandstückes $E\mathfrak{a}A$, $\mathfrak{a}AD\mathfrak{d}$ der Grundebene, mit dem es in der Durchschnittslinie *KL* eine Seite gemein hat. Daher verhält sich jedes rechtwinklige Dreieck $E\mathfrak{a}A$ der Grundebene zu seiner Projection $E\mathfrak{a}\alpha$, wie seine projicirte Kathete $\mathfrak{a}A$ zu ihrer Projection $\mathfrak{a}\alpha$; und jedes rechtwinklige Trapez $\mathfrak{a}AD\mathfrak{d}$ der Grundebene verhält sich zu seiner Projection $\mathfrak{a}\alpha\delta\mathfrak{d}$ wie die Summe $\mathfrak{a}A + \mathfrak{d}D$ seiner parallelen Seiten zur Summe $\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{d}\delta$ ihrer Projectionen. — Allein diese projicirten Seiten der Stücke der Grundebene bilden mit ihren Projectionen, mit denen sie insgesammt auf der Durchschnittslinie *KL* der Grundebene und des Querschnittes senkrecht sind, den spitzen Winkel dieser zwei Ebenen; mithin auch den spitzen Winkel jeder zwei auf diesen Ebenen senkrechten Geraden, wie der Höhe *AH* mit einer Seite *Aa* des Prisma, deren Projection sie ist. Ferner sind unter einerlei Winkel projicirte Geraden ihren Projectionen proportional. Mithin: so wie sich die Seite *Aa* des Prisma zu dessen Höhe *AH*, ihrer Projection, verhält, eben so verhält sich jede projicirte Seite jeglichen Stückes der Grundebene — oder beziehlich jede Abtheilungslinie der Grundebene — zu ihrer Projection; daher auch, dem Obigen gemäss, jedes Stück (rechtwinkliges Dreieck oder Trapez) der Grundebene zu seiner Projection auf dem Querschnitt; mithin

verhält sich auch eben so die ganze Grundebene $ABCD$ zu ihrer Projection, dem Querschnitt $\alpha\beta\gamma\delta$; nemlich $Aa : AH = ABCD : \alpha\beta\gamma\delta$, oder auch $\alpha\beta\gamma\delta : ABCD = AH : Aa$.

Bezeichnet man nun den Zahlwerth (Flächeninhalt) des Querschnittes mit q, jenen der Grundebene mit b, dann den Zahlwerth (die Länge) der Höhe mit a und jenen der Seitenkante mit s: so gibt diese Proportion, durch Einführung der Zahlwerthe ihrer Glieder, die folgende $q : b = a : s$, daher die Gleichung

$$qs = ab.$$

§. 10. *Gewöhnlicher Ausdruck des Rauminhaltes der Prismen.* Der Rauminhalt eines Prisma gleicht dem Producte der Zahlwerthe der Grundebene und der Höhe.

Denn vermöge §. 8. ist des Prisma Rauminhalt $p = qs$, und nach §. 9. das Product $qs = ab$, daher auch $p = ab$.

Zweites Verfahren.

A. Vergleichung der Prismen.

§. 1. *Hauptlehrsatz. I.* Wie oben im ersten Verfahren. §. 1.

§. 2. *Lehrsatz. II.* Parallelepipede von gleichen Grundebenen und Höhen sind gleich.

Beweis. I) Haben die Parallelepipede $ACEG$ und $aceg$ (Taf. II. Fig. 4^a u. 4^β) auch noch die Grundkanten AB und ab, und daran die Kantenwinkel gleich; so sehe man sie als Prismen an, deren Seiten diese gleichen Kanten und deren Grundebenen die von ihnen geschnittenen Begrenzungsebenen AH, BG und ah, bg sind, und führe auf denselben Seiten senkrecht die Querschnitte $KLMN$ und $klmn$, endlich noch aus den gleichliegenden Spitzen N und n die nothwendig in die Ebenen der Querschnitte fallenden Höhen NP und np, weil jene Ebenen und diese Geraden durch einerlei Punkt gehend auf den (ursprünglichen) Grundebenen AC, ac zugleich senkrecht stehen. — Diese Querschnitte nun sind, als Schnitte in parallelepipedischen Flächen, Parallelogramme und aus folgenden Gründen einander congruent. Die Winkel an K, k sind, weil ihre Ebenen, also auch ihre Schenkel, auf den Kanten AB, ab senkrecht stehen, die Winkel an diesen Kanten, also der Annahme gemäss gleich; daher haben die Parallelogramme sämmtliche Winkel stückweise gleich. Die nach der Voraussetzung gleichen Höhen NP, np sind auf den Grundebenen AC, ac senkrecht, folglich auch auf den durch ihre Fusspunkte gehenden Geraden KL und kl dieser Ebenen, und sonach an P und p rechte und desswegen gleiche Winkel. In den Dreiecken NPK und npk sind demnach $NP = np$, $K = k$, $P = p$, nemlich eine Seite und zwei Winkel gleich; daher sind sie selbst congruent und die Seite $KN = kn$. Endlich sind die auf den Seiten oder Grundlinien AB, ab der Parallelogramme AC, ac senk-

rechten Geraden KL, kl die Höhen dieser Parallelogramme. Dieselben Parallelogramme AC, ac sind aber die nach der Annahme gleichen Grundebenen der Parallelepipede, und haben der Voraussetzung gemäss die Grundlinien AB, ab gleich; also müssen sie auch die Höhen KL, kl gleich haben. Mithin sind in den parallelogrammischen Querschnitten KM, km zwei zusammenstossende Seiten KL, KM und kl, km einander gleich; daher, weil nach dem Früheren auch alle ihre Winkel stückweise gleich sind, müssen diese Parallelogramme und respective Querschnitte KM und km selbst congruent sein. — Die parallelepipedischen Prismen $AHBG$, $ahbg$ haben demnach vermöge der Voraussetzung die Seiten AB, ab gleich, und nach dem Erwiesenen die Querschnitte KM, km congruent; mithin sind sie, zu Folge §. 1., einander gleich.

2) Haben die Parallelepipede $ACEG$ und $\mathfrak{aceg}$ (Taf. II. Fig. 4^{α} u. 4^{γ}) die Grundebenen AC, $\mathfrak{ac}$ und die Höhen gleich, ohne dass der vorher in 1) betrachtete Fall eintritt: so construire man erstens zu den zwei gleichen Parallelogrammen AC, $\mathfrak{ac}$ ein drittes ihnen gleiches ac, (Taf. II. Fig. 4^{β}), das mit jedem aus ihnen eine Seite gleich hat, nemlich $ab = AB$ und $bc = \mathfrak{bc}$,*) und führe dazu, als zu einer Grundebene, in dem der Höhe NP gleichen senkrechten Abstande pn eine unbestimmt weit ausgedehnte Ebene nh parallel; zweitens übertrage man den auf der Grundkante AB senkrechten Querschnitt KM an die gleiche Grundkante ab als Querschnitt km, oder auch nur den Winkel †) LKN der Kante AB an die Kante ab in den Winkel lkn, und lege durch ab und kn die Seitenebene af, dann zu ihr parallel durch cd die Seitenebene dg; endlich drittens übertrage man eben so von der Kante $\mathfrak{bc}$ an die gleiche bc entweder den Querschnitt $\mathfrak{qr}$ nach qr oder den Kantenwinkel †) $\mathfrak{q}$ nach q, und führe durch bc unter dem Winkel $q = \mathfrak{q}$ gegen ac geneigt die Seitenebene bg und dazu parallel durch ad die Ebene ah. Dann begrenzen die durch diese drei Vorgänge erhaltenen drei Paar parallelen Ebenen ein neues Parallelepiped $aceg$. Mit diesem hat nun jedes der zu vergleichenden Parallelepipede $ACEG$ uud $\mathfrak{aceg}$, ausser der Grundebene und Höhe auch noch eine Grundkante und daran den Winkel †) gleich, daher sind sie ihm einzeln, nach dem ersten Falle, folglich auch einander selbst gleich.

---

*) nach der Note **) zu 2) in obigem §. 2.

†) Kritische Leser fühlen gewiss mit mir an dieser Stelle die bereits von H. Wolf im Archiv. Theil 3. Heft 4, Seite 446. angeregte Nothwendigkeit, die Abweichung oder Verschiedenheit, welche bei zwei Geraden an ihrem Durchschnittspunkte „Winkel" heisst, bei zwei Ebenen an ihrer Durchschnittslinie anders, aber wie? zu nennen, so wie z. B. das, was bei Geraden Richtung, bei krummen Linien Sinn heisst, bei Ebenen Streckung oder ihr Streichen genannt wird. Van den a. a. O. citirten Benennungen taugt schlechterdings keine. Vielleicht könnte und wollte einer unserer Koryphäen unter den Sprachforschern, etwa Herr Graff aus seinem preisswürdigen „nlthochdeutschen Sprachschatze" — mit einem passenden ein- oder höchstens zweisilbigen Wurzelnamen den Geometern helfen. — Ich benütze zugleich die Gelegenheit, um darauf aufmerksam zu machen, dass eben so in der analytischen Goniometrie, wenn man, strenge Wissenschaftlichkeit erstrebend, aus den Winkeln den überflüssigen Kreisbogen herauswirft, für den fast immer stillschweigend als Einheit zu Grund gelegten Winkel eine passliche Benennung Noth thut. Gewöhnlich bestimmt man ihn da-

Anmerkung. Wie man, ohne Berufung auf §. 1. oder vielmehr diesen in den Beweis einflechtend, die Gleichheit von Parallelepipeden nachweisen könne, habe ich bereits im 4. Bande des Archivs. Heft 3. S. 362. gezeigt.

§. 3. *Besonderer Fall*. Ein Parallelepiped wird durch jede Diagonalebene in zwei gleiche dreiseitige Prismen zertheilt.

Denn denkt man sich in dem Parallelepipede $ADEHBCFG$ (Taf. II. Fig. 4^a.) die Diagonalebene $CDEF$, so schneidet diese den Querschnitt $KLMN$, der bekanntlich ein Parallelogramm ist, in der Diagonale LN, und diese theilt den Querschnitt in zwei congruente Dreiecke LKN und LMN. Die beiden dreiseitigen Prismen, in die das Parallelepiped zerlegt wird, haben demnach die Querschnitte congruent und die Seitenkanten gleich; mithin sind sie nach §. 1. einander gleich.

B. Proportionalität der Parallelepipede.

I. Bei gleichen Höhen.

§. 4. Parallelepipede von gleichen Höhen sind ihren Grundebenen direct proportional.

Denn verwandelt man die als Grundebenen irgend zweier Parallelepipede p, P vorkommenden Parallelogramme b, B zuerst so, dass sie eine Seite oder die Höhe gleich haben, nachher aber noch so, dass sie einerlei Winkel besitzen; so kann man die entstehenden ihnen gleichen Parallelogramme b', B' an jener gleichen Seite oder zwischen zweien um die gleiche Höhe abständigen Parallellinien dergestalt an einander rücken, dass sie nur ein Parallelogramm $b'+B'=b+B$ ausmachen. Auch kann man nach einem minder bekannten Satze des Pappus (lib. 4. prop. 1.)*) die Parallelogramme b, B unter Einem in zwei andere b', B' von einerlei Winkeln verwandeln und in ein Prarallelogramm vereinen, dessen eine Seite oder ein Winkel wählbar ist. Legt man dann durch die Seiten des zusammengesetzten Parallelogramms $b'+B'$, als einer neuen Grundebene, und durch seine Trennungslinie, Seitenebenen paarweise parallel, und in einem der Höhe der Parallelepipede p, P gleichen Abstande von ihm die zweite Grund-

durch, dass der Kreisbogen desselben seinem Halbmesser gleicht; er kann aber bei solchem Vorgange — wovon ein anderes Mal — als die Grenze des Quotienten eines unendlich abnehmenden Winkels durch seinen Sinus oder durch seine Tangente erklärt werden. Diesen Winkel nun, möchte ich, in Anbetracht, dass er völlig bestimmt und zugleich spitz sein muss, so wie man das Neunzigstel des rechten Winkels „Grad" nennt, mit dem kurzen veralteten Namen „der Gehren" (französ. le chanteau) bezeichnen. Man lese über dieses Wort die Wörterbücher von Adelung, Heinsius, Heyse, u. a., und ich hoffe, man werde es passend finden. Neue angemessene wissenschaftliche Benennungen schaffen ist zwar, weil sie nicht jedermann gefallen, misslich; allein sie ganz entbehren oder unpassende gebrauchen müssen, ist peinlich.

*) Van Swinden Geometrie. Buch 2. §. 91. Tellkampf Vorschule. Geometrie. Cap. 5. §. 262. 7.

ebene parallel, so entsteht ein Parallelepiped, das aus zweien zusammengesetzt ist, welche einzeln den Parallelepipeden p, P gleichen, weil sie mit ihnen Grundebene und Höhe gleich haben (§. 2.). Der Summe $b+B$ jeder zwei Grundebenen b, B entspricht demnach bei einerlei Höhe die Summe $p+P$ der ihnen angehörigen Parallelepipede p, P; mithin sind gleiche Parallelepipede ihren Grundebenen geradezu proportional, nemlich $p:P=b:B$.

II. Bei gleichen Grundebenen.

§. 5. **Parallelepipede auf gleichen Grundebenen sind ihren Höhen direct proportional.**

Denn von was immer für zwei Parallelepipeden p, P über gleichen Grundebenen trage man die Höhen a, A unmittelbar nach einander in eine Gerade $a+A$ zusammen; errichte auf dieser in den aufgetragenen drei Punkten Ebenen senkrecht, also unter sich parallel; construire in einer solchen Ebene ein den gleichen Grundebenen gleiches Parallelogramm; und lege endlich durch dessen Seiten paarweise parallele Ebenen. Bei solchem Vorgange entsteht über der Höhe $a+A$ ein Parallelepiped, das aus zweien zusammengesetzt ist, die mit den beiden gegebenen p, P Grundebene und Höhe gleich haben, also ihnen stückweise gleich sind (§. 2.). Bei gleichen Grundebenen gehört demnach zur Summe $a+A$ jeder zwei Höhen a, A die Summe $p+P$ der zugehörigen Parallelepipede p, P; mithin sind Parallelepipede über gleichen Grundebenen ihren Höhen direct proportionirt, nemlich $p:P=a:A$.

III. Ueberhaupt.

§. 6. **Parallelepipede sind überhaupt im zusammengesetzten Verhältnisse aus den geraden Verhältnissen ihrer Grundebenen und Höhen;**

oder: **Parallelepipede verhalten sich wie die Producte der Zahlwerthe ihrer Grundebenen und Höhen.**

Denn sie sind nach §. 4., bei gleicher Höhe, ihren Grundebenen, und nach §. 5., bei gleichen Grundebenen, ihren Höhen direct proportional; mithin überhaupt ihren Grundebenen und Höhen zusammengesetzt direct proportionirt.

Haben demnach die Parallelepipede p, P die Grundebenen b, B und die Höhen a, A, so ist

$$p : P = \left. \begin{matrix} b : B \\ a : A \end{matrix} \right\}$$

Benützt man die Bezeichnung der Grundebenen und Höhen auch für ihre Zahlwerthe, so darf man in der noch bestehenden Proportion die beiden Zahlenverhältnisse mittels Multiplication zusammensetzen, und man erhält

$$p : P = ab : AB.$$

C. Messung des Raumes eines Prisma.

§. 7. *Körpereinheit.* Zur Einheit der Körper wählt man gewöhnlich ein Parallelepiped, dessen Höhe die Linieneinheit und dessen

Digitized by Google

Grundebene die Flächeneinheit ist. Fast immer ertheilt man ihr die Gestalt des Würfels, dessen Seite die Längeneinheit ist.

§. 8. *Messung des Parallelepipeds.* Der Rauminhalt eines Parallelepipeds gleicht dem Producte der Zahlwerthe der Höhe und Grundebene desselben.

Denn bedeuten in der letzten Proportion die Zeichen der Parallelepipede, wie es verstattet bleibt, auch die Zahlwerthe, die Raum- oder Körperinhalte der Parallelepipede, und nimmt man dasjenige Parallelepiped zur Körpereinheit, also seinen Zahlwerth $P = 1$, dessen Höhe die Länge $A = 1$, und dessen Grundebene den Flächeninhalt $B = 1$ hat; so verwandelt sich die Proportion in

$$p : 1 = ab : 1 . 1,$$

folglich ist $p = ab.$

§. 9. *Messung jedes Prisma.* Der Rauminhalt eines Prisma ist das Product der Zahlwerthe seiner Höhe und Grundebene.

Denn ist das Prisma

1) dreiseitig und seine Grundebene b, so kann es vermöge §. 3. als Hälfte eines eben so hohen Parallelepipeds über der doppelten Grundebene, $2b$, dargestellt werden, dessen Inhalt also $= 2b . a$, daher der seinige $= ab$ ist.

2) Jedes andere Prisma aber lässt sich in eben so viele dreiseitige Prismen als seine Grundebene b in Dreiecke zerlegen. Mithin ist sein Inhalt p die Summe der Producte der gemeinsamen Höhe a aller dreiseitigen Prismen in gesammte Grunddreiecke, also auch das Product des gleich bleibenden Factors, der Höhe a des Prisma, in die Summe der Grunddreieke, d. i. in die Grundebene b des Prisma; folglich $p = ab$.

Digitized by Google

XIX.

Beweis und Berichtigung des im 4. Bande des Archivs, 3. Heft, S. 332, Nr. XXXV, Satz 2, vorgelegten Lehrsatzes.

Von dem

Herrn Professor W. Matzka

an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow in Galizien.

Der Inhalt dieses zum Erweise vorgegebenen Satzes ist kurz folgender:

> Eine dekadische Zahl $D=10N+A$ ist durch eine eben solche $d=10n\pm a$ theilbar, wenn $An\mp aN$ dadurch theilbar ist.

Beweis. Durch die Zahl d ist offenbar ihr Vielfaches Nd theilbar, daher auch der ihm gleiche Ausdruck $N(10n\pm a)+An-An=n(10N+A)\pm aN-An=nD-(An\mp aN)$. Ist nun $An\mp aN$ durch d theilbar, so muss dies auch nD sein. Wenn demnach n und d, also, weil $d=10n\pm a$ ist, auch n und a, keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, muss sicher D durch d theilbar sein.

Allein! falls n und a, daher auch n und d, einen gemeinsamen Theiler haben, folgt daraus, dass nD durch d theilbar sein muss, keineswegs nothwendig, sondern nur etwa zufällig, die Theilbarkeit von D durch d.

So ist z. B. der letzte a. a. O. gebrauchte Theiler 68 von dieser bedenklichen Beschaffenheit, weil 6 und 8 zugleich durch 2 theilbar sind. In der That ist zwar die daselbst gewählte Zahl 816 durch 68 theilbar, allein 374 ist es nicht, obgleich $37.8-4.6=296-24=272$ durch 68 theilbar ist.

Mithin ist in den aufgestellten Lehrsatz die berichtigende Einschränkung aufzunehmen:

> „wofern a und n keinen Theiler gemeinschaftlich haben."

Berechnung solcher untheilbaren Zahlen. Derlei Zahlen $D=10N+A$, die durch eine vorgelegte Zahl $d=10n\pm a$, in welch r n und a einen grössten gemeinschaftlichen Theiler

Digitized by Google

$t > 1$ haben, nicht theilbar sind, obwohl $An \mp aN$ es ist, können auf folgende Weise berechnet werden.

Es soll $An \mp aN$ durch d theilbar, also
$aN \equiv \pm An$, *mod* d sein.

Geben nun, wenn man die congruenten Zahlen und den Modul durch ihren grössten gemeinschaftlichen Theiler t theilt, die Zahlen a, n, d durch t getheilt, die Quotienten α, ν, δ; so verwandelt sich die Congruenz in

$$\alpha N \equiv \pm \nu A, \text{ mod } \delta.$$

Lös't man diese Congruenz in Bezug auf N, indem man A überhaupt eine der zehn Ziffern $0, 1, \ldots 9$ gelten lässt, nach einem der bekannten Verfahren auf; so sei N' ein, die Zahl δ nicht übersteigender, Werth von N. Dann ist

$$N = N' + z\delta \text{ und } D = 10N' + A + 10\delta . z,$$

wenn z durchlaufend sämmtliche absoluten Anzahlen vorstellt.

Weil in $\delta = d : t = (10n \pm a) : t = 10\nu \pm \alpha$ die Zahlen α und ν keinen Theiler mehr gemeinschaftlich besitzen, muss die Zahl $10N' + A = D'$, dem geführten Beweise gemäss, durch δ theilbar sein. Da nunmehr $D = D' + 10\delta . z$ und $d = t\delta$ ist, so wird

$$\frac{D}{d} = \left(\frac{D'}{\delta} + 10z\right) : t = \frac{D'}{d} + \frac{2.5.z}{t}.$$

Demnach ist D allemal zugleich mit D' durch d theilbar oder untheilbar, so oft entweder

1. $t = 2$ oder 5 ist, oder
2. für z bloss Vielfache von t eingesetzt werden, oder endlich
3. z so gewählt wird, dass $\frac{D'}{\delta} + 10z$ durch t theilbar oder untheilbar ausfällt.

Beispiel. Bei dem Theiler $d = 68 = 6.10 + 8$ hat man $n = 6$, $a = 8$, also $t = 2$ und $\delta = 34$, $\nu = 3$, $\alpha = 4$; mithin soll $4N \equiv 3A$, *mod* 34 sein. Da 4 und 34 durch 2 theilbar sind, muss es auch A sein. Setzt man daher $A : 2 = A'$ oder $A = 2A'$, und theilt man sowohl die Zahlen als den Modul durch 2, so wird $2N \equiv 3A'$, *mod* 17. Dazu findet sich leicht $2 \times -8 = -16 \equiv 1$, *mod* 17, folglich, wenn man mit -8 multiplicirt, $N \equiv N' \equiv 10A'$, *mod* 17, wobei $N' \overline{\gtrless} 34$. Sofort ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe:

Hilfszahl	$A' =$	0,	1,	2,	3,	4
Ziffer der Einer	$A' =$	0,	2,	4,	6,	8
kleinste Zehnermenge	$N' =$	0,	10,	3,	13,	6
		17,	27,	20,	30,	23
kleinste Zahl	$D' =$	0,	102,	34,	136,	68
		170,	272,	204,	306,	238.

Schliesst man hievon die durch 68 theilbaren Zahlen 68, 136, 204, 272 aus, und vermehrt man die Zehner der übrigen so oft man will widerholt um 34; so erhält man folgende, trotz der erfüllten Bedingung, durch 68 nicht theilbare Zahlen:

$D =$ 34, 102, 170, 238, 306,
374, 442, 510, 578, 646,
714, 782, 850, 918, 986, u. s. f.

Leichtere Bestimmungsweise. Sucht man, entweder mittels einer Tafel der Vielfachen der ganzen Zahlen oder durch wiederholte Addition, sämmtliche nach einander folgenden Vielfachen von $d:t=\delta$, und lässt man der Reihe nach jedes t^{te} solche Vielfache, dessen Multiplicator also selbst ein Vielfaches von t ist, hinweg, oder berechnet man erstlich alle Vielfachen von δ vor seinem $t$fachen, und vermehrt sie dann wiederholt um dieses $t$fache: so sind alle sich ergebenden Vielfachen von δ, weil ihr Multiplicator durch t nicht theilbar ist, derlei durch d untheilbare Zahlen D.

Denn je nachdem in $D = m\delta = \frac{m}{t} t\delta = \frac{m}{t} d$ der Multiplicator m durch t theilbar ist oder nicht, wird das Vielfache D durch d theilbar oder nicht. — Weil ferner $\delta = 10v \pm \alpha$ und $D = m\delta = 10mv \pm m\alpha$, also, wenn $\pm m\alpha = A \pm 10B$ ausfällt, $D = 10(mv \pm B = N) \pm A$ ist; so findet man $An \mp aN = Avt \mp \alpha tN = t(Av \mp \alpha N) = t[v(\pm m\alpha \mp 10B) \mp \alpha(mv \pm B)] = \mp B(10v \pm \alpha)t = \mp B\delta t = \mp Bd$, folglich die Bedingung, $An \mp aN$ sei durch d theilbar, jederzeit erfüllt.

XX.
Ueber die Normalen der Kegelschnitte.

Nach drei Aufsätzen des Herrn Gerono, Professeur de Mathématiques, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Terquem et Gerono. T. II. Paris. 1843. p. 16. 72. 170. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Mit den Normalen, die durch einen gegebenen Punkt an einen Kegelschnitt gezogen werden können, hat sich bekanntlich schon Apollonius in dem fünften Buche seines berühmten Werks über die Kegelschnitte beschäftigt, worüber man den Artikel Normale in dem mathematischen Wörterbuche. Thl. III. S. 688. nachsehen kann. Vorzüglich wichtig ist aber ferner eine Bemerkung von Legendre über die Kriterien, mittelst welcher sich die Anzahl der Normalen bestimmen lässt, die in den verschiedenen möglichen Fällen durch einen gegebenen Punkt an eine Ellipse gezogen werden können, welche man in dem Traité des fonctions elliptiques. T. II. Paris. 1825. p. 349. findet. An diese Bemerkung schliesst sich unmittelbar der Aufsatz des Herrn Gerono an, dessen wesentlichen Inhalt wir im Folgenden mittheilen werden.

I.

Die Gleichung einer Ellipse, welche wir zuerst betrachten wollen, sey

$$1)\ \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

wo a und b ihre gewöhnliche Bedeutung haben. Sind x_1, y_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes in dieser Ellipse, so ist bekanntlich

$$2)\ y-y_1=\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x-x_1)\ ^{*})$$

die Gleichung der durch diesen Punkt an die Ellipse gezogenen Normale. Bezeichnen wir daher jetzt durch α, β die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Ebene der Ellipse, und durch x, y die Coordinaten des Durchschnittspunkts einer durch den Punkt $(\alpha\beta)$ an die Ellipse gezogenen Normale mit der Ellipse**); so haben wir zur Bestimmung von x, y die beiden folgenden Gleichungen:

$$3)\ \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1, \\ \beta-y=\frac{a^2 y}{b^2 x}(\alpha-x); \end{cases}$$

oder

$$4)\ \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1, \\ b^2\beta x-a^2\alpha y+(a^2-b^2)xy=0; \end{cases}$$

oder, wenn wie gewöhnlich

$$a^2-b^2=e^2$$

gesetzt wird:

$$5)\ \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1, \\ b^2\beta x-a^2\alpha y+e^2 xy=0. \end{cases}$$

Setzen wir

$$6)\ \frac{a\alpha}{e^2}=f,\ \frac{b\beta}{e^2}=h;$$

so wird die zweite der Gleichungen 5):

---

*) Wenn man $\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}=i$ und $a^2-b^2=e^2$ setzt, so kann man die Gleichung der Normale der Ellipse auch unter der folgenden bemerkenswerthen Gestalt darstellen:

$$y=ix\mp\frac{ie^2}{\sqrt{a^2+b^2 i^2}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem x_1 eine positive oder eine negative Grösse ist (Comte: Traité élém. de géom. anal. p. 358.).

**) Wo (xy) immer der Punkt der Ellipse ist, in welchem auf derselben die durch den Punkt $(\alpha\beta)$ gezogene Normale senkrecht steht.

Digitized by Google

$$7)\quad bhx - afy + xy = 0.$$

Die erste der Gleichungen 5) kann auf folgende Form gebracht werden:

$$8)\quad \frac{ay}{b(a+x)} = \frac{b(a-x)}{ay},$$

und wenn man daher

$$9)\quad z = \frac{ay}{b(a+x)} = \frac{b(a-x)}{ay}$$

setzt; so hat man die beiden folgenden Gleichungen:

$$10)\quad ay - bzx = abz,\quad bx + azy = ab;$$

aus denen sich ohne Schwierigkeit:

$$11)\quad x = a\frac{1-z^2}{1+z^2},\ y = \frac{2bz}{1+z^2}$$

ergiebt. Führt man diese Werthe von x und y in die Gleichung 7) ein, so ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen die Gleichung

$$12)\quad z^4 + \frac{2(f+1)}{h}z^3 + \frac{2(f-1)}{h}z - 1 = 0,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$13)\quad A = \frac{2(f+1)}{h},\ B = \frac{2(f-1)}{h}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$14)\quad z^4 + Az^3 + Bz - 1 = 0.$$

Weil das letzte Glied dieser Gleichung des vierten Grades negativ ist, so hat dieselbe nach einem bekannten Satze von den Gleichungen*) jederzeit zwei reelle Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen; und da nun wegen der Gleichungen 11) jedem reellen Werthe von z reelle Werthe von x und y entsprechen, so sieht man zuvörderst, dass sich durch jeden Punkt immer mindestens zwei Normalen an eine Ellipse ziehen lassen.

Bezeichnen wir die vier Wurzeln der Gleichung 14) überhaupt durch m, n, p, q; so haben wir zwischen denselben bekanntlich die vier folgenden Gleichungen:

---

*) Supplemente zum mathematischen Wörterbuche. Thl. II. Artikel Gleichung. S. 396.

$$15)\quad \begin{cases} m+n+p+q=-A, \\ (mn+pq)+(mp+nq)+(mq+np)=0, \\ mnp+mnq+mpq+npq=-B, \\ mnpq=-1; \end{cases}$$

und können nun mit Hülfe dieser Gleichungen leicht die Gleichung des dritten Grades finden, deren Wurzeln die drei Grössen

$$mn+pq,\ mp+nq,\ mq+np$$

sind. Weil nämlich die Summe dieser drei Grössen nach 15) verschwindet, so hat die in Rede stehende cubische Gleichung die Form

$$16)\quad u^3+A_1u+B_1=0.$$

Ferner ist nach der Lehre von den Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1= \ & (mn+pq)\ (mp+nq) \\ & (mn+pq)\ (mq+np) \\ & (mp+nq)\ (mq+np). \end{aligned}$$

Durch Multiplication der ersten und dritten der Gleichungen 15) erhält man aber ohne Schwierigkeit nach einigen leichten Reductionen:

$$\begin{aligned} AB=4mnpq & +(mn+pq)\ (mp+nq) \\ & +(mn+pq)\ (mq+np) \\ & +(mp+nq)\ (mq+np). \end{aligned}$$

Also ist wegen der vierten der Gleichungen 15)

$$AB=A_1-4,$$

und folglich

$$A_1=AB+4.$$

Endlich ist nach der Theorie der Gleichungen

$$B_1=-(mn+pq)(mp+nq)(mq+np).$$

Entwickelt man das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so erhält man, mit Rücksicht auf die bekannte Relation

$$mnpq=-1,$$

ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} B_1= \ & m^2+n^2+p^2+q^2 \\ & -(m^2n^2p^2+m^2n^2q^2+m^2p^2q^2+n^2p^2q^2). \end{aligned}$$

Quadrirt man aber die erste und dritte der Gleichungen 15), und zieht dann die letztere von der ersteren ab, so erhält man, mit Rücksicht auf die Relation

$$(mn+pq)+(mp+nq)+(mq+np)=0,$$

ohne Schwierigkeit

$$A^2-B^2= m^2+n^2+p^2+q^2 -(m^2n^2p^2+m^2n^2q^2+m^2p^2q^2+n^2p^2q^2).$$

Also ist

$$B_1=A^2-B^2,$$

und die cubische Gleichung 16), deren Wurzeln die Grössen

$$mn+pq,\ mp+nq,\ mq+np$$

sind, wird daher

$$17)\quad u^3+(AB+4)u+A^2-B^2=0.$$

Bezeichnen wir die drei Wurzeln dieser Gleichung durch u_1, u_2, u_3; so können wir

$$18)\quad \begin{cases} u_1=mn+pq, \\ u_2=mp+nq, \\ u_3=mq+np \end{cases}$$

setzen, und erhalten hieraus die drei folgenden Gleichungen:

$$19)\quad \begin{cases} u_1-u_2=(m-q)(n-p), \\ u_2-u_3=(m-n)(p-q), \\ u_3-u_1=(m-p)(q-n). \end{cases}$$

Wenn nun

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2=0$$

ist, so sind nach der Theorie der cubischen Gleichungen*) die drei Wurzeln u_1, u_2, u_3 reell, und zwei derselben sind einander gleich. Sind also z. B. m und n die beiden reellen Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen, welche die Gleichung 14) jederzeit nothwendig haben muss, so ist wegen der zweiten der Gleichungen 19) die Differenz $p-q$ eine reelle Grösse. Wären nun aber p und q zwei imaginäre Wurzeln der Gleichung 14), so müssten dieselben nach der Theorie der Gleichungen von der Form

$$p=s+t\sqrt{-1},\ q=s-t\sqrt{-1}$$

sein, und es wäre folglich

$$p-q=2t\sqrt{-1},$$

diese Differenz also imaginär, was gegen das Obige streitet. Da-

*) M. vergl. z. B. Archiv. Thl. VI. S. 6.

her sind auch die Wurzeln p und q reell, und die Gleichung 14) hat folglich in diesem Falle vier reelle Wurzeln. Weil aber eine der Differenzen u_1-u_2, u_2-u_3, u_3-u_1 verschwindet, so müssen wegen der Gleichungen 19) unter diesen vier reellen Wurzeln zwei gleiche vorkommen.

Wenn ferner

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2>0$$

ist, so sind nach der Theorie der cubischen Gleichungen*) von den Wurzeln u_1, u_2, u_3 eine reell und zwei imaginär. Weil die beiden imaginären Wurzeln von der Form $v+w\sqrt{-1}$ und $v-w\sqrt{-1}$ sein müssen, so sind die Differenzen u_1-u_2, u_2-u_3, u_3-u_1 offenbar alle drei imaginär. Sind nun wieder z. B. m und n die beiden reellen Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen, welche die Gleichung 14) nothwendig haben muss, so ist wegen der zweiten der Gleichungen 19) die Differenz $p-q$ imaginär, und da, weil die imaginären Wurzeln der Gleichungen immer paarweise vorhanden sind, nicht bloss eine der beiden Grössen p und q imaginär sein kann, so müssen dieselben beide imaginär sein; folglich hat die Gleichung 14) in diesem Falle zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Wenn endlich

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2<0$$

ist, so sind nach der Theorie der cubischen Gleichungen**) die Wurzeln u_1, u_2, u_3 alle drei reell, und unter einander ungleich. Daher sind zuvörderst wegen der Gleichungen 19) die vier Wurzeln m, n, p, q offenbar sämmtlich unter einander ungleich. Sind aber wieder z. B. m und n die zwei reellen Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen, welche die Gleichung 14) nothwendig haben muss, so ist wegen der zweiten der Gleichungen 19) die Differenz $p-q$ eine reelle Grösse, woraus man ganz wie im ersten Falle schliesst, dass die Wurzeln p und q beide reell sind. Daher hat im vorliegenden Falle die Gleichung 14) vier unter einander ungleiche reelle Wurzeln.

Rücksichtlich der Normalen der Ellipse ergiebt sich hieraus nun unmittelbar Folgendes:

Wenn

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2=0$$

ist, so lassen sich durch den gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ drei Normalen an die Ellipse ziehen.

Wenn dagegen

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2>0$$

ist, so lassen sich durch den gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ nur zwei Normalen an die Ellipse ziehen.

Wenn endlich

*) A. a. O. S. 6. **) A. a. O. S. 7.

Digitized by Google

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2<0$$

ist, so können durch den gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ vier Normalen an die Ellipse gezogen werden.

Die vorhergehenden Bedingungen lassen sich aber auf einen eleganteren Ausdruck bringen.

Setzen wir nämlich

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^2=\lambda^3, \left(\frac{A-B}{4}\right)^2=\mu^3,$$

wo λ und μ offenbar positive Grössen sind, so ist, wie man leicht findet:

$$(A^2-B^2)^2=256\lambda^3\mu^3, AB=4(\lambda^3-\mu^3),$$

also

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2$$
$$=256\{(\lambda^3-\mu^3+1)^3+27\lambda^3\mu^3\},$$

und die Bedingungen

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2 \gtreqless 0$$

sind folglich offenbar erfüllt, wenn respective die Bedingungen

$$(\lambda^3-\mu^3+1)^3+27\lambda^3\mu^3 \gtreqless 0,$$

oder die Bedingungen

$$(\lambda^3-\mu^3+1)^3 \gtreqless -27\lambda^3\mu^3$$

erfüllt sind. Weil nun aber $-3\lambda\mu$ negativ, und die dritte Potenz von $\lambda^3-\mu^3+1$ positiv oder negativ ist, jenachdem diese Grösse selbst positiv oder negativ ist, so sind die vorhergehenden Bedingungen, wie leicht erhellen wird, jederzeit erfüllt, wenn respective die Bedingungen

$$\lambda^3-\mu^3+1 \gtreqless -3\lambda\mu,$$

d. i. die Bedingungen

$$\lambda^3-\mu^3+1+3\lambda\mu \gtreqless 0$$

erfüllt sind. Weil aber

$$\lambda^3-\mu^3=(\lambda-\mu)^3+3\lambda\mu(\lambda-\mu)$$

ist, so kann man an die Stelle der vorhergehenden Bedingungen die Bedingungen

$$(\lambda-\mu)^3+1+3\lambda\mu(\lambda-\mu+1) \gtreqless 0$$

setzen. Nun ist aber

$$(\lambda-\mu)^3+1=(\lambda-\mu+1)\{(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1\},$$

und die vorhergehenden Bedingungen werden also jederzeit erfüllt sein, wenn respective die Bedingungen

$$(\lambda-\mu+1)\{(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1+3\lambda\mu\}\gtreqless 0$$

erfüllt sind. Wenn $\lambda-\mu$ negativ ist, so ist die Grösse

$$(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1$$

offenbar positiv; ist aber $\lambda-\mu$ positiv, so ist, weil

$$(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1=(\lambda-\mu-1)^2+(\lambda-\mu)$$

gesetzt werden kann, die Grösse

$$(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1$$

ebenfalls positiv; und diese Grösse ist daher stets positiv. Da nun $3\lambda\mu$ positiv ist, so ist auch die Grösse

$$(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1+3\lambda\mu$$

stets positiv, und die Bedingungen

$$(\lambda-\mu+1)\{(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1+3\lambda\mu\}\gtreqless 0$$

können daher jederzeit durch die Bedingungen

$$\lambda-\mu+1\gtreqless 0,$$

d. i. nach dem Obigen durch die Bedingungen

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1\gtreqless 0$$

ersetzt werden. Daher ergiebt sich aus dem Vorhergehenden jetzt Folgendes:

Wenn

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1=0$$

ist, so lassen sich durch den gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ drei Normalen an die Ellipse ziehen.

Wenn dagegen

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1>0$$

ist, so können durch den gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ nur zwei Normalen an die Ellipse gezogen werden.

Wenn endlich

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1<0$$

ist, so lassen sich durch den gegebenen Punkt vier Normalen an die Ellipse ziehen.

Nach dem Obigen ist

$$\frac{A+B}{4}=\frac{f}{h}=\frac{a\alpha}{b\beta},$$
$$\frac{A-B}{4}=\frac{1}{h}=\frac{e^2}{b\beta};$$

also

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1=\left(\frac{a\alpha}{b\beta}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{e^2}{b\beta}\right)^{\frac{2}{3}}+1$$

oder

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1=\frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}}{(b\beta)^{\frac{2}{3}}},$$

und an die Stelle der Bedingungen

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1\gtreqless 0$$

können folglich, weil $(b\beta)^{\frac{2}{3}}$ eine positive Grösse ist, die Bedingungen

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}\gtreqless 0$$

gesetzt werden. Daher erhalten wir endlich den folgenden bemerkenswerthen Satz:

An die durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

charakterisirte Ellipse können durch einen gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ zwei, oder drei, oder vier Normalen gezogen werden, jenachdem, indem wie gewöhnlich $a^2-b^2=e^2$ gesetzt wird,

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}>0,$$

oder

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0,$$

oder

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}<0$$

ist.

Digitized by Google

Dieser Satz ist aber auch einer bemerkenswerthen geometrischen Intrepretation fähig.

Aus der höheren Geometrie ist nämlich allgemein bekannt *), dass

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(e^2)^{\frac{2}{3}}$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0$$

die Gleichung der Evolute der durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

charakterisirten Ellipse ist **), und durch eine ganz einfache Betrachtung wird auf der Stelle erhellen, dass der Punkt (xy) ausserhalb, in oder innerhalb dieser Evolute liegt, jenachdem

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}>0,$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0,$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}<0$$

ist. Daher hat man das folgende merkwürdige Theorem:

Durch einen Punkt in der Ebene einer Ellipse lassen sich an dieselbe zwei, oder drei, oder vier Normalen ziehen, jenachdem dieser Punkt ausserhalb, oder in, oder innerhalb der Evolute der Ellipse liegt.

II.

Die Gleichung einer Hyperbel sei

$$1)\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

so hat man, wenn x, y die Coordinaten des Durchschnittspunkts einer durch den Punkt $(\alpha\beta)$ an die Hyperbel gezogenen Normale mit derselben bezeichnen ***), zur Bestimmung von x, y die beiden folgenden Gleichungen:

---

*) M. s. z. B. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung. Thl. I. Leipzig. 1837. S. 291.

**) Eine Zeichnung der Evolute einer Ellipse s. m. Archiv. Thl. IV. Taf. II. Fig. 5.

***) Wo (xy) immer der Punkt der Hyperbel ist, in welchem auf derselben die durch den Punkt $(\alpha\beta)$ gezogene Normale senkrecht steht.

Digitized by Google

$$2)\begin{cases}\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,\\ \beta-y=-\frac{a^2y}{b^2x}(\alpha-x);\end{cases}$$

oder

$$3)\begin{cases}\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,\\ -b^2\beta x-a^2\alpha y+(a^2+b^2)xy=0;\end{cases}$$

oder, wenn wie gewöhnlich

$$a^2+b^2=e^2$$

gesetzt wird:

$$4)\begin{cases}\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,\\ -b^2\beta x-a^2\alpha y+e^2xy=0.\end{cases}$$

Setzen wir

$$5)\quad \frac{a\alpha}{e^2}=f,\ -\frac{b\beta}{e^2}=h;$$

so wird die zweite der Gleichungen 4):

$$6)\quad bhx-afy+xy=0.$$

Die erste der Gleichungen 4) kann auf folgende Form gebracht werden:

$$7)\quad \frac{ay}{b(x+a)}=\frac{b(x-a)}{ay},$$

und wenn man daher

$$8)\quad z=\frac{ay}{b(x+a)}=\frac{b(x-a)}{ay}$$

setzt, so hat man die beiden folgenden Gleichungen:

$$9)\quad ay-bzx=abz,\quad bx-azy=ab;$$

aus denen sich ohne Schwierigkeit:

$$10)\quad x=a\frac{1+z^2}{1-z^2},\quad y=\frac{2bz}{1-z^2}$$

ergiebt. Führt man diese Werthe von x und y in die Gleichung 6) ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung:

$$11)\quad z^4-\frac{2(f+1)}{h}z^3+\frac{2(f-1)}{h}z-1=0,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$12)\quad A=-\frac{2(f+1)}{h},\ B=\frac{2(f-1)}{h}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$13)\quad z^4+Az^3+Bz-1=0.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nun durch ganz gleiche Betrachtungen wie bei der Ellipse, die wir hier nicht wiederholen wollen, ganz dieselben durch die Grössen A und B ausgedrückten Bedingungen wie dort für die Anzahl der Normalen, welche durch den Punkt $(\alpha\beta)$ an die Hyperbel gezogen werden können, ableiten.

Nach dem Obigen ist aber

$$\frac{A+B}{4}=-\frac{1}{h}=\frac{e^2}{b\beta},$$

$$\frac{A-B}{4}=-\frac{f}{h}=\frac{a\alpha}{b\beta};$$

also

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1=-\left(\frac{a\alpha}{b\beta}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{e^2}{b\beta}\right)^{\frac{2}{3}}+1$$

oder

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1=-\frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}}{(b\beta)^{\frac{2}{3}}},$$

und an die Stelle der Bedingungen

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1\gtreqless 0$$

können folglich, weil $(b\beta)^{\frac{2}{3}}$ eine positive Grösse ist, die Bedingungen

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}\lesseqgtr 0$$

gesetzt werden. Daher erhalten wir endlich den folgenden bemerkenswerthen Satz:

An die durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

charakterisirte Hyperbel können durch einen gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ zwei, oder drei, oder vier Normalen

gezogen werden, jenachdem, indem wie gewöhnlich $a^2+b^2=e^2$ gesetzt wird,

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}<0,$$

oder

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0,$$

oder

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}>0$$

ist.

Die Gleichung der Evolute der Hyperbel ist*)

$$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}=(e^2)^{\frac{2}{3}}$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0,$$

woraus sich leicht ableiten lässt, dass die Evolute der Hyperbel aus vier gegen ihre Axen symmetrisch liegenden, sich in's Unendliche erstreckenden Zweigen besteht, welche gegen die Hauptaxe der Hyperbel convex sind. Betrachten wir nun den zwischen diesen vier Zweigen liegenden (unendlichen), aus zwei ganz von einander getrennten Theilen bestehenden Raum, welcher durch die Hauptaxe der Hyperbel halbirt wird, als den inneren, dagegen den zwischen den vier Zweigen liegenden (unendlichen) Raum, welcher durch die Nebenaxe der Hyperbel halbirt wird, als den äusseren Raum der Evolute; so wird durch eine ganz einfache Betrachtung auf der Stelle erhellen, dass der Punkt (xy) ausserhalb, in oder innerhalb der Evolute liegt, jenachdem

$$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}<0,$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0,$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}>0$$

ist. Vergleicht man dies aber mit dem Vorhergehenden, so ergiebt sich das folgende merkwürdige Theorem:

Durch einen Punkt in der Ebene einer Hyperbel lassen sich an dieselbe zwei, oder drei, oder vier Normalen ziehen, jenachdem dieser Punkt ausserhalb, oder in, oder innerhalb der Evolute der Hyperbel liegt

*) M. s. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung a. a. O.

Digitized by Google

Dass dieser Satz mit dem oben von der Ellipse bewiesenen Satze ganz identisch ist, und daher von der Ellipse und Hyperbel gilt, fällt auf der Stelle in die Augen.

III.

Für eine Parabel, deren Parameter $2p$ ist, müssen die Coordinaten x, y des Punktes, in welchem eine durch den Punkt $(\alpha\beta)$ gezogene Normale der Parabel auf derselben senkrecht steht, aus den beiden Gleichungen:

$$1)\quad y^2=2px,\ \beta-y=-\frac{y}{p}(\alpha-x)$$

oder

$$2)\quad y^2=2px,\ xy-(\alpha-p)y-p\beta=0$$

bestimmt werden. Durch Elimination von x erhält man aber aus diesen beiden Gleichungen die Gleichung

$$3)\quad y^3-2p(\alpha-p)y-2p^2\beta=0,$$

und gelangt nun hierdurch mit Hülfe der Theorie der cubischen Gleichungen*) sehr leicht zu dem folgenden Resultate:

An die durch die Gleichung $y^2=2px$ charakterisirte Parabel können durch einen gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ eine, oder zwei, oder drei Normalen gezogen werden, jenachdem

$$27p\beta^2-8(\alpha-p)^3>0,$$

oder

$$27p\beta^2-8(\alpha-p)^3=0,$$

oder

$$27p\beta^2-8(\alpha-p)^3<0$$

ist.

Die Gleichung der Evolute der Parabel ist**)

$$27py^2-8(x-p)^3=0,$$

woraus sich leicht ableiten lässt, dass die Evolute aus zwei gegen die Axe der Parabel symmetrisch liegenden unendlichen Zweigen besteht, welche gegen die Axe convex sind. Betrachten wir nun den zwischen den beiden Zweigen auf deren convexen Seiten liegenden unendlichen Raum als den innern, den auf den concaven Seiten der beiden Zweige liegenden unendlichen Raum dagegen als den äusseren Raum der Evolute, so wird leicht erhellen, dass der Punkt (xy) ausserhalb, in oder innerhalb der Evolute liegt, jenachdem

*) M. s. Archiv Thl. VI. S. 6.

**) M. s. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung a. a. O.

$$27py^2-8(x-p)^3>0,$$

oder

$$27py^2-8(x-p)^3=0,$$

oder

$$27py^2-8(x-p)^3<0$$

ist, nud wir erhalten daher das folgende Theorem:

Durch einen Punkt in der Ebene einer Parabel lassen sich an dieselbe eine, oder zwei, oder drei Normalen ziehen, jenachdem dieser Punkt ausserhalb, oder in, oder innerhalb der Evolute der Parabel liegt.

XXI.

Nachträge zur Ausgleichungs-Rechnung.

Von dem

Herrn Professor Dr. Gerling

zu Marburg.

In der Vorrede zu meiner Ausgleichungs-Rechnuug (S. XIII.) habe ich bereits die Erwartung angedeutet, dass sich bald Nachträge und Berichtigungen finden würden, wenn nur verständige Practiker erst häufiger von der Ausgleichung Gebrauch machten. Diese Erwartung hat sich jetzt schon dadurch verwirklicht, dass Herr Land-Messer Coester (dermalen bei der unter Leitung des Herrn Obristlieutenant Wiegrebe vorgehenden topographischen Vermessung Kurhessens angestellt) mir kürzlich zwei wesentliche Umstände mittheilte, welche in meinem Buche berichtigend nachzutragen sind.

Herr Coester ist nämlich beschäftigt mein grosses Triangel-System mit kleineren Dreiecken auszufüllen, besorgt dieses Geschäft mit eben so viel Eifer als Intelligenz unter dem Gesichtspunkt, dass seine Messungen uud Rechnungen mittelst der Ausgleichungen

Digitized by Google

überall den Prüfstein ihrer Richtigkeit in sich tragen, und hat dadurch eine Gelegenheit zu den reichsten Erfahrungen über die Einschaltungs-Methoden, welche mir bei den grossen Dreiecken nur ausnahmsweise vorkamen. Hierauf beziehen sich denn auch seine Mittheilungen. Ich kann dieselben nicht besser verdanken, als indem ich, die Erlaubniss ihres Urhebers benutzend, das Wesentliche davon hier selbstständig darstelle, und dadurch den Practikern, welche etwa ähnliche Geschäfte betreiben möchten, diese nützlichen Nachträge empfehlend bekannt mache. Diese werden sich das Einzelne leicht selbst weiter entwickeln.

Ich setze dabei auch hier lauter ebene Figuren voraus, indem jedenfalls eine vorläufige Rechnung die etwa zu berücksichtigenden sphärischen Excesse liefert.

Erster Nachtrag.

Für solche Fälle, wo ein einzelner Punkt zwischen mehrere andere, als absolut genau betrachtete, einzuschalten ist, und bloss an ihm selbst Winkel gemessen sind, und wo also wenigstens vier gute Punkte angeschnitten sein müssen, wenn man überhaupt ausgleichen will, rieth ich (S. 303.) die Bestimmung der gegebenen Punkte auf rechtwinkliche Coordinaten zu reduciren, und dann nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen zu verfahren, wie ohnehin für die Pothenotsche Aufgabe vorgeschrieben zu werden pflegt. Dieser Rath ist aber nicht allgemein der zweckmässigste.

Kommen nämlich Fälle vor, wo man zunächst die Distanzen des einzuschaltenden Punktes von den gegebenen sucht, und sind dann überdies alle Winkel und Seiten zwischen den gegebenen Punkten schon fertig berechnet (wie dies z. B. in meinem grossen System der Fall ist); so kann man ohne rechtwinkliche Coordinaten bequemer zum Ziel kommen, indem man die Aufgabe als eine bedingte behandelt.

Man wird auch hier zuerst aus den Richtungen auf drei (zweckmässig gewählte) von den vorgegebenen Punkten den Orientirungs-Winkel einer Visirlinie gegen eine der gegebenen Verbindungslinien zu berechnen haben, und zwar aus Gründen, die sofort erhellen werden, in scharfer Rechnung.

Hiezu würde ich vorschlagen, etwa auf folgende Weise zwei vorliegende Seiten und ihren eingeschlossenen Winkel zu benutzen. Bezeichnen wir den einzuschaltenden Punkt mit 0, die drei gegebenen mit 1; 2; 3; und suchen die Winkel $q = \underset{2}{0.1}$ und $r = \underset{2}{3.0}$ aus den gemessenen $\underset{0}{1.2}$ und $\underset{0}{2.3}$; so ist die Gleichung

$$(1) \quad \underset{\cdot\ \cdot}{0.2} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{1.2}}{\sin \underset{0}{1.2}} \sin\left(\underset{0}{1.2} + q\right) = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{2.3}}{\sin \underset{0}{2.3}} \sin\left(\underset{0}{2.3} + r\right)$$

zu erfüllen Diese giebt zunächst

$$(2)\quad \frac{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2.3}{0}+r\right)}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1.2}{0}+q\right)} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{1.2}}{\underset{\cdot\ \cdot}{2.3}}\;\frac{\sin\genfrac{}{}{0pt}{}{2.3}{0}}{\sin\genfrac{}{}{0pt}{}{1.2}{0}} = \operatorname{tang} w,$$

wo der Hülfs-Winkel w also leicht berechnet wird.

Daraus erhält man, weil nach der Voraussetzung

$$(3)\quad q+r=\genfrac{}{}{0pt}{}{3.1}{2}$$

gegeben ist, endlich

$$(4)\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left\{\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1.2}{0}-\genfrac{}{}{0pt}{}{2.3}{0}\right)+(q-r)\right\} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left\{\genfrac{}{}{0pt}{}{1.2}{0}+\genfrac{}{}{0pt}{}{2.3}{0}+\genfrac{}{}{0pt}{}{3.1}{2}\right\}\operatorname{tang}(45^\circ-w)$$

und somit q und r.

Ferner wird man nun die Gleichung aufzusuchen haben, welche zwischen den Richtungs-Verbesserungen $\binom{1}{0}$; $\binom{2}{0}$; $\binom{3}{0}$ und der Verbesserung der berechneten Richtung $\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{2}$ besteht. Da nun $(q)=-\binom{0}{2}$ und $(r)=+\binom{0}{2}$ ist, so erhält man diese Gleichung und zugleich eine Prüfung für die vorige Rechnung, wenn man, mit Benutzung der logarithmischen Differenzen, die Gleichung (1) berechnet. Es muss dann nothwendig der $\log \underset{\cdot\ \cdot}{0.2}$ auf beiden Seiten übereinstimmen, was zur Prüfung dient, überdies aber muss er einerseits die Correctionen $\binom{1}{0}$; $\binom{2}{0}$; $\binom{0}{2}$, andererseits die Correctionen $\binom{2}{0}$; $\binom{3}{0}$; $\binom{0}{2}$ mit sich führen, wodurch sich also die Gleichung

$$0=0+g_1\binom{1}{0}+g_2\binom{2}{0}+g_3\binom{3}{0}+g_4\binom{0}{2}$$

oder durch eine leichte Umgestaltung

$$(5)\quad \binom{0}{2}=h_1\binom{1}{0}+h_2\binom{2}{0}+h_3\binom{3}{0}$$

ergiebt. Man hat also, sobald demnächst $\binom{1}{0}$; $\binom{2}{0}$; $\binom{3}{0}$ bekannt sind, auch schon den definitiven Werth von $\log \underset{\cdot\ \cdot}{0.2}$, wenn man ihn durch Substitution zu finden vorzieht.

Wären nun die drei Punkte 1, 2, 3 allein angeschnitten, und also nichts auszugleichen, so würde die Rechnung doch eben so gemacht werden müssen, wenn man den Einfluss zu wissen wünschte, welchen die unvermeidlichen Fehler der Visirlinien auf die Orientirung ausübten.

Sollen nun aber weiter die übrigen angeschnittenen Punkte

zur Ausgleichung aller Visirlinien benutzt werden, so giebt jeder von ihnen eine Bedingungsgleichung dritter Klasse in der für Auffindung der definitiven Distanzen bequemsten Form, wenn man eine weitere Distanz aus zwei Dreiecken berechnet, in welchen je eine Distanz zweier gegebenen Punkte vorkommt. Die Winkel dieser Dreiecke lassen sich nämlich durch die noch zu verbessernden Richtungen der Visirlinien, durch die gegebenen (als absolut genau betrachteten) Winkel zwischen den gegebenen Verbindungslinien und durch q (oder r) ausdrücken. Demnach hat man mit Hülfe der Gleichung (5) jedesmal eine Bedingungsgleichung zwischen lauter Richtungs-Verbesserungen.

Wäre z. B. ein Punkt 4 zwischen 2 und 3 und jenseits der Linie $\underset{\cdot\ \cdot}{2.3}$ angeschnitten, so hätte man entweder $\underset{\cdot\ \cdot}{2.4}$ und $\overset{4.3}{2}$ oder $\underset{\cdot\ \cdot}{3.4}$ und $\overset{2.4}{3}$ oder endlich beide Paare von Grössen zu benutzen, um entweder $log\ \underset{\cdot\ \cdot}{0.2}$ oder $log\ \underset{\cdot\ \cdot}{0.3}$ oder $log\ \underset{\cdot\ \cdot}{0.4}$ doppelt auszudrücken. Man hat also die Wahl zwischen den drei endlichen Gleichungen

$$\underset{\cdot\ \cdot}{0.2} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{2.3}}{\sin \overset{2.3}{0}} \sin(\overset{2.3}{0} + r) = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{2.4}}{\sin \overset{2.4}{0}} \sin(\overset{2.4}{0} + \overset{4.3}{2} + r),$$

$$\underset{\cdot\ \cdot}{0.3} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{2.3}}{\sin \overset{2.3}{0}} \sin r = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{4.3}}{\sin \overset{4.3}{0}} \sin(180^0 - \overset{2.3}{0} - r + \overset{2.4}{3} + \overset{4.3}{0}),$$

$$\underset{\cdot\ \cdot}{0.4} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{2.4}}{\sin \overset{2.4}{0}} \sin(\overset{4.3}{2} + r) = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{4.3}}{\sin \overset{4.3}{0}} \sin(180^0 - \overset{2.3}{0} - r + \overset{2.4}{3}).$$

In allen drei Fällen erhält man, wenn für $(r) = \binom{0}{2}$ sein Werth aus (5) eingeführt wird, eine Bedingungsgleichung von der Form

$$0 = w_1 + a_1\binom{1}{0} + a_2\binom{2}{0} + a_3\binom{3}{0} + a_4\binom{4}{0}.$$

Sollte aber etwa $\underset{\cdot\ \cdot}{2.4}$ zufällig fehlen und statt dessen $\underset{\cdot\ \cdot}{1.4}$ bekannt sein, so beständen drei andere endliche Gleichungen zur Auswahl, die auf dieselbe Bedingungsgleichung führten.

Man wird also unter den verschiedenen Wegen zu letzterer denjenigen wählen, welcher das grösste w_1 zu geben verspricht, oder wenn keiner sich hierin überwiegend vortheilhaft zeigt, den, welcher die bequemste Rechnung darbietet (vergl. S. 256.).

Sind nun die $n-3$ Bedingungsgleichungen, welche bei n vorgegebenen Punkten sich offenbar finden müssen, auf diese Weise aufgestellt, so wird e n d l i c h zu den Correlaten-Gleichungen und Normal-Gleichungen auf die bekannte Weise fortgeschritten.

Die ohnehin nöthige Prüfungsrechnung giebt dann die definitiven Distanzen, so wie auch aus dem ausgeglichenen Winkel die definitiven Azimuthe des Punkts in jedem gegebenen Punkte folgen.

Zweiter Nachtrag.

Wenn auf einem einzuschaltenden einzelnen Punkte keine Winkel gemessen sind, sondern derselbe bloss von mehreren gegebenen Punkten aus angeschnitten ist, deren also, wenn Ausgleichung statt finden soll, wenigstens drei sein müssen; so kann es allerdings vorkommen, dass man nur die Richtungen zwischen je zwei und zwei der gegebenen Punkte benutzen kann. Dieser mögliche Fall wird aber in der wirklichen Praxis nur höchst selten vorkommen. Vielmehr wird man hier fast immer ein vollständig gegebenes System zum Grunde zu legen und mit Rücksicht auf gegebene Richtungen und Seitenverhältnisse desselben auszugleichen haben.

Es ist in dieser Beziehung also (zu S. 304.) nachzutragen, dass man höchtens ausnahmsweise sich mit einer solchen Bedingungsgleichung wird begnügen dürfen, als welche in dem Rechnungs-Beispiel S. 202. vorkam, vielmehr in den regelmässig eintretenden Fällen nach derselben Weise einzuschalten hat, wie ich (Beiträge S. 173.) den Frauenberg zwischen vier Hauptpunkte einschaltete.

Vorausgesetzt also, dass eine beliebige Anzahl von Punkten in einem vollständigen System von Richtungen und Distanzen vorgegeben und nun ein einzelner bloss angeschnittener Punkt 0 mit Ausgleichung einzuschalten sei; kommt es zuerst auf Abzählung der Bedingungsgleichungen dritter Klasse an.

Hier findet sich leicht, dass allgemein für n gegebene Punkte $n-2$ unabhängige Bedingungsgleichungen bestehen (wie auch beispielsweise Ausgl. R. S. 305. und Beiträge S. 173. und 174. vorkommt). Denkt man sich nämlich in dem gegebenen System diejenigen Linien gezogen, welche zur Bestimmung desselben durch lauter Richtungen ausreichen (mit Weglassung der überschüssigen), so sind deren $2n-3$. Hierzu kommen nun die n Anschnittsrichtungen; also hat man in n. 58. (S. 277.) zu setzen: $l=3n-3$; $p=n+1$, und erhält also

$$z_{b_3}=l-2p+3=n-2.$$

Dasselbe ergiebt sich, wenn man die Linienverbindung zwischen zwei und zwei der gegebenen Punkte als Polygon betrachtet, in welchem alle Seiten und Winkel gemessen sind. Kommt dann der Punkt 0 mit seinen n Anschnitten hinzu, so hat man in n. 59 (S. 326.) zu setzen $l_\varrho=2n$; $l_\lambda=n$; $p=n+1$; $t=0$ und erhält also zusammen n Bedingungsgleichungen, von welchen aber nach derselben Formel ($l_\varrho=n$; $l_\lambda=n$; $p=n$; $t=0$ gesetzt) zwei dem gegebenen System angehörige als erfüllt vorausgesetzt werden; so dass für die Einschaltung nur $n-2$ übrig bleiben.

Was nun die **Aufsuchung** und **Darstellung** betrifft, so ist es auch hier wieder im Allgemeinen unter den obigen Umständen am bequemsten, von den (als absolut genau vorausgesetzten) **Distanzen** der gegebenen Punkte von einander auszugehen, und die Logarithmen der Distanzen des einzuschaltenden Punkts von jenen zu suchen, um deren Differenzen für die Bedingungsgleichungen zu benutzen, wie dieses im Besonderen für drei gegebene Punkte (S. 305.) vorgeschrieben ist.

Wäre also z. B. der Punkt 0 von fünf gegebenen Punkten angeschnitten, so hätte man etwa die drei endlichen Gleichungen:

$$\underset{\cdot\ \cdot}{0.2} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{1.2}\,\sin\genfrac{}{}{0pt}{}{2.0}{1}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2.0}{1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.1}{2}\right)} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{2.3}\,\sin\genfrac{}{}{0pt}{}{0.2}{3}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3.0}{2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.2}{3}\right)},$$

$$\underset{\cdot\ \cdot}{0.3} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{2.3}\,\sin\genfrac{}{}{0pt}{}{3.0}{2}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3.0}{2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.2}{3}\right)} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{3.4}\,\sin\genfrac{}{}{0pt}{}{0.3}{4}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4.0}{3}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.3}{4}\right)},$$

$$\underset{\cdot\ \cdot}{0.4} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{3.4}\,\sin\genfrac{}{}{0pt}{}{4.0}{3}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4.0}{3}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.3}{4}\right)} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{4.5}\,\sin\genfrac{}{}{0pt}{}{0.4}{5}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5.0}{4}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.4}{5}\right)}$$

logarithmisch auszuführen, und erhielte dadurch die drei Bedingungsgleichungen

$$0 = w_1 + a_1\binom{0}{1} + a_2\binom{0}{2} + a_3\binom{0}{3},$$

$$0 = w_2 + b_2\binom{0}{2} + b_3\binom{0}{3} + b_4\binom{0}{4},$$

$$0 = w_3 + c_3\binom{0}{3} + c_4\binom{0}{4} + c_5\binom{0}{5}.$$

Es bedarf keiner Erinnerung, dass man eben so gut den doppelten Ausdruck von $\underset{\cdot\ \cdot}{0.2}$; $\underset{\cdot\ \cdot}{0.4}$; $\underset{\cdot\ \cdot}{0.1}$ oder jeder beliebigen Dreizahl von Anschnittslinien zum Grunde legen könnte; und dass sich die Auswahl nach den bewussten practischen Rücksichten bestimmt.

XXII.
Ueber die Verwandlung der Quadratwurzeln in unendliche periodische Kettenbrüche.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Es lässt sich bekanntlich jede Quadratwurzel aus einer positiven ganzen Zahl in einen unendlichen und periodischen Kettenbruch auflösen; die hierzu nöthigen Operationen sind leicht aus einem einzelnen Falle zu ersehen. Um z. B. $\sqrt{28}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, bemerke man zuvörderst, dass $\sqrt{28}=5$ plus einem Bruche sein müsse, und setze demnach

$$\sqrt{28}=5+\frac{1}{x_1},$$

woraus folgt:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{28}-5}=\frac{\sqrt{28}+5}{3},$$

wenn man Zähler und Nenner mit $\sqrt{28}+5$ multiplicirt und im Nenner den Satz $(\sqrt{\alpha}-\beta)(\sqrt{\alpha}+\beta)=\alpha-\beta^2$ anwendet. Da nun $\sqrt{28}=5$ plus einem Bruche ist, so muss der Zähler $\sqrt{28}+5=10$ plus einem Bruche, folglich der Quotient$=3$ plus einem solchen sein. Deshalb sei weiter

$$x_1=\frac{\sqrt{28}+5}{3}=3+\frac{1}{x_2},$$

woraus folgt:

$$x_2=\frac{3}{\sqrt{28}-4}=\frac{3(\sqrt{28}+4)}{12}=\frac{\sqrt{28}+4}{4}.$$

Da der Zähler hier $=9$ plus einem Bruche ist, so setzen wir

$$x_2 = \frac{\sqrt{28}+4}{4} = 2 + \frac{1}{x_3},$$

woraus folgt:

$$x_3 = \frac{4}{\sqrt{28}-4} = \frac{4(\sqrt{28}+4)}{12} = \frac{\sqrt{28}+4}{3}.$$

Der fernere Gang der Rechnung ist jetzt:

$$x_3 = \frac{\sqrt{28}+4}{3} = 3 + \frac{1}{x_4},$$

$$x_4 = \frac{3}{\sqrt{28}-5} = \frac{\sqrt{28}+5}{1} = 10 + \frac{1}{x_5},$$

$$x_5 = \frac{1}{\sqrt{28}-5}, \ldots.$$

Hier ist aber $x_5 = x_1$, folglich wird bei weiterem Verlauf $x_6 = x_2$, $x_7 = x_3$, u. s. f. in inf. Substituiren wir jetzt von allen gefundenen Gleichungen:

$$\sqrt{28} = 5 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = 3 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = 2 + \frac{1}{x_3},$$

$$x_3 = 3 + \frac{1}{x_4}, \quad x_4 = 10 + \frac{1}{x_5}, \quad x_5 = 3 + \frac{1}{x_6}, \text{ u. s. f.}$$

jede in die vorhergehende, so erhalten wir

$$\sqrt{28} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}}$$

also $\sqrt{28}$ in Form eines unendlichen periodischen Kettenbruches.

So bekannt nun Dieses ist, so wenig scheint man sich um die Eigenschaften der einzelnen periodisch vorkommenden Nenner bekümmert zu haben. Eine nur flüchtige Untersuchung dieses Gegenstandes, welche für anderweite Zwecke unternommen wurde, gab folgende bemerkenswerthe Resultate.

1) Ist die Periode zweigliedrig, also der Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \ldots}}}}$$

Digitized by Google

so ist b eine gerade Zahl und a ein Theiler von b, also $\frac{b}{a}$ ganz, wie z. B. in

$$\sqrt{30}=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\ldots}}}} \qquad \sqrt{40}=6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{12+\ldots}}}}$$

2) Bei einer dreigliedrigen Periode wie

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}$$

ist $b=a$, c gerade und zugleich

$$\frac{ac+1}{a^2+1}$$

eine ganze Zahl. Da hier wegen des geraden c der Zähler immer ungerade ist, so muss folglich a immer gerade sein, weil sonst der Nenner gerade würde.

Beispiele:

$$\sqrt{41}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\ldots}}}} \qquad \sqrt{1613}=40+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{80+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}$$

3) Ist die Periode viergliedrig, also der Kettenbruch von der Form:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}}$$

so ist $c=a$, ferner d gerade und der Ausdruck

$$\frac{abd+b+d}{a^2b+2a}$$

eine ganze Zahl, wie z. B. in dem oben entwickelten Kettenbruche für $\sqrt{28}$ und den folgenden:

$$\sqrt{248}=15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{30+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}, \qquad \sqrt{1248}=35+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{17+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{70+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}}$$

4) Enthält die Periode fünf Glieder, steht also der Kettenbruch unter der Form:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}}}$$

so ist e eine gerade Zahl, ferner:

$$abc+a+c=bcd+b+d$$

und

$$\frac{bcde+bc+be+de+1}{abcd+ab+ad+cd+1}$$

eine ganze Zahl, was man z. B. an den Kettenbrüchen:

$$\sqrt{13}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}} \qquad \sqrt{29}=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}$$

bestätigt finden wird.

Ueberhaupt ist in jeder Periode der letzte Nenner das Doppelte der ganzen in der gesuchten Wurzel steckenden Zahl. Für die übrigen Eigenschaften aber wollte sich auf dem Wege, welchen ich einschlug, kein allgemeines Gesetz entdecken lassen.

Das Mitgetheilte reicht wohl hin, um zu zeigen, dass hier noch ein weites Feld zur Bearbeitung offen liegt, welches vielleicht auch für die Theorie der Zahlen manche Ausbeute gewähren könnte.

Digitized by Google

XXIII.
Ueber die im vorhergehenden Aufsatze aufgestellten Sätze.

Von
Herrn Richard Müller,
Studirenden der Mathematik zu Jena.

Die Periode eines periodischen Kettenbruches x sei $n$gliedrig, q sei der letzte, p der vorletzte Nenner der Periode, so dass

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ldots\,+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ldots}}}}}}$$

Da die Periodenzahl unendlich gross ist, so wird der Werth von x nicht geändert, wenn wir die erste Periode ganz weglassen und den Kettenbruch erst mit der zweiten Periode beginnen; es ist mithin der Theil des Kettenbruchs, der nach dem ersten q noch folgt, selbst gleich x, und folglich

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ldots\,+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+x.}}}}$$

Auf diese Weise ist es uns gelungen, den unendlichen Kettenbruch in eine endliche Form zu bringen, in welcher es uns allein möglich wird, seine Eigenschaften zu untersuchen.

Bezeichnen wir nun die einzelnen Näherungsbrüche des Ketten-

bruchs der Reihe nach mit $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}$, etc., so wird der Näherungsbruch, der zum Nenner p gehört, durch $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ und der zu q gehörige durch $\frac{P_n}{Q_n}$ zu bezeichnen sein, da p der $(n-1)$ste und q der $n$te Nenner des Kettenbruchs ist. Nun wissen wir aber aus der Lehre von den Kettenbrüchen, wie die einzelnen Näherungsbrüche mittelst der Partialnenner aus einander berechnet werden können, dass nämlich

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{q.P_{n-1}+P_{n-2}}{q.Q_{n-1}+Q_{n-2}}.$$

Dieser Näherungsbruch $\frac{P_n}{Q_n}$ geht nun aber in den wahren Werth x des Kettenbruchs über, wenn wir $q+x$ statt q setzen, und es ist also

$$x=\frac{(q+x)\ P_{n-1}+P_{n-2}}{(q+x)\ Q_{n-1}+Q_{n-2}},$$

$$Q_{n-1}\,x^2+(qQ_{n-1}+Q_{n-2})\,x=P_{n-1}\,x+q\,P_{n-1}+P_{n-2},$$

$$Q_{n-1}\,x^2+(q\,Q_{n-1}+Q_{n-2}-P_{n-1})\,x=qP_{n-1}+P_{n-2},$$

$$x^2+\left(\frac{q\,Q_{n-1}+Q_{n-2}-P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)x=\frac{qP_{n-1}+P_{n-2}}{Q_{n-1}},$$

$$x^2+(q+\frac{Q_{n-2}-P_{n-1}}{Q_{n-1}})\ x=\frac{P_n}{Q_{n-1}},$$

da bekantlich $P_n=qP_{n-1}+P_{n-2}$ ist. Wir haben auf diese Weise eine quadratische Gleichung erhalten. Soll nun der fragliche Kettenbruch einem Ausdrucke von der Form $-u\pm\sqrt{v}$, wo u und v ganze positive Zahlen bedeuten, gleich sein, so muss der Coefficient von x ganz und gerade sein, weil in jeder quadratischen Gleichung der Coefficient der ersten Potenz von x gleich der Summe der beiden Wurzeln, also hier gleich $-2u$ ist. Das Glied ohne x ist aber immer gleich dem Producte beider Wurzeln, also $\frac{P_n}{Q_{n-1}}$ $=(-u+\sqrt{v})\,(-u-\sqrt{v})=u^2-v$, also eine ganze Zahl. Es muss also noch $q+\frac{Q_{n-2}-P_{n-1}}{Q_{n-2}}$ ganz und gerade sein. Da nun q schon ganz ist, so muss also auch $\frac{Q_{n-2}-P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ ganz sein; es ist aber nothwendig $Q_{n-1}>Q_{n-2}$, also um so mehr $Q_{n-1}>Q_{n-2}-P_{n-1}$, und es kann also der Bruch $\frac{Q_{n-2}-P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ nicht anders ganz werden, als indem der Zähler gleich Null wird, also $Q_{n-2}-P_{n-1}=0$ oder $Q_{n-2}=P_{n-1}$. Da nun aber der Coefficient von x auch gerade sein soll, so muss q gerade sein.

Wir haben also die drei Haupteigenschaften gefunden:

I. $\frac{P_n}{Q_{n-1}}$ muss ganz,
II. $P_{n-1} = Q_{n-2}$ und
III. q gerade sein.

Entwickeln wir die ersten Näherungsbrüche für die Nenner a, b, c, d, so finden wir der Reihe nach

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{b}{ab+1}, \quad \frac{bc+1}{abc+a+c}, \quad \frac{bcd+b+d}{abcd+ad+cd+ab+1}.$$

Es muss also für Kettenbrüche mit zweigliedrigen Perioden $\frac{b}{a}$ ganz, b gerade, also auch a gerade sein; für dreigliedrige Perioden muss $\frac{bc+1}{ab+1}$ ganz, $b=a$ und c gerade sein; für viergliedrige Perioden $\frac{bcd+b+d}{abc+a+c}$ ganz, $bc+1=ab+1$ oder $a=c$ und d gerade sein u. s. w.

Da nun nach den Gesetzen für die Kettenbrüche

$$P_{n-1}\, Q_{n-2} - P_{n-2}\, Q_{n-1} = \pm 1,$$

und da wir $Q_{n-2} = P_{n-1}$ gefunden haben, so muss

$$(P_{n-1})^2 = P_{n-2}\, Q_{n-1} \pm 1,$$

$$P_{n-1} = \sqrt{P_{n-2}\, Q_{n-1} \pm 1}$$

sein; es muss also dieses Kreuzproduct $P_{n-2}\ Q_{n-1}$ immer um die Einheit grösser oder kleiner sein als eine Quadratzahl.

Da P_n und Q_n relative Primzahlen sein müssen und $\frac{P_n}{Q_{n-1}}$ ganz, so müssen auch Q_n und Q_{n-1} relative Primzahlen sein; ebenso müssen Q_{n-1} und Q_{n-2} es sein, da $Q_{n-2} = P_{n-1}$ und P_{n-1} prim zu Q_{n-1} sein muss.

XXIV.
Auflösung der Gleichung $x^y = y^x$ in reellen Zahlen.

Von
Herrn T. Wittstein
zu Hannover.

1.

Unter den drei directen Operationen der Arithmetik zeichnet sich das Potenziren durch die Eigenthümlichkeit aus, dass man die beiden gegebenen Zahlen, mit denen die Operation vollzogen werden soll, nämlich Basis und Exponent, nicht allgemein vertauschen darf, ohne zugleich die Potenz zu ändern. Diese für die genetische Entwickelung der elementaren Arithmetik so wichtige Thatsache führt aber zu der Frage, ob sich nicht wenigstens isolirte Zahlenpaare angeben lassen, welche der Gleichung

$$x^y = y^x \ldots. \ (1.)$$

Genüge leisten, und schliesst man dabei, wie billig, die Auflösung

$$x = y \ldots. \ (2.)$$

aus, so führt schon ein Durchsuchen der ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zu dem Resultate

$$2^4 = 4^2 \ldots. \ (3.)$$

Ob dieses Resultat das einzige ist, sei es dass man sich auf positive ganze Zahlen beschränken oder dass man auch negative Zahlen, Brüche und Irrationalzahlen zuziehen will; oder wie, wenn es nicht das einzige ist, man allgemein solche Zahlenpaare angeben kann, welche der Gleichung (1.) genügen: das zu untersuchen ist hier die Absicht. Zunächst soll von positiven Zahlen allein die Rede sein.

Aus der Gleichung (1.) folgt unmittelbar

$$\frac{y}{x} = \frac{\log y}{\log x} \ldots. \ (4.)$$

Digitized by Google

Man setze $\frac{y}{x} = 1 + \alpha$, denn der Werth von $\frac{y}{x}$ muss nothwendig von Eins verschieden sein, weil die Auflösung (2.) ausgeschlossen bleibt; und ausserdem wird die Allgemeinheit nicht beschränkt, wenn man unter α eine positive Zahl versteht, denn dadurch wird nur die Bestimmung eingeführt, es solle von den beiden positiven Zahlen y und x jene die grössere sein. Man hat also aus (4.)

$$\frac{y}{x} = 1 + \alpha, \text{ woraus } y = x(1+\alpha);$$

$$\frac{\log y}{\log x} = 1 + \alpha, \text{ woraus } y = x^{1+\alpha};$$

folglich

$$\left. \begin{array}{c} x^{1+\alpha} = x(1+\alpha), \\ x = (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \; y = (1+\alpha)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \end{array} \right\} \dots (5.)$$

Diese beiden Gleichungen enthalten die vollständige Auflösung, und lässt man darin α alle Werthe von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \infty$ durchlaufen, so erhält man alle positiven reellen Werthe von x und y, welche der Gleichung (1.) Genüge leisten.

Für $\alpha = 0$ reduciren sich die Werthe von x und y nach einem bekannten Satze beide auf die Zahl $e = 2,718\ldots$, welcher Fall mithin, als der Gleichung (2.) angehörig, ausgeschlossen werden muss.

Für jeden andern Werth von α hat man

$$1 + \alpha < e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1.2} + \cdots,$$

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < e, \; x < e$$

und

$$\alpha < (1+\alpha)\log(1+\alpha) = \alpha + \tfrac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1+\alpha} + \tfrac{1}{6}\frac{\alpha^3}{(1+\alpha)^2} + \cdots,$$

$$e^{\alpha} < (1+\alpha)^{1+\alpha}, \; e < (1+\alpha)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}, \; y > e.$$

Ferner ist für $\alpha = \infty$

$$\lim(\log x) = \lim \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = \lim\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) = 0, \; \lim x = 1$$

und

$$\lim(\log y) = \lim \frac{(1+\alpha)\log(1+\alpha)}{\alpha} = \lim\{1 + \log(1+\alpha)\} = \infty,$$
$$\lim y = \infty.$$

Folglich liegen alle Werthe von x, welche in den Gleichungen (5.) enthalten sind, zwischen 1 und e, alle Werthe von y dagegen zwischen e und ∞; oder mit andern Worten, jeder Zahl $> e$ cor-

respondirt eine andere $< e$ und > 1, die mit ihr verbunden eine Auflösung der Gleichung (1.) liefert.

Eine Folge hieraus ist, dass zu keiner Zahl < 1 und > 0 eine correspondirende positive Zahl angegeben werden kann, die mit ihr die Gleichung (1.) löst; man überzeugt sich davon aber auch leicht unmittelbar, denn bedeuten x und y zwei Zahlen, die > 1 sind, so hat die Gleichung

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{x}} \dots \quad (6.)$$

unmittelbar zur Folge

$$x^x = y^y,$$

welches absurd ist, wenn x und y verschieden von einander sein sollen.

2.

Soll die Auflösung der Gleichung (1.) auf rationale positive Werthe von x und y beschränkt bleiben, so wird auch die Hülfszahl α, ihrer Definition gemäss, nur rational gewählt werden dürfen. Es sei deshalb

$$1) \quad \alpha = \frac{m}{n},$$

wo m und n von Eins verschieden und ausserdem relative Primzahlen sein mögen, so erhält man aus (5.)

$$x = \left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{n}{m}}, \quad y = \left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{m+n}{m}} \dots \quad (7.)$$

und sollen diese Werthe rational werden, so müssen, wenn man

$$(m+n)^{\frac{1}{m}} = p, \quad n^{\frac{1}{m}} = q$$

setzt, p und q ganze Zahlen sein. Nimmt man ferner $p - q = r$, so sind mithin q und r an die Bedingung gebunden:

$$(q+r)^m - q^m = m,$$

$$m q^{m-1} r + \frac{m(m-1)}{1.2} q^{m-2} r^2 + \dots + r^m = m;$$

welcher Gleichung augenscheinlich durch positive ganze Werthe von q und r nicht Genüge geleistet werden kann. Die Annahme $\alpha = \frac{m}{n}$ liefert mithin keine rationalen Werthe von x und y.

Es sei ferner

$$2) \quad \alpha = \frac{1}{n},$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeuten mag, so hat man aus (5.) jetzt

$$x=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad y=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \quad \ldots . (8.)$$

welche Werthe unmittelbar rational sind, und deshalb Auflösungen der gegebenen Aufgabe enthalten. Man hat z. B.

$$n=1, \; 2, \; 3, \; 4, \ldots;$$
$$x=2, \; \frac{9}{4}, \; \frac{64}{27}, \; \frac{625}{256}, \ldots;$$
$$y=4, \; \frac{27}{8}, \; \frac{256}{81}, \; \frac{3125}{1024}, \ldots .$$

Man bemerkt leicht, dass alle diese Werthe von x und y zwischen den Zahlen 2 und 4 liegen.

Es sei endlich

$$3) \quad \alpha=m$$

und m eine beliebige ganze Zahl, so wird

$$x=(1+m)^{\frac{1}{m}}, \; y=(1+m)^{\frac{1+m}{m}} \ldots . (9.)$$

und damit diese Werthe rational werden, muss $(1+m)^{\frac{1}{m}}$ eine ganze Zahl sein. Aber zwischen 1 und e, in welchem Intervalle alle Werthe von $(1+m)^{\frac{1}{m}}$ enthalten sind, liegt nur die einzige ganze Zahl 2, und ihr entspricht der Werth $m=1$, folglich ist

$$x=2, \; y=4$$

die einzige rationale Auflösung unter der Voraussetzung $\alpha=m$. Dieselbe fand sich aber auch schon vorhin für $\alpha=\frac{1}{n}$.

Fasst man die vorstehenden Entwickelungen zusammen, so findet man, dass in der That die Gleichung (3.) die einzige mögliche Auflösung von (1.) in positiven ganzen Zahlen enthält, während der Auflösungen in rationalen Brüchen beliebig viele möglich sind, die durch die Gleichungen (8.) gegeben werden.

Nebenbei kann man noch hemerken, dass die Werthe in (3.) zugleich die Eigenschaft haben, dass für sie auch die Potenz x^y oder y^x rational ausfällt, welches für alle andern aus (8.) gezogenen Werthe von x und y nicht der Fall ist.

3.

Um jetzt die Auflösung der Gleichung (1.) auch auf **negative** Werthe der Unbekannten auszudehnen, darf zunächst die Bemerkung nicht übersehen werden, dass man mit einer Potenz einer

negativen Zahl nur dann eine bestimmte Bedeutung verbinden kann, wenn der Exponent rational ist, während bei irrationalem Exponenten das Vorzeichen der Potenz durchaus unbestimmbar bleibt. Aus diesem Grunde wird hier, wo es sich um die Gleichheit solcher Potenzen handelt, nur von rationalen Zahlen die Rede sein können.

Es sei nun zuerst die Gleichung

$$(-x)^{-y}=(-y)^{-x} \dots\dots (10.)$$

zu lösen, wo x und y positiv sein sollen, so hat man daraus sogleich

$$(-x)^y=(-y)^x,$$

welche Gleichung in die beiden

$$x^y=y^x \text{ und } (-1)^y=(-1)^x$$

zerfällt. Die erste dieser beiden Gleichungen wird aber nur durch die in (8.) gegebenen rationalen Werthe von x und y aufgelöst, und da dieselben Werthe auch der zweiten Gleichung Genüge leisten, so enthalten sie mithin, wenn man ihnen das Minuszeichen vorsetzt, die vollständige Auflösung der Gleichung (1.) in negativen rationalen Zahlen.

Es sei zweitens die Gleichung

$$(-x)^y=y^{-x} \dots\dots (11.)$$

gegeben, wo wiederum x und y positive Zahlen bedeuten, so bemerke man, dass hier nicht $x=y$ sein kann. Ferner ist zur Realisirung dieser Gleichung nothwendig und hinreichend, dass

$$x^y=y^{-x} \text{ und } (-1)^y=1$$

sei. Aus der ersten dieser Gleichungen zieht man sogleich

$$\frac{y}{x}=-\frac{\log y}{\log x},$$

und setzt man $\frac{y}{x}=\mu$, wo μ positiv und von Eins verschieden sein muss, so hat man

$$y=x\mu, \qquad y=x^{-\mu};$$

folglich

$$x=\mu^{-\frac{1}{\mu+1}}, \quad y=\mu^{\frac{\mu}{\mu+1}} \dots\dots (12.)$$

Sollen nun x und y rational werden, so muss auch μ rational sein. Man setze deshalb

$$\mu=\frac{m}{n},$$

wo m und n ganze Zahlen sind, jedoch weder gleichzeitig $=1$

sein, noch einen von Eins verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor besitzen sollen. Die Werthe (12.) verwandeln sich dadurch in folgende:

$$x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m+n}},\quad y=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m+n}};$$

und damit diese rational werden, müssen

$$m^{\frac{1}{m+n}}=p \text{ und } n^{\frac{1}{m+n}}=q$$

ganze Zahlen sein. Ist nun $m>n$ (die Annahme $n>m$ ändert hieran nichts Wesentliches, weil durch eine Vertauschung von m und n zugleich x und y vertauscht werden), und folglich $p>q$, und setzt man $p-q=r$, so sind q und r an die Gleichung gebunden:

$$(q+r)^{m+n}+q^{m+n}=m+n,$$

$$2q^{m+n}+(m+n)q^{m+n-1}r+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1\;.\;2}q^{m+n-2}r^2+\ldots+r^{m+n}=m+n$$

welche Gleichung durch keine positive ganze Zahlen für q und r aufgelöst werden kann. Mithin ist die Gleichung (11.) in rationalen Zahlen nicht lösbar, oder die Gleichnng (1.) ist nicht lösbar durch solche Paare rationaler Zahlen, von denen die eine positiv, die andere negativ ist. Beiläufig kann man aus dieser Entwickelung noch schliessen, dass die Gleichung

$$x^y\,.\,y^x=1$$

nur die eine Auflösung $x=y=1$ in positiven rationalen Zahlen zulässt.

4.

Durch geometrische Betrachtungen kann man sich auf mehr als eine Art die vorstehenden Resultate zur Veranschaulichung bringen. Nur kann dabei keine Unterscheidung der rationalen von den irrationalen Werthen stattfinden, aus welchem Grunde hier auch negative Werthe unberücksichtigt bleiben müssen.

Es sei ein Werth $y=a$ gegeben, und man sucht den zugehörigen Werth von x aus der Gleichung

$$x^a=a^x\ldots.\quad (13.)$$

Man betrachte

$$z=x^a \text{ und } z'=a^x\ldots.\quad (14.)$$

als Ordinaten zweier Curven für einerlei Abscisse x, so werden die Durchschnittspunkte dieser Curven, in denen $z=z'$ ist, die Auflösungen der Gleichung (13.) enthalten.

Es sei nun zuerst $a<1$, so ist für $x=0$

$$z<z',$$

dagegen für $x=\infty$ wird $\lim\frac{z}{z'}=\infty$, folglich

$$z>z',$$

mithin müssen sich die beiden Curven in einer ungeraden Anzahl von Punkten, also wenigstens einmal schneiden. Dieses geschieht aber augenschnlich in dem Punkte $x=a$, und da die Curven vor diesem Punkte einander ihre convexen Seiten, nach demselben aber ihre concaven Seiten zuwenden (wie man leicht aus der Entwickelung des zweiten Differentialquotienten findet), so können sie keinen zweiten Punkt mit einander gemein haben.

Es sei ferner $a=1$, so werden beide Curven in gerade Linien übergehen, die gleichfalls einen Durchschnittspunkt haben, nämlich für $x=a$.

Es sei endlich $a>1$, so ist für $x=0$

$$z<z',$$

und für $x=\infty$ wird $\lim\frac{z}{z'}=0$, folglich

$$z<z',$$

mithin muss die Anzahl der Durchschnittspunkte, wenn es dereu giebt, gerade sein. Nun aber haben beide Curven wieder den Punkt $x=a$ mit einander gemein, und aus der Betrachtung der Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx}=a\,x^{a-1},\quad \frac{dz'}{dx}=a^x\log a$$

geht hervor, dass beide sich nur dann für $x=a$ auf einerlei Werth reduciren, wenn $\log a=1$ oder $a=e$ ist. Folglich wird der Punkt $x=a$ ein Berührungspunkt werden, wenn $a=e$ ist, dagegen ein Durchschnittspunkt, wenn a von e verschieden ist, mithin muss es im letzten Falle noch einen zweiten Durchschnittspunkt geben; und zwar, weil für $x=a$

$$\frac{dz}{dx}>\frac{dz'}{dx},$$

wenn $\log a<1$ also $a<e$, dagegen

$$\frac{dz}{dx}<\frac{dz'}{dx},$$

wenn $a>e$ wird, so muss für $a<e$ der zweite Durchschnittspunkt einer Abscisse $x>a$, und für $a>e$ derselbe einer Abscisse $x<a$ entsprechen.

Fügt man diesem letzten Resultate nun noch hinzu, dass wegen der Symmetrie der Gleichung (13.) in Bezug auf x und a auch für $x<e$, $a>x$ und für $x>e$, $a<x$ sein muss, so folgt, dass der zweite Durchschnittspunkt der Curven für $a<e$ einer Abscisse $x>e$, und für $a>e$ einer Abscisse $x<e$ entsprechen wird.

Aus diesen Entwickelungen wird man schliessen, dass die beiden Curven (14.) immer einen Durchschnittspunkt besitzen, der zu der Abscisse $x=a$ gehört; dass sie aber nur dann einen zweiten Durchschnittspunkt, dessen Abscisse x von a verschieden ist, besitzen werden, wenn a zwischen 1 und e, oder zwischen e und ∞ liegt, und zwar wird im ersten Falle diese Abscisse zwischen e und ∞, im zweiten Falle zwischen 1 und e liegen: übereinstimmend mit §. 1.

5.

Eine andere geometrische Darstellung der in Rede stehenden Aufgabe ergiebt sich, wenn man die Gleichung (1.) in die Form bringt

$$x^{\frac{1}{x}}=y^{\frac{1}{y}} \dots . (15.).$$

Man setze

$$u=x^{\frac{1}{x}} \dots . (16.)$$

und betrachte diese Gleichung als Gleichung einer Curve, deren Abscissen x und deren Ordinaten u sind. Der Differentialquotient derselben

$$\frac{du}{dx}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$$

wird in dem Intervalle von $x=0$ bis $x=\infty$ einmal Null, nämlich für $x=e$, wobei er aus dem Positiven ins Negative übergeht; folglich wächst u von $x=0$ bis $x=e$, und nimmt ab von $x=e$ bis $x=\infty$, und hat ein Maximum

$$u=e^{\frac{1}{e}} \text{ für } x=e.$$

Ferner ist lim $u=0$ für $x=0$ und lim $u=1$ für $x=\infty$, mithin wiederholen sich nach dem Maximum, nämlich von $x=e$ bis $x=\infty$, alle die Ordinaten wieder, welche vor dem Maximum von $x=1$ bis $x=e$ dagewesen sind, dagegen diejenigen Ordinaten, welche den Abscissen von $x=0$ bis $x=1$ entsprechen, kommen in der Curve nur einmal vor.

Betrachtet man nun x als Unbekannte in der Gleichung (16.), so ergibt sich zunächst, dass die Auflösung nur möglich ist für Werthe von u zwischen $u=0$ und $u=e^{\frac{1}{e}}$. Dabei hat für alle Werthe von u, welche zwischen $u=0$ und $u=1$ liegen, die Gleichung nur eine Wurzel, und diese liegt gleichfalls zwischen 0 und 1; desgleichen für $u=e^{\frac{1}{e}}$ nur eine Wurzel $=e$. Dagegen für alle Werthe von u zwischen $u=1$ und $u=e^{\frac{1}{e}}$ besitzt die Gleichung zwei von einander verschiedene Wurzeln, von denen die eine zwischen 1 und e, die andere zwischen e und ∞ liegt; und hiemit sind in der That wiederum die Ergebnisse des §. 1. zum Vorschein

gekommen, da offenbar die Auflösung der Gleichung (16.) identisch ist mit der Aufsuchung derjenigen zusammengehörigen Werthe von x und y, welche der Gleichung (15.) oder (1.) Genüge leisten.

6.

Was nun endlich die Aufgabe betrifft, zu einem gegebenen Werthe $y>1$ der Gleichung (1.) den zugehörigen Werth von x zu finden, so gelangt man dazu durch Auflösung der Gleichung (16.) für x, indem man $u=y^{\frac{1}{y}}$ als bekannt ansehen hann. Man findet nämlich leicht vermittelst der Reihe von Lagrange:

$$x=1+\log u+\frac{3}{1.2}(\log u)^2+\frac{4^2}{1.2.3}(\log u)^3+\ldots\frac{(n+1)^{n-1}}{1.2\ldots n}(\log u)^n+\ldots$$

Dividirt man den n^{ten} durch den $(n-1)^{\text{ten}}$ Coefficienten, um über die Convergenz der Reihe urtheilen zu können, so hat man

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1},$$

und da für $n=\infty$

$$\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=e,$$

so convergirt mithin die gegebene Reihe für alle Werthe von $\log u$ zwischen

$$\log u=-\frac{1}{e} \text{ und } \log u=\frac{1}{e}$$

oder für alle Werthe von u zwischen

$$u=e^{-\frac{1}{e}} \text{ und } u=e^{\frac{1}{e}},$$

und da für die vorliegende Aufgabe u nur zwischen $u=1$ und $u=e^{\frac{1}{e}}$ fallen kann, so convergirt die Reihe in der That in allen vorkommenden Fällen. Aber sie liefert von den beiden Wurzeln, welche die Gleichung (16.) in dem gegenwärtigen Falle besitzt, nur eine, nämlich die kleinere, wie man daraus ersieht, dass die Summe der Reihe zugleich mit u gegen 1 convergirt, und sie löst mithin nur die Aufgabe: Zu einem gegebenen Werthe $>e$ den zugehörigen Werth $<e$ zu finden; nicht aber die umgekehrte.

Anmerkung. Die vorstehenden Entwickelungen, so einfach sie sind, schienen mir der Beachtung nicht unwerth zu sein, theils weil die erörterte Frage an sich von Interesse ist, theils aber auch, weil dadurch der Werth $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ und seine Gränze, die Zahl e, in einen so nahen und innigen Zusammenhang mit der elementaren Theorie der Potenzen treten, dass ihrer schon auf einer viel frühern Unterrichtsstufe, als es gewöhnlich der Fall ist,

Erwähnung geschehen kann. Diese letztere Bemerkung soll hauptsächlich Pädagogen gesagt sein, für welche ich wohl nicht hinzuzufügen brauche, dass für die Stufe, welche ich andeutete, eine viel mehr elementare Darstellung des Gegenstandes nöthig sein wird, als ich hier gegeben habe.

XXV.

Auszug aus einem Briefe

des

Herrn Professor Steichen

an der École militaire Belgique zu Brüssel

an den

Herausgeber.

J'ai l'honneur de vous communiquer quelques observations, concernant certains passages da la théorie analytique du système du monde par Mr. de Pontécoulant. Je ne saurais admettre la comparaison que l'on établit habituellement entre le mouvement sur un arc elliptique et le mouvement d'un mobile qui oscille linéairement de part et d'autre d'un centre fixe qui attire avec une énergie inversement proportionnelle au quarré de la distance, et j'admettrai encore moins les conclusions que les auteurs en déduisent par le moyen du beau théorème d'Euler et de Lambert qui fait connaître la durée du mouvement en fonction de la corde et des rayons vecteurs extrêmes (voir l'ouvrage cité. p. 277. et p. 291. (h).). Pour justifier mon opinion, je resoudrai directement la question suivante: Un corps ou un simple point matériel d'abord au repos vient à être attiré par un centre fixe de masse μ. On demande d'examiner les circonstances du mouvement dans l'hypothèse que cette masse μ laisse au mobile un libre passage et que l'attraction soit en raison inverse du quarré des distances.

Solution. Soit k'^2 l'accélération de l'unité de masse à l'unité de distance; $\mu k'^2$ exprimera donc l'accélération du centre donné C à l'unité de distance. Considérons le mouvement pendant l'instant dt, qui succède au temps t déjà écoulé depuis le point de départ A du mobile qui est parvenu après t en un point M intermédiaire entre A et C. En posant $MC=z$, $MA=x$, $AC=R_1$, on obtient l'équation différ. seconde:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \text{ ou} -\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{k'^2\mu}{z^2}.$$

Digitized by Google

Cette équation étant intégrée une première fois nous donnera

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \text{Const.} + k'^2 . \mu . \frac{1}{z} = c + \frac{k'^2 \mu}{z} \dots (1).$$

Si l'on determine la constante d'après la condition de $-\frac{dz}{dt} = 0$, et de $z = R_1$, il vieudra:

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{k'^2 \mu}{R_1} \cdot \frac{R_1 - z}{z}, \text{ partant } - \frac{dz}{dt} = k' \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} \cdot \sqrt{\frac{R_1 - z}{z}} \dots (2).$$

On prend dans cette équation $\frac{dz}{dt}$ avec le signe $-$, parceque les éléments dz, dt varient en sens contraire l'un de l'autre; si l'on pose encore pour simplifier $k' \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} = H$, l'équation trouvée devient:

$$H . dt = - \frac{z . dz}{\sqrt{R_1 z - z^2}} \dots (2).$$

Si l'on intégre et que l'on nomme c' la constante amenée par cette opération, on obtient:

$$H . t = c' + \sqrt{R_1 z - z^2} + R_1 . \text{arc} \left(\text{tang} = \sqrt{\frac{R_1 - z}{z}}\right);$$

et comme en comptant le temps dès l'instant du départ en A on doit avoir à la fois $t = 0$, $z = R_1$, il vient $c' = 0$ et

$$H . t = \sqrt{R_1 z - z^2} + R_1 . \text{arc} \left(\text{tang} = \sqrt{\frac{R_1 - z}{z}}\right) \dots (A).$$

De là on conclut facilement pour la durée du mouvement de chûte de A jusqu'eu C la valeur:

$$\tau = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R_1}{H} = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{R_1 \sqrt{R_1}}{k' \sqrt{\mu}} \dots (3).$$

Dans des cas d'attraction analogues à celui que l'on examine ici de certains auteurs ont conclu que le mobile ne saurait jamais descendre au dessous du centre C, parceque alors les quantités R_1, z devenant négatives, l'expression de la vitesse au dessous du centre, donnée par l'équation (2), devenait selon eux imaginaire. Mr. de Pontécoulant a admis avec raison qu'il doit y avoir un mouvement oscillatoire égal de part et d'autre du centre d'attraction; en effet non seulement les quantités R_1 et z doivent changer de signe au dessous de C; mais il faut affuter du même changement la force $k'^2 \mu$, puisque dans le cas contraire on supposerait avec Euler et d'autres, et sans s'en appercevoir qu'au dessous de C la force attractive devienne repulsive. Or en faisant ce changement complet de signes, la formule (2) reste ce qu'elle est, et elle donnera pour $-\frac{dz}{dt}$ une valeur réélle dans l'un et l'autre cas. Mais l'erreur

qu'on vient de signaler est d'autant plus difficile à éviter que dans les notations ordinaires on prend pour unité la quantité que nous nommons k'^2; ce qui revient en quelque sorte à effacer la trace d'une quantité qui doit changer de signe. Au reste cette observation, de notre part à laquelle nous avons été naturellement ameué par notre système de notations dans le mouvement elliptique des planètes, a été déjà présentée sous une forme différente par d'Alembert dans ses opuscules. Mais celui-ci n'a pas resolu toutes les difficultés de la question, et nous nous proposons d'y revenir plus tard et de les éclaircir le plus que possible. Pour mieux éviter tout embarras nommons z' la distance du mobile au point C, quand il s'en écarte en dessous; on aura donc en observant que z' augmente avec le temps, et par l'équation (2):

$$\frac{dz'}{dt'} = H \cdot \sqrt{\frac{R_1 - z'}{z'}} \text{ ou } H.dt' = \frac{z'dz'}{\sqrt{R_1 z' - z'^2}} \dots \quad (2').$$

Celle-ci donnera donc par l'intégration, en nommant c' la constante:

$$H.t' = c' - \sqrt{R_1 z' - z'^2} - R_1 \,.\, \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{R_1 - z'}{z'}}\right) \dots (A')$$

Or pour l'instant du passage par le centre les équations (A, A') doivent subsister à la fois: mais alors on a $z'=0$, $z=0$, $t'=t=\tau$;

$$\text{partant: } H.\tau = c' - R_1 \,.\, \text{arc}(\text{tang} = \infty) = c' - \frac{\pi}{2} \,.\, R_1.$$

Substituant dans cette dernière la valeur de τ fournie par l'égalité (3), on obtient $c' = \pi . R_1$, et (A') deviendra par substitution:

$$H.t' = \pi R_1 - \sqrt{R_1 z' - z'^2} - R_1 \,.\text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{R_1 - z'}{z'}}\right) \dots (B).$$

Ainsi il est démontré 1) que le mobile oscille de part et d'autre du centre et que ses excursions extrêmes de ce point sont égales entr'elles; 2) que la durée τ' d'une oscillation entière qu'on déduit de (B) en posant $z' = R_1$ a la valeur:

$$\tau' = \pi . \frac{R_1}{4} = \pi . \frac{R_1 \sqrt{R_1}}{k' \sqrt{\mu}} \dots (4),$$

qu'elle vaut par conséquent le double de la durée de chûte de A vers C, partant que les durées des demi-oscillations ascendantes et descendantes sont isochrones.

Les résultats précédents étant une fois trouvés, nous sommes en état d'apprécier le plus ou le moins de validité des assertions de Mr. de Pontécoulant. L'auteur affirme d'après Laplace "qu'une planète après avoir atteint l'extrémité du grand axe revient au point d'où elle était partie; que dans le mouvement rectiligne au contraire le corps parvenu au foyer d'attraction passe au delá et qu'il s'en écarte à une distance égale à celle dont il est d'abord descendu; desorte que ce n'est qu'après deux revolutions de la pla-

nète qu'il se retrouve au même point de départ avec elle". Cette dernière proposition est inexacte: car en supposant à l'orbite de la planète un demi-grand axe a, et une excentricité e, et faisant partir à la fois la planète et le mobile du périhélie, la 1ere avec sa vitesse propre, et l'autre avec une vitesse nulle, la planète y reviendra par ce qu'on sait après un temps $\frac{2\pi.a^{\frac{3}{2}}}{k'\sqrt{\mu}}$, tandisque le mobile n'y reviendra qu'après un temps $\frac{2\pi.a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{k'\sqrt{\mu}}$. Cette dernière durée vaudra seulement la durée de deux revolutions de la planète dans le cas particulier ou l'on aurait $(1-e^2)^{\frac{3}{2}}=2$, équation absurde pour tous les cas imaginables du mouvement elliptique; mais la planète et le mobile se retrouveront au même point de départ commun après une revolution et une double oscillation dans le cas particulier de $e=0$, car alors les durées de mouvement deviennent égales. On n'échappera pas à nos objections en prétendant qu'il faut faire partir le mobile d'une distance $2a$ du centre; car alors la durée d'une double oscillation du mobile sera $\pi.\frac{2.2a\sqrt{2a}}{k'\sqrt{\mu}}$, tandisque celle d'une double révolution de la planète reste $\frac{4\pi a\sqrt{a}}{k'\sqrt{\mu}}$. D'ailleurs les mobiles auraient dans ce cas des points de départ et de retour différents. En faisant partir le mobile d'une distance $2a$ l'auteur cité (p. 294.) prend la durée de chûte sur $2a$ ou de A vers C égale à $\pi a\sqrt{a}:k'\sqrt{\mu}$, tandisque la formule (3) donne pour cette durée la valeur $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2a\sqrt{2a}}{k'\sqrt{\mu}}=\pi.a^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}:k'\sqrt{\mu}$. Mais puisque ces conclusions sont inexactes, il importe d'assigner la source première d'où elles découlent. Or en considérant avec l'auteur la chûte rectiligne d'un corps attiré par le centre fixe et partant d'une distance $2a$, on trouve selon lui que la durée du mouvement sur un espace $\varrho'-\varrho$ est exprimée par la formule (p. 293):

$$t'-t=\frac{a\sqrt{a}}{k'\sqrt{\mu}}.(z'_1-z_2-\sin z'_1+\sin z_2)\ldots.(C)$$

dans laquelle on fait pour abréger:

$$\frac{a-\varrho'}{a}=\cos z'_1,\quad \frac{a-\varrho}{a}=\cos z_2.$$

Il nous reste donc à vérifier si en effet cette formule est identique à celle que peut fournir notre équation (A) ou (B). Dans (A) faisons d'abord $\frac{R_1-z^2}{z}=\tang^2\varphi$, ce qui donne $z=R_1\cos^2\varphi=2a.\cos^2\varphi$, et $R_1 z-z^2=4a^2\sin^2\varphi$, partant:

$$H.t=2a.\sin\varphi\cos\varphi+2a.\varphi=a(2\varphi+\sin 2\varphi).$$

Concevons une seconde distance $z_1 < z$, mais comprise entre 0 et $2a$, et soit t' le temps que le mobile emploie à décrire $2a - z_1$; on aura en posant encore une fois $\frac{R_1 - z_1}{z_1} = \tang^2 \varphi'$:

$$H.t' = a(2\varphi' + \sin 2\varphi'),$$

partant: $H(t'-t) = a(2\varphi' - 2\varphi + \sin 2\varphi' - \sin 2\varphi)$,

ou en remettant pour H sa valeur:

$$t' - t = \frac{a\sqrt{2a}}{k'\sqrt{\mu}}.(2\varphi' - 2\varphi + \sin 2\varphi' - \sin 2\varphi)\ldots(D)$$

Or jamais cette formule ne saurait être identifiée dans le sens de l'auteur à la formule (C), qui donne la durée du mouvement sur un arc elliptique par la corde et les rayons vecteurs extrêmes: 1) parceque l'irrationnel $\sqrt{z}$ entre dans le second membre de (D); et 2) parceque les sinus $\sin 2\varphi'$, $\sin 2\varphi$ ont des signes contraires à ceux des quantités $\sin z'_1$, $\sin z_2$ de la formule (C) de Lambert; ainsi la formule (C) applicable à l'évaluation de la durée du mouvement sur l'arc d'ellipse n'est pas exacte pour representer la durée du mouvement rectiligne sur une étendue $z - z_1$, c'est ce qu'on peut aussi démontrer plus directement. Posons en effet pour $R_1 = 2a$:

$$\frac{a - z_1}{a} = \cos \varepsilon', \quad \frac{a - z}{a} = \cos \varepsilon;$$

la formule (A) deviendra:

$$Ht = a.\sin \varepsilon + 2a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$H.t' = a.\sin \varepsilon' + 2a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon'}{2}\right);$$

partant $H(t'-t) = a.(\sin \varepsilon' - \sin \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon')$,

et $t' - t = \frac{a\sqrt{2a}}{k'\sqrt{\mu}}(\varepsilon - \varepsilon' + \sin \varepsilon' - \sin \varepsilon)$.

Or dans cette nouvelle transformation les angles ε, ε' sont précisement et respectivement les angles z'_1, z de la formule (C) de l'auteur; de sorte que le facteur en $\varepsilon, \varepsilon'$, $\sin \varepsilon$, $\sin \varepsilon'$ est identique à celui en z'_1, z_2, $\sin z_1'$, $\sin z_2$ de (C); mais le facteur $a\sqrt{2a} : k'\sqrt{\mu}$ diffère de son correspondant dans (C) dans le rapport de $\sqrt{2} : 1$. Je termine par l'indication de quelques autres legères erreurs que l'auteur corrige au reste dans le courant du calcul, mais qui ne laissent pas que d'embarrasser le lecteur: 1) Le 3ième terme du developpement de $\frac{r}{a}$, p. 262., doit être pris avec le signe $+$. 2) Les coëfficients de $\tang^3\varphi$, $\tang^5\varphi$.... dans le developpement de d (dernière formule de la p. 269.) doivent aussi être corrigés. 3) p. 273. le terme multiplicateur $(1 - e) \tang^3 \frac{1}{2} v$ doit être changé en $(1 - e) \tang \frac{1}{2} v$; cette faute ne se reproduit pas

plus loins. 4) Il est vrai que la direction de la vitesse initiale d'un corps lancé dans l'espace n'influe pas sur l'espèce de la section conique (p. 286.); mais il n'est pas exact de dire (p. 287.) que si la vitesse initiale est perpendiculaire au rayon vecteur, l'orbite décrite soit un cercle; il faut encore que le mobile soit lancé avec une vitesse convenable que l'on déterminera facilement. Du reste cette observation a été déjà faite ici, mais je ne saurais me rappeler ni le nom de l'auteur ni le receuil où je crois l'avoir lue.

XXVI.

Bemerkungen über die bei dem Mechanismus der Gegenlenkung an Dampfmaschinen beschriebenen Curven.

Von dem

Herrn Dr. Haedenkamp,

Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm in Westphalen.

Um die Kolbenstangen bei Dampfcylindern oder auch bei gewöhnlichen Pumpen während der auf- und niedergehenden Bewegung in senkrechter Richtung der Bewegung zu erhalten, dient bekanntlich der Mechanismus der Gegenlenkung. Es soll durch denselben zugleich die schädliche, die Dichtung vermindernde Reibung der Kolbenstangen in der Stopfbüchse und des Kolbens im Cylinder so viel als möglich beseitigt werden. Es hat also ein praktisches Interesse zu wissen, in wie weit der beabsichtigte Zweck durch diese Vorrichtung der Gegenlenkung erreicht werden kann. Von Praktikern veranlasst habe ich daher die für den Maschinenbau nicht unwichtige Curve untersucht, die der Einhängepunkt der Kolbenstange bei der Gegenlenkung während der auf- und niedergehenden Bewegung beschreibt, und theile deren Gleichung hier mit. Die gewöhnlichen Vorrichtungen sind folgende. Um den festliegenden Punkt E (Taf. III. Fig. 1.) dreht sich der Hebelarm ED des Balanciers, mit dessen Endpunkt D das Querstück BD beweglich verbunden ist. Mit dem andern Ende desselben wird ein zweiter Hebel, der Gegenlenker genannt, der seinen festen Drehpunkt in A hat, in Verbindung gebracht. In der Mitte C wird die Kolbenstange eingehängt. Dieser Punkt beschreibt in allen seinen mög-

lichen Lagen eine Curve, die wir hier untersuchen wollen. Eine andere Gegenlenkung ist unter dem Namen Parallelogramm bekannt und wird in der Regel bei doppeltwirkenden Dampfmaschinen angewandt. Bei dieser Vorrichtung ist an dem Arm BD (Taf. III. Fig. 2.) des Balanciers das in seinen Ecken bewegliche Parallelogramm $CDEF$ angebracht. Der Eckpunkt E, in welchem hier die Kolbenstange aufgehängt ist, beschreibt während seiner auf- und niedergehenden Bewegung vermittelst des Lenkers AF, der seinen festen Drehpunkt in A hat, die krumme Linie, die näherungsweise, so weit sich der Endpunkt der Kolbenstange in dieser bewegt, eine gerade Linie sein muss, wenn der durch die Gegenlenkung beabsichtigte Zweck erreicht werden soll.

Es sei AE (Taf. III. Fig. 1.) die Axe der x und F, die Mitte von AE, der Anfang der Coordinaten. Seien die Coordinaten des Punktes $B: x_1, y_1$; von $C: x, y$; von $D: x_2, y_2$; die Constanten $AE=2d$, $AB=r$, $BD=2a$, $DE=\varrho$. Man hat zur Bestimmung der Curve, die der Punkt C beschreibt, folgende Gleichungen:

$$(d-x_1)^2+y_1^2=r^2,\ (d+x_2)^2+y_2^2=\varrho^2,\ (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4a^2,$$
$$2x=x_1+x_2,\ 2y=y_1+y_2.$$

Durch Elimination von x_1, x_2, y_1, y_2 erhält man zuerst diese beiden Gleichungen:

$$\frac{r^2-\varrho^2}{4}=a(x\cos\psi-y\sin\psi)-dx,$$
$$\frac{r^2+\varrho^2}{2}=\omega^2+a^2+d^2-2ad\cos\psi;$$
$$\text{worin } \omega=CF,\ \psi=CGF.$$

Hieraus erhält man, wenn noch

$$\frac{r^2-\varrho^2}{4}=\Delta^2,\quad \frac{r^2+\varrho^2}{2}=m^2$$

gesetzt wird, für die gesuchte Curve folgende Gleichung:

$$(1)\quad \left.\begin{array}{c}\omega^2[\omega^2-m^2+(a+d)^2][\omega^2-m^2+(a-d)^2]\\ -4d^2x^2(\omega^2-m^2)+4d^2\Delta^4-4dx\Delta^2(\omega^2-m^2+a^2-d^2)\end{array}\right\}=0$$

Diese Gleichung vom 6ten Grade lässt sich nur unter besondern Bedingungen in zwei Factoren vom 2ten und 4ten Grade zerlegen. Es ist nicht Zweck, die mannigfachen Formen der in dieser Gleichung enthaltenen Curven hier genauer zu untersuchen. Es genügt hier die allgemeine Gleichung mitgetheilt zu haben. Der Endpunkt der Kolbenstange beschreibt während seiner auf- und niedergehenden Bewegung ein Stück dieser Curve, welches um den Durchschnittspunkt derselben mit der Achse liegt. Dass der Weg der Kolbenstange kein gerader sein kann, ergiebt sich aus der gefundenen Gleichnng. Für gegebene Constanten lässt sich die Abweichung der Tangente von der Curve in jedem beliebigen Punkte berechnen, und somit die zulässige Höhe des Kolbenhubs bestimmen.

Setzt man in der Gleichung (1) $r=\varrho$, so erhält sie eine etwas einfachere Form:

$$(2)\quad \omega^2[\omega^2-m^2+(a+d)^2][\omega^2-m^2+(a-d)^2]=4d^2x^2(\omega^2-m^2).$$

In diesem Falle schneidet die Curve die Linie AE im Punkte F, der Mitte von AE, und die auf beiden Seiten der Achse der y liegenden Arme der Curve sind auch congruent.

Die Tangente, im Punkte F an die Curve gelegt, bestimmt die Richtung der Bewegung der Kolbenstange gegen die Achse AE. Nennt man φ den Neigungswinkel, den diese Tangente mit AE macht, so findet man leicht:

$$\cos\varphi^2=\frac{[r^2-(a-d)^2].[(a+d)^2-r^2]}{4r^2\,d^2}.$$

Hieraus sieht man, dass die beiden in F sich schneidenden Tangenten gleiche Neigung gegen die Achse AE haben. Construirt man aus a, d, r ein Dreieck, so ist der von d und r eingeschlossene Winkel das Complement von φ, wonach die Tangenten leicht gezeichnet werden können. Setzt man in der Gleichung (1) noch $d=r$ und $d=a$, so lässt sie sich in zwei Factoren

$$\omega^2=m^2,\quad \omega^2[\omega^2-m^2+(a+d)^2]=4d^2x^2$$

zerlegen; der eine stellt die Gleichung eines Kreises, der andere die Fusspunktencurven einer Hyperbel dar. In diesem Falle ist $\sin\varphi=\frac{r}{2d}$.

Um die Curve, die bei ber Vorrichtung mit dem Parallelogramm von dem Endpunkte der Kolbenstange beschrieben wird, zu finden, seien (Taf. III. Fig. 2) die Coordinaten des Punktes $F: x_1, y_1$; von $C: x_2, y_2$; von $D: x_3, y_3$ und von $E: x, y$; ferner die Constanten: $AF=r$, $AB=2d$, $CD=b$. Zur Bestimmung der Curve dienen dann folgende Gleichungen:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=b^2,\ (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=b^2,$$
$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=a^2,\ (x-x_3)^2+(y-y_3)^2=a^2,$$
$$(2d-x_3)^2+y_3{}^2=(b+\varrho)^2, x_1{}^2+y_1{}^2=r^2, (2d-x_2)^2+y_2{}^2=\varrho^2.$$

Hieraus erhält man zuerst, wenn A als Anfangspunkt der Coordinaten und AB als Achse der x genommen, $AE=\omega$ und $AGF=\psi$ gesetzt wird, folgende Gleichungen:

$$b(a^2-r^2-d^2-\varrho^2-2b\varrho)-\varrho(r^2-b^2-\omega^2)+2bdx=-2bd(b+\varrho)\cos\psi,$$
$$r^2=b^2+\omega^2+2b\omega(x\cos\psi-y\sin\psi);$$

und hieraus

$$(3)\quad \left.\begin{array}{l}\left(\frac{r^2-b^2-\omega^2}{2b}\right)^2+\left(\frac{b^2-r^2-\omega^2}{b}\right)x(M+N\omega^2+Rx)\\ \qquad +(M+N\omega^2+Rx)^2\omega^2\end{array}\right\}=y^2,$$

wo $b(\omega^2-r^2-d^2-\varrho^2-2b\varrho)-\varrho(r^2-b^2-\omega^2)+\frac{x}{b+\varrho}=M+N\omega^2+Rx$ gesetzt ist.

Setzt man in dieser Gleichung vom 6ten Grade $b=r$, so geht ein Zweig dieser Curve durch den Anfang der Coordinaten, welcher zur senkrechten Bewegung der Kolbenstange dient. Um die Tangente in diesem Punkte und somit die Richtung der Bewegung der Kolbenstange zu erhalten, setze man in der vorhergehenden Gleichung ω und y unendlich klein, und man erhält zur Bestimmung des Neigungswinkels φ der Tangente gegen die Achse der x die folgende Gleichung:

$$\sin\varphi^2=\frac{[a^2-d^2-(r+\varrho)^2]^2}{4d^2(r+\varrho)^2}.$$

Setzt man $r=\varrho$ und $a=d$, so lässt sich die Gleichung (3) in diese beiden Factoren zerlegen:

$$\omega^2=(b+\varrho)^2,$$

$$[(b+\varrho)^2-\omega^2]\cdot\left[\frac{\omega^2}{d^2}+\frac{(b-\varrho)^2}{r^2}-\frac{2(\varrho-b)x}{dr}\right]=\frac{4by^2}{r};$$

wovon die eine die Gleichung eines Kreises darstellt; die andere Curve schneidet die Achse der x in einem Punkte, der von A um $\frac{d}{r}(r-b)$ entfernt ist. Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Punkt, indem $x=\frac{d}{r}(r-b)+x_1$ gesetzt wird, so wird

$$\omega^2\left[(b+r)^2-y^2-\left(\frac{d}{r}(r-b)+x_1\right)^2\right]=\frac{4bd^2}{r}y^2.$$

Im Anfangspunkte der Coordinaten erhält man für die Richtung der Tangente:

$$\sin\varphi^2=\frac{r}{4d^2b}\left[(b+r)^2-\frac{d^2}{r^2}(r-b)^2\right].$$

Ist noch $r=b$, so wird die vorhergehende Gleichung diese:

$$\omega^2(4r^2-\omega^2)=4d^2y^2.$$

Hier ist $\sin\varphi=\frac{r}{d}$.

XXVII.
Berechnung der Geschwindigkeit der Locomotiven auf Eisenbahnen.

Von dem
Herrn Dr. Haedenkamp,
Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm in Westphalen.

Wenn bei einer Locomotive die Kraft der Maschine und der Widerstand, den die bewegten Massen der Bewegung entgegen stellen, bekannt sind, so kann man auch bei diesen Maschinen für jede Zeit die Geschwindigkeit und den von der Maschine zurückgelegten Raum berechnen. Wir wollen hier versuchen, unter der Voraussetzung, dass alle auf die Bewegung der Locomotive Einfluss übenden Kräfte bekannt sind, die Geschwindigkeit der Locomotive mit den daran gehängten Wagen zu bestimmen.

Die Widerstände in der Bewegung auf gerader Bahn, die wir hier allein betrachten, sind:

1. Die gleitende Reibung an den Wagenachsen.
2. Die wälzende Reibung der Radfelgen an den Schienen.
3. Der Widerstand der Luft auf die in Bewegung begriffenen Wagen des Convois.
4. Auf einer Schiefenebene das relative Gewicht der Massen, welches subtractiv oder additiv ist, jenachdem der Convoi auf der Schiefenebene herunter oder herauf geht.

Nennt man den Reibungscoefficienten der Reibung der Räder an der Achse μ, die Halbmesser der Achse und des Rades r und R und das Gewicht der Wagen und Ladung ohne das der Räder M; so ist der auf den Umfang der Räder übergetragene Widerstand der Reibung $\frac{M\mu r}{R}$. Der Coefficient μ hängt noch von dem guten Zustande der Achsen und der Achsenbüchsen ab und ist insofern veränderlich. Bei richtig abgedrehten und gut geschmierten Achsen kann μ bis zu $\frac{1}{40}$ heruntergehen. In der Regel wird μ zu 0,1 gerechnet. Bezeichnet μ' den Reibungscoefficienten der wälzenden Reibung am Radumfange und m das Gewicht der Räder, so wird dieselbe, weil sie im umgekehrten Verhältnisse der Grösse der Radhalbmesser steht, durch $\frac{(M+m)\mu'}{R}$ ausgedrückt. Diese Reibung ist im Allgemeinen auf Schienen im Verhältnisse zur Achsen-Reibung sehr gering, und kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden.

Digitized by Google

Einer Reibung des Spurkranzes an den Bahnschienen soll zwar dadurch vorgebeugt werden, dass man dem Rade eine conische Form giebt und ausserdem den Rädern auf jeder Seite der Bahn einen gewissen Spielraum lässt, kann aber dennoch durch zufälligen Seitendruck, z. B. durch Wind und dadurch, dass die Schienen nicht in horizontaler Ebene liegen, beträchtlich werden. Wir vernachlässigen diese Art Reibung hier. Um den Ausdruck für den Widerstand der Luft zu erhalten, setze man die ganze widerstehende Fläche des Convoi's s, und die Geschwindigkeit desselben v; so wird dieser Widerstand bekanntlich durch $\varepsilon v^2 s$ ausgedrückt, wo ε der auf die Flächeneinheit ausgeübte Widerstand ist. Fasst man diese drei Widerstände zusammen so erhält man für den Gesammtwiderstand diesen Ausdruck:

$$\frac{M\mu r + (M+m)\mu''}{R} + \varepsilon s v^2 = \frac{M\mu''}{R} + \varepsilon s v^2$$

auf einer horizontalen Bahn. Auf einer unter dem Winkel ψ geneigten Ebene geht dieser Ausdruck für den Widerstand in folgenden über:

$$\frac{M\mu''}{R}\cos\psi \pm (M+m)\sin\psi + \varepsilon s v^2.$$

Zur Berechnung der bewegenden Kraft der Maschine bezeichne man den wirksamen Druck des Dampfes auf den Kolben mit dem Durchmesser d auf die Flächeneinheit durch p, nach Abzug des Luftdrucks und aller Reibungen der Maschine von der Bodenfläche des Dampfcylinders bis zur Kurbel. Der Druck auf die ganze Kolbenfläche wird durch $\frac{d^2\pi p}{4}$ ausgedrückt. Dass bei Expansionsmaschinen p nicht constant sein kann, versteht sich von selbst. Auch bei Maschinen ohne Expansion kann p während der Dauer eines Kolbenlaufes nicht genau constant sein, und dem Drucke des Dampfes im Kessel nicht entsprechen, da der Dampf durch die Dampfleitungsröhren nicht momentan aus dem Kessel in den Kolben eindringen kann, auch Wärme beim Uebergange des Dampfes verloren geht. p muss von der Geschwindigkeit, womit der Dampf in den Cylinder stürzt, abhängen. Je weiter der Dampfcanal und je grösser der Druck im Kessel, desto näher ist p einer Constante gleich. In Ermangelung genauerer Versuche, und weil immer der Unterschied unbeträchtlich, nehmen wir bei Maschinen ohne Expansion p constant. Um bei Expansionsmaschinen den Druck des Dampfes im Cylinder nach der Absperrung desselben durch eine Formel auszudrücken, benutzen wir die vom Grafen de Pambour in seinem Werke über Dampfmaschinen mitgetheilten, aus den Navierschen Versuchen abgeleiteten Formeln. Sei M das Volumen des Dampfes im Cylinder im Augenblicke der Absperrung, welcher sich unter dem Drucke p aus dem Volumen S Wasser gebildet hat; so ist nach Naviers Versuchen

$$\frac{M}{S} = \frac{1}{\alpha + \beta p},$$

wo α und β Constanten.

Ferner sei M' das Volumen Dampfes, welches sich unter dem Drucke p' nach der Absperrung aus demselben Volumen S Wasser gebildet hat, so wird

$$\frac{M'}{S}=\frac{1}{\alpha+\beta p'}.$$

Hieraus erhält man

$$\frac{M}{M'}=\frac{\alpha+\beta p'}{\alpha+\beta p}.$$

Ist nun l die ganze Länge des Kolbenlaufs und l' die Länge desselben bis zur Absperrung des Dampfes, und γ der schädliche Raum, dann ist für den um x vorgerückten Kolben

$$M=d^2\pi(l'+\gamma),\quad M'=d^2\pi(l'+\gamma+x)$$

$$\text{und}\ \frac{l'+\gamma}{l'+\gamma+x}=\frac{\alpha+\beta p'}{\alpha+\beta p}.$$

Hieraus erhält man für den Druck auf den Kolben nach der Absperrung des Dampfes

$$p'=(\frac{\alpha}{\beta}+p)\frac{l'+\gamma}{l'+\gamma+x}-\frac{\alpha}{\beta}.$$

Da bekanntlich die Locomotive so eingerichtet ist, dass der Dampf, nachdem er seine Wirkung gethan, durch eine Röhre von geringem Durchmesser, das Blasrohr genannt, durch den Schornstein in die Luft entweicht, wodurch ein künstlicher Luftstrom erzeugt wird, der zur lebhaften Verbrennung in der Esse durchaus nothwendig ist: so kann dieser Dampf nicht augenblicklich entweichen und muss daher während des Ausströmens noch einen Druck gegen den Kolben ausüben, der dem Drucke p entgegengesetzt ist. Aus angestellten Versuchen, die Pambour in seinem Werke über Dampfwagen mitgetheilt hat, hat sich herausgestellt, dass dieser Widerstand bei derselben Oeffnung des Blasrohres nahe der Geschwindigkeit der Locomotive proportional gesetzt werden könne. Diesen Widerstand bezeichnen wir durch $\frac{d^2\pi}{4}qv$. Die bewegende auf den Kolben wirkende Kraft der Maschine wird demnach durch $\frac{d^2\pi}{4}(p-qv)$ bei Maschinen ohne Expansion ausgedrückt. Bei Maschinen mit Expansion ist vor der Absperrung des Dampfes die Kraft auch: $\frac{d^2\pi}{4}(p-qv)$ und nach der Absperrung: $\frac{d^2\pi}{4}\left[(\frac{\alpha}{\beta}+p)\frac{l'+\gamma}{l'+\gamma+x}-\frac{\alpha}{\beta}-qv\right]$.

Diese Kraft des Dampfes wird durch die Kolbenstange, die immer ein und dieselbe Richtung beibehält, und durch die mit derselben verbundene Leitstange zur Kurbel fortgepflanzt, setzt diese und das damit verbundene Triebrad und so die Maschine und den angehängten Wagen in Bewegung. Bei dieser Einrichtung kann die Dampfkraft nicht senkrecht auf den Kurbelhalbmesser wirken und muss daher in den verschiedenen Lagen der Kurbel verschiedene Werthe annehmen. Um dies deutlich zu machen und die auf

Digitized by Google

den Umfang übergetragene Kraft des Dampfes zu berechnen, sei in Taf. III. Fig. 3. da ein Stück der Kolbenstange, $ac = t$ die Leitstange und $bc = \frac{1}{2}$ der Halbmesser des Krummzapfens. Nennt man nun die in der Richtung da wirkende unmittelbare Kraft des Dampfes P und die in c übergetragene auf bc senkrechte Kraft Q, so findet man leicht

$$Q = P\frac{\sin bca}{\cos bac} = P\sin\varphi\left[1 + \frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right],$$

wo Winkel $cba = \varphi$, $\frac{1}{2t} = k$ ist.

Für die Kraft des Dampfes im zweiten Cylinder auf den andern Kurbelarm, der senkrecht auf dem ersten angenommen wird, hat man

$$Q = P\cos\varphi\left[1 - \frac{k\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}\right].$$

Trägt man diese Kräfte auf den Umfang des Triebrades über, so wird für den einen Kolben die Kraft:

$$\frac{d^2 l}{2D}(p - qv)\sin\varphi\left[1 + \frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]$$

und für den andern:

$$\frac{d^2 l}{2D}(p - qv)\cos\varphi\left[1 - \frac{k\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}\right];$$

wo D der Durchmesser des Triebrades.

Für beide Kräfte zusammen setzen wir der Kürze wegen: $\frac{d^2 l}{2D}(p - qv)F\varphi$. Diese Ausdrücke gelten für Maschinen ohne Expansion; für Expansionsmaschinen gelten vor der Absperrung dieselben Formeln, und nach der Absperrung muss man darin für p den obigen Werth p' setzen. Demnach wird die Kraft, welche die fortschreitende Bewegung des Convoi's auf horizontaler Bahn bewirkt, diese:

$$\frac{d^2 \pi l}{2D}(p - qv)F(\varphi) - \frac{M\mu''}{R} - \varepsilon s v^2,$$

und für die beschleunigende Kraft erhält man den Ausdruck:

$$\frac{2g\left[\frac{d^2 \pi l}{2D}(p - qv)F(\varphi) - \frac{M\mu''}{R} - \varepsilon s v^2\right]}{M + m + \frac{m A^2}{R^2}};$$

wo g den Fallraum in der ersten Sekunde und mA^2 das Moment der

Digitized by Google

Trägheit der Räder bezeichnet. Hieraus erhält man endlich nach den bekannten Gesetzen der Bewegung zur Bestimmung der Geschwindigkeit des ganzen Wagenzugs folgende Gleichung:

$$1)\quad \frac{v\,dv}{R\,d\varphi} = 2g\left[\frac{\frac{d^2\pi l}{2D}(p-qv)F(\varphi) - \frac{M\mu''}{R} - \varepsilon s v^2}{M + m + \frac{mA^2}{R^2}}\right].$$

Die Integration dieser Gleichung giebt die Geschwindigkeit für jeden Stand des Kolbens im Cylinder und in jedem Punkte der Bahn, und so die vollständige Lösung unserer Aufgabe. Indess ist von dieser Gleichung das Integral in endlicher Form nicht zu erhalten. Um hier Reihenentwickelungen zu vermeiden, beschränken wir uns auf Annäherungen. Zu diesem Ende setzen wir p und $F(\varphi)$ constant, und zwar $F(\varphi)=1$, d. h. wir betrachten die durch die Kolben- und Leitstange fortgepflanzte Kraft des Dampfes als auf den Kurbelarm senkrecht wirkend. Unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung (1), wenn wir noch der Kürze wegen

$$\frac{pld^2}{2D(M+m+\frac{mA^2}{R^2})} = A^2,\quad \frac{ld^2}{2D(M+m+\frac{mA^2}{R^2})} = 2B,$$

$$\frac{\varepsilon s}{2D(M+m+\frac{mA^2}{R^2})} = C^2$$

setzen, folgende:

$$2)\quad \frac{v\,dv}{dx} = 2g\,(A - 2Bv - Cv^2).$$

Nimmt man von dieser Gleichung das Integral und setzt für $x=0$ auch $v=0$, so wird

$$3)\ \frac{(L+v)^{1+m}(L'-v)^{1-m}}{L^{1+m}L'^{1-m}} = e^{-4gC^2x},\quad \left(\frac{L'}{L}\right)^{m'}\left(\frac{L+v}{L'-v}\right)^{m'} = e^{\,4C^2gt};$$

$$\text{wo}\quad \frac{\sqrt{A^2+B^2}-B}{C} = L,\quad \frac{\sqrt{A^2+B^2}+B}{C} = L',$$

$$m = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad m' = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

x der von der Locomotive durchlaufene Raum und t die zu x gehörige Zeit ist.

Wollte man den vom Blasrohre herrührenden Widerstand vernachlässigen, so würde die Gleichung (3) diese:

$$\frac{A^2}{C^2} - v^2 = \frac{A^2}{C^2}.e^{-4C^2gx}\quad \text{oder}\ v = \frac{A}{C}\sqrt{1-e^{-4C^2gx}}.$$

Digitized by Google

Für ein unendlich grosses x wird die Geschwindigkeit constant und $v = L' = \frac{\sqrt{A^2+B^2}+B}{C}$. Obgleich dieser Zustand genau genommen nie Statt findet, so tritt er doch in der Wirklichkeit annähernd bald ein.

Die hier gegebenen für eine horizontale Bahn geltenden Formeln gelten auch für geneigte Ebenen, wenn man in (2) für A^2 diesen Werth setzt:

$$A^2 = \frac{\frac{d^2 lp}{2D} - \frac{M\mu''}{R}\cos\psi - (M+m)\sin\psi}{M+m+\frac{mA^2}{R^2}}$$

Um zu berechnen, wie weit ein Wagenzug sich noch fortbewegt, wenn bei einer bestimmten Geschwindigkeit die Dämpfe zu wirken aufhören, muss man die Gleichung (2), nachdem darin p und $q=0$ gesetzt, so integriren, dass für $x=0$, v einen bestimmten Werth v' hat. Man erhält dann

$$\frac{A^2}{A^2 - C^2 v'^2} = e^{-4C^2 gx}.$$

Um steilere Ebenen ohne stehende Dampfmaschinen mit Dampfwagen noch hinanzusteigen, bedient man sich zweier Züge. Man lässt nemlich einen Zug auf der schiefen Ebene heruntergehen, während der andere, der mit dem ersten durch ein auf Rollen liegendes Seil verbunden ist, auf einer zweiten parallelen Ebene herauf geht. Dass ein solcher Betrieb noch einfach und sicher, wenn die Ebene nicht zu steil ist, ausgeführt werden kann, hat die Elberfelder Bahn bewiesen. Wir wollen für diesen Fall noch die Geschwindigkeit berechnen, womit ein Zug eine solche Ebene noch hinangeht. Zu diesem Ende wollen wir, der Einfachheit wegen, die beiden Züge in allen Theilen gleich setzen. Es hindert aber nichts diese Rechnungen auf ganz verschiedene Züge auszudehnen. Das Seil, welches die beiden Züge verbindet, habe bei der Länge l'' das Gewicht G; die Halbmesser der Rollen und deren Achsen seien ϱ, ϱ'; der Reihungscoefficient an der Achse der Rollen sei μ'''. Ist nun die Geschwindigkeit der Züge v, und x der von denselben durchlaufene Weg von dem Kopfe der schiefen Ebene angerechnet: dann ist der Widerstand des hinaufgehenden Zuges mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen:

$$\left(\frac{M\mu''}{R} + \frac{l''-x}{l''}\cdot G\frac{\varrho'}{\varrho}\mu'''\right)\cos\psi + \varepsilon s v^2 + \left(M+m+\frac{l''-x}{l''}\cdot G\right)\sin\psi,$$

und des heruntergehenden:

$$\left(\frac{M\mu''}{R} + \frac{x}{l''}\cdot G\frac{\varrho'}{\varrho}\mu'''\right)\cos\psi - \left(M+m+\frac{x}{l''}\cdot G\right)\sin\psi + \varepsilon s v^2;$$

der Widerstand von beiden Zügen ist also:

$$2\left(\frac{M\mu''}{R} + G\frac{\varrho'}{\varrho}\mu'''\right)\cos\psi + \frac{l''-2x}{l''}\cdot G\sin\psi + 2\varepsilon s v^2.$$

Hierbei ist der aus der Steifigkeit des Seils der grossen Seilrollen hervorgehende Widerstand ausser Rechnung gelassen.

Setzt man die Kraft der beiden Maschinen auch gleich und jede wie früher: $\frac{d^2l}{2D}(p-qv)$, dann ist die beschleunigende Kraft:

$$R = 4g\left[\frac{\frac{d^2l}{2D}(p-qv)-(\frac{M\mu''}{R}+G\frac{\varrho'}{\varrho}\mu''')\cos\psi-\varepsilon s v^2-\frac{l''-2x}{2l''}.G\sin\psi}{2M+2m+\frac{2mA^2}{R^2}+\frac{m'A'^2}{\varrho^2}}\right];$$

wo m' das Gewicht der Rollen und $m'A'^2$ das Moment der Trägheit bedeutet. Hieraus erhält man zur Bestimmung der Geschwindigkeit wie in (1) folgende Gleichung:

$$\frac{vdv}{dx} = 4gR,$$

deren Integral die Abhängigkeit von x giebt.

Numerische aus Versuchen entnommene Details werde ich an einem andern Orte mittheilen.

XXVIII.

Auflösung der Aufgabe: In ein gegebenes Viereck ein Quadrat zu beschreiben; nebst einigen Sätzen, welche zu beweisen sind.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

A. Trigonometrische Behandlung.

Analysis.

Es seien in einer Ebene (Taf. III. Fig. 4.) die Geraden A, A_1; B, B_1 als die Gegenseiten eines einfachen Vierecks gegeben, und p, q, r, s, f, g der Reihe nach die Durchschnitte von A, B; B, A_1; A_1, B_1; B_1, A; A, A_1; B, B_1; man denke sich ein

Quadrat aba_1b_1, dessen Gegenecken a, a_1; b, b_1 auf jenen Geraden liegen; es werde die Länge von fg mit a, die Seite des Quadrates mit q, die Winkel, welche A, A_1 und ab mit der Richtung von f nach g bilden, mit α, α_1 und φ, und die Winkel, welche B, B_1 mit der Richtung von g nach f bilden, mit β, β_1 bezeichnet. Diess vorausgesetzt, so hat man folgende Relationen:

$$1)\quad fs = a\frac{\sin\beta_1}{\sin(\alpha+\beta_1)};\quad gq = a\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\beta+\alpha_1)};$$

$$fp = a\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)};\quad gp = a\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\alpha)};$$

also $$ps = a\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta_1 - \sin(\alpha+\beta_1)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta_1)} = a\frac{\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta_1)};$$

$$pq = a\frac{\sin(\beta+\alpha)\sin\alpha_1 - \sin(\beta+\alpha_1)\sin\alpha}{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta+\alpha_1)} = a\frac{\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta+\alpha_1)}.$$

$$2)\quad pa = q\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha+\beta)};\quad pb = q\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta+\alpha)};$$

$$sa = q\frac{\cos(\beta_1-\varphi)}{\sin(\beta_1+\alpha)};\quad qb = q\frac{\cos(\alpha_1+\varphi)}{\sin(\alpha_1+\beta)};$$

also $$ps = q\frac{\sin(\beta-\varphi)\sin(\beta_1+\alpha)+\cos(\beta_1-\varphi)\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta_1)};$$

$$pq = q\frac{\sin(\alpha+\varphi)\sin(\alpha_1+\beta)+\cos(\alpha_1+\varphi)\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\alpha_1)}.$$

Aus 1) und 2) ergibt sich:

$$3)\quad \frac{\sin(\beta-\varphi)\sin(\beta_1+\alpha)+\cos(\beta_1-\varphi)\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\varphi)\sin(\alpha_1+\beta)+\cos(\alpha_1+\varphi)\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$\frac{(\sin\beta\cot\varphi-\cos\beta)\sin(\beta_1+\alpha)+(\cos\beta_1\cot\varphi+\sin\beta_1)\sin(\alpha+\beta)}{(\sin\alpha\cot\varphi+\cos\alpha)\sin(\alpha_1+\beta)+(\cos\alpha_1\cot\varphi-\sin\alpha_1)\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$\frac{\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)};\ \text{also}$$

$$\cot\varphi = \frac{\left[\begin{array}{l}\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)[\cos\beta\sin(\beta_1+\alpha)-\sin\beta_1\sin(\alpha+\beta)]\\ +\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)[\cos\alpha\sin(\alpha_1+\beta)-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\beta)]\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l}\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)[\cos\beta_1\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta\sin(\beta_1+\alpha)]\\ -\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)[\cos\alpha_1\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha_1+\beta)]\end{array}\right]} = \frac{Z}{N}.$$

Endlich ergibt sich nun aus 2) und 3):

$$4)\quad \frac{pa}{pb} = \frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{\sin\beta\cot\varphi-\cos\beta}{\sin\alpha\cot\varphi+\cos\alpha} = \frac{Z\sin\beta-N\cos\beta}{Z\sin\alpha+N\cos\alpha} = \frac{Z_1}{N_1}:$$

$$Z_1 = -\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)\sin(\alpha+\beta)[\cos\beta\cos\beta_1+\sin\beta\sin\beta_1]$$

$$+\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)\begin{bmatrix}\sin(\alpha_1+\beta)(\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha)\\+\sin(\alpha+\beta)(\cos\beta\cos\alpha_1-\sin\beta\sin\alpha_1)\end{bmatrix}$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\begin{bmatrix}\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))\\-\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)\cos(\beta_1-\beta)\end{bmatrix};$$

$$N_1=\sin(\alpha+\beta)\begin{bmatrix}\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)(\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha))\\-\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)\cos(\alpha_1-\alpha)\end{bmatrix};$$

folglich $\frac{pa}{pb}=$

$$\frac{\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)[\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta)]-\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)\cos(\beta_1-\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)[\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha)]-\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)\cos(\alpha_1-\alpha)}.$$

Konstruktion.

1) Aus irgend einem der vier Punkte p, q, r, s, z. B. aus p, dem Durchschnitte von A, B, fälle man auf A_1 eine Senkrechte pc, nehme auf A_1 die Strecke $cd=cp$ und ziehe pd. Sodann errichte man in p auf B eine Senkrechtè, fälle vom Punkte e, wo letztere die B_1 schneidet, eine Senkrechte ei auf pd, welche A_1 in h (und pc in n) schneidet, und lege durch h mit pc eine Parallele; so erhält man, als Durchschnitt dieser letzteren mit A, einen Punkt k.

2) Auf dieselbe Weise, indem man nur die Geraden A und B, A_1 und B_1 mit einander vertauscht, suche man die den Punkten c, d, e, h, k entsprechenden Punkte c_1, d_1, e_1, h_1, k_1.

3) Jetzt verbinde man die Punkte k und k_1 mit einander durch eine Gerade, welche A_1 in v, B_1 in w schneidet, beschreibe über kk_1, als Diagonale, ein Quadrat $k\alpha k_1\beta$. und über vw, als Diagonale, ein zweites $v\gamma w\delta$, und verbinde die Punkte α und β mit p durch zwei Gerade, und γ und δ mit r durch zwei andere; so ist einer der Punkte, in welchen letztere die beiden ersteren schneiden, aber auch nur einer, z. B. m, der Mittelpunkt eines Quadrates aba_1b_1, dessen Ecken a, a_1; b, b_1 auf A, A_1; B, B_1 liegen; und zwar sind die Diagonalen desselben den Seiten, und die Seiten den Diagonalen der beiden vorigen parallel. Errichtet man in k (oder k_1) auf kk_1 eine Senkrechte, welche B_1 (oder A_1) in k_2 schneidet, beschreibt über kk_2, als Diagonale, ein Quadrat, und verbindet die beiden neuen Ecken desselben mit s (oder q) durch zwei Gerade, so geht eine von diesen ebenfalls durch den Punkt m, so dass also über diesen Punkt keine Ungewissheit weiter bleibt.

Beweis

1) W. $pfr=\alpha_1-\alpha$, W. $pgr=\beta_1-\beta$, W. $pqr=\alpha_1+\beta$, W. $psr=\beta_1+\alpha$; $pc=pf.\sin(\alpha_1-\alpha)$, $fc=pf.\cos(\alpha_1-\alpha)$, $pe=pg.\tang(\beta_1-\beta)$, $qd=qc+pc=pq.(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))$; $pc_1=pg.\sin(\beta_1-\beta)$, $gc_1=pg.\cos(\beta_1-\beta)$, $pe_1=pf.\tang(\alpha_1-\alpha)$, $sd_1=sc_1+pc_1=ps.(\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha))$; $\frac{pf}{pg}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Da W. $pcq=epq=R$, so ist W. $pqd=$ W. epn, und da W. $cip=$ W. $pcq=R$, so ist W. $pdq=$ W. $pne=$ W. $dpc=$ W. nhc

$=\frac{1}{2}R$, also $\Delta pqd \sim \Delta pen$, $nc=hc$, und $pq:pe=dq:pn$; demnach $pn=pe.\frac{dq}{pq}=pg.\operatorname{tang}(\beta_1-\beta)(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))$, und $hc=nc=pn-pc=pg.\operatorname{tang}(\beta_1-\beta)(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))-pf\sin(\alpha_1-\alpha)$.

Ebenso ist

$$h_1c_1=pf.\operatorname{tang}(\alpha_1-\alpha)(\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha))-pg.\sin(\beta_1-\beta).$$

2) Da $hk \parallel pc$, $h_1k_1 \parallel pc_1$, also

$$pf:pk=cf:ch,\quad pg:pk_1=c_1g:c_1h_1;$$ so ist

$$\frac{pk}{pk_1}=hc\frac{c_1g}{pg}:h_1c_1\frac{cf}{pf}=\frac{hc.\cos(\beta_1-\beta)}{h_1c_1.\cos(\alpha_1-\alpha)}=$$

$$\frac{pg\sin(\beta_1-\beta)(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))-pf\sin(\alpha_1-\alpha)\cos(\beta_1-\beta)}{pf\sin(\alpha_1-\alpha)(\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha))-pg\sin(\beta_1-\beta)\cos(\alpha_1-\alpha)}.$$

3) Zieht man durch einen **beliebigen** Punkt m der Linie $p\alpha$ mit $k\alpha$ und $k_1\alpha$ die Parallelen ma und mb, welche von A und B begrenzt werden, so ist $ma:mb=k\alpha:k_1\alpha=1:1$, also W. $mab=mba=\frac{1}{2}R=$ W. αkk_1; folglich $ab \parallel kk_1$.

Denkt man sich in k auf kk_1 eine Senkrechte errichtet, welche B_1 in k_2 schneidet, sodann über kk_2, als Diagonale, ein Quadrat beschrieben, und die neuen Ecken desselben mit s durch zwei Gerade verbunden, so werden die Seiten dieses Quadrates mit denen des $k\alpha k_1\beta$ einerlei Richtung haben, und eine dieser zwei Geraden wird die $p\alpha$ in einem Punkte u schneiden, welcher in der Richtung von $k\alpha$ und $k_1\alpha$ sowohl von A und B, als auch von A und B_1 gleichweit absteht, d. h. $u\alpha_0=u\beta_0=u\beta'_0$, wenn die Punkte α_0, β_0, β'_0 auf A, B, B_1 liegen, und $\beta_0 u\beta'_0 \parallel k_1\alpha$, $u\alpha_0 \parallel k\alpha$ ist. Denkt man sich nun $u\alpha_0$ um $u\alpha'_0=u\alpha$ verlängert, so ist $\alpha_0\beta_0\alpha'_0\beta'_0$ ein Quadrat; und es ist zu zeigen, dass die Ecke α'_0 auf A_1 liegt, und dass die Punkte u und m identisch sind.

Man denke sich durch α'_0 mit A_1 eine Parallele A_2 gelegt, welche A in f_1 schneiden möge, so sind die Winkel, welche A_2 mit A, B bildet, $=\alpha_1-\alpha$, $\alpha_1+\beta$; und es mögen die Winkel, welche A und B mit f_1g bilden, α_2 und β_2 heissen. Wird nun die in der Analysis gegebene Entwickelung in Ansehung der Geraden A, B, A_2, B_1 und des Qudrates $\alpha_0\beta_0\alpha'_0\beta_0$ wiederholt, so findet man:

$$\frac{p\alpha_0}{p\beta_0}=\frac{\sin\alpha_2\sin(\beta_1-\beta)(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))-\sin\beta_2\sin(\alpha_1-\alpha)\cos(\beta_1-\beta)}{\sin\beta_2\sin(\alpha_1-\alpha)(\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha))-\sin\alpha_2\sin(\beta_1-\beta)\cos(\alpha_1-\alpha)};$$

vergleicht man aber diesen Ausdruck mit dem für $\frac{pk}{pk_1}$ in 2) gefundenen und bedenkt, dass $kk_1 \parallel \alpha_0\beta_0$, also $\frac{pk}{pk_1}=\frac{p\alpha_0}{p\beta_0}$, und dass $\sin\alpha_2:\sin\beta_2=pg:pf_1$ ist, so überzeugt man sich, dass $pf_1=pf$ sein, also A_2 mit A zusammenfallen muss.

Und da nun $u\alpha'_0=u\beta'_0$, also der Punkt u auch auf der Geraden $r\delta$ (oder $r\gamma$) liegen muss, so sind die Punkte u und m,

und somit auch das Quadrat $\alpha_0\,\beta_0\,\alpha'_0\,\beta'_0$ mit dem durch die Konstruktion erhaltenen Viereck aba_1b_1 identisch.

Determination.

Da zwei Quadrate mit parallelen Seiten ähnliche und ähnlich liegende Figuren sind, also die Geraden A, A_1, B, B_1, welche ihre Ecken paarweise verbinden, in einerlei Punkte convergiren, so kann es für die gefundene Richtung kk_1 nur einen einzigen Punkt m geben. Da aber die Punkte d und d_1 ein jeder resp. sowohl auf der einen als auf der andern Seite von pc und pc_1 liegen kann, man also zwei Punkte k und zwei Punkte k_1 erhält, so scheint es, dass die Aufgabe im Allgemeinen einer Anzahl von vier Auflösungen fähig ist. Hierüber wird die folgende Untersuchung ein bestimmteres Urtheil gewähren.

Anm. Ist $A \parallel A_1$ und $B \parallel B_1$, so ist $\sin\alpha : \sin\beta = pg : pf = 1$, $\cos(\alpha_1 - \alpha) = \cos(\beta_1 - \beta) = 1$, $\sin(\alpha_1 - \alpha) : \sin(\beta_1 - \beta) = \frac{pq}{fq}\sin(\alpha + \beta) : \frac{ps}{gs}\sin(\alpha + \beta) = pq : ps$, wodurch sich die obige Konstruktion sehr vereinfacht.

B. Mittels projektivischer Gebilde.

Analysis.

Der Mittelpunkt des gesuchten Quadrates ist der Mittelpunkt der Hypotenusen zweier gleichschenkliger rechtwinkliger Dreiecke, deren jedes einem von zwei gegebenen Dreiecken eingeschrieben ist, also der Durchschnitt der geometrischen Oerter dieses Mittelpunktes für die zwei gegebenen Dreiecke.

Es sei (Taf. III. Fig. 5.) npq irgend ein gleichschenkliges, bei p rechtwinkliges Dreieck, dessen Ecken n, q, p auf drei der Lage nach gegebenen Geraden A, A_1, A_2 liegen, m sei der Mittelpunkt von nq, also $mn = mp = mq$ und W. $qmp = R$. Es seien B, B_1 die Durchschnitte von A_2 mit A, A_1, durch B mit pq die Parallele a', welche A_1 in $\mathfrak{a}_1$ schneidet, und durch B_1 mit pn die Parallele a'_1, welche A in $\mathfrak{a}$ schneidet, gezogen; ferner seien $B\alpha_1$ und $B_1\alpha$ oder a'' und a''_1 parallel mit pm, und der Punkt m mit B und B_1 durch zwei Gerade a, a_1 verbunden, welche resp. die a''_1 und a'' in α und α_1 schneiden. Diess vorausgesetzt, so ist $\Delta B\mathfrak{a}_1\alpha_1 \sim \Delta pqm$ und $\Delta B_1\mathfrak{a}\alpha \sim \Delta pnm$, W. $\mathfrak{a}_1 B\alpha_1 =$ W. $qpm =$ W. $\mathfrak{a}B_1\alpha =$ W. $npm = \frac{1}{2}R$ und $B\alpha_1 : B\mathfrak{a}_1 = pm : pq = pm : pn = B_1\alpha : B_1\mathfrak{a} = 1 : \sqrt{2}$.

Die Geraden a', a'_1 sind, ebensowie pq, pn, rechtwinklig zu einander; denkt man sich also das Dreieck npq fortwährend unter denselben Bedingungen variirt, und die den Linien a, a_1, a', a'_1, a'', a''_1 entsprechenden Linien der Reihe nach mit b, b_1, b', b'_1, b'', b''_1; c, c_1; c', c'_1, c'', c''_1; d, d_1, d', d'_1, d'', d''_1 ...., und die

den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, α, α_1 entsprechenden Punkte mit $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, β, β_1; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$, γ, γ_1; $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, δ, δ_1, ... bezeichnet, so liegen die Durchschnitte je zweier Geraden a', a'_1; b', b'_1; c', c'_1; d', d'_1.... auf einer Kreislinie, deren Durchmesser BB_1 ist; und da W. $\mathfrak{a}_1 B\alpha_1 = \mathfrak{b}_1 B\beta_1 = \mathfrak{c}_1 B\gamma_1 = \mathfrak{d}_1 B\delta_1 \ldots. = \mathfrak{a} B_1 \alpha = \mathfrak{b} B_1 \beta = \mathfrak{c} B_1 \gamma = \mathfrak{d} B_1 \delta \ldots. = \frac{1}{2}R$, und $B\alpha_1 : B\mathfrak{a}_1 = B\beta_1 : B\mathfrak{b}_1 = B\gamma_1 : B\mathfrak{c}_1 = B\delta_1 : B\mathfrak{d}_1 \ldots = B_1\alpha : B_1\mathfrak{a} = B_1\beta : B_1\mathfrak{b} = B_1\gamma : B_1\mathfrak{c} = B_1\delta : B_1\mathfrak{d} \ldots = 1 : \sqrt{2}$ ist, und da sämmtliche Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... auf einer Geraden A_1, und sämmtliche Puukte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... auf einer Geraden A liegen, so müssen, nach einem bekannten Lokaltbeorem, auch die Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1.... alle auf einer, und die Punkte α, β, γ, δ... alle auf einer anderen Geraden liegen. Bedenkt man endlich, dass sowohl die Geraden a', b', c', d'... und a'', b'', c'', d''..., als auch die Geraden a'_1, b'_1, c'_1, d'_1... und a''_1, b''_1, c''_1, d''_1.... zwei concentrische projectivisch-gleiche Strahlbüschel bilden, so kann man der Reihe nach setzen:

$$B(a, b, c, d\ldots) \equiv B_1(a''_1, b''_1, c''_1, d''_1\ldots) = B_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1\ldots)$$
$$= B(a', b', c', d'\ldots) = B(a'', b'', c'', d''\ldots) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots);$$

also ist $B(a, b, c, d\ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots)$.

Da je zwei Strahlen a'', a''_1 parallel sind; so müssen sich irgend zwei derselben, und folglich auch zwei der Strahlen a, a_1; b, b_1... längs der Geraden BB_1 vereinigen, also ist

$$B(a, b, c, d\ldots) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots), \text{ d. h.}$$

die Durchschnitte sämmtlicher Strahlenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1; d, d_1..., oder sämmtliche Punkte m, liegen in einer Geraden S.

Macht man W. $BB_1g =$ W. $B_1Bh = \frac{1}{2}R$ und $Bi = hi$, $B_1k = gk$, so sind offenbar auch i, k zwei solche Punkte m, also die Gerade S durch diese zwei Punkte leicht zu konstruiren.

Jeder Punkt m dieser Geraden hat also die Eigenschaft, dass wenn man durch ihn eine Gerade nq legt, welche von A, A_1 begrenzt und in m gehälftet wird, und in m auf nq eine Senkrechte mp errichtet, welche von A_2 begrenzt wird, jedesmal $mp = mn = mq$ sein muss. Uebrigens gibt es allemal zwei Gerade S, und nur wenn $A \parallel A_1$, fallen beide in eine zusammen. Sie schneiden sich auf A_2; und je zwei denselben entsprechende Dreiecke npq und $n_1p_1q_1$ (wo n und n_1 auf A, q und q_1 auf A_1 liegen) haben eine solche Lage zu einander, dass wenn durch blosse Verschiebung des einen $n_1p_1q_1$ in der Ebene die Punkte n, n_1 vereinigt werden, und die Gerade n_1q_1 in die Richtung von n nach q gelegt wird, die Punkte p, p_1 auf verschiedene Seiten von nq fallen.

Konstruktion.

Sollen (Taf. III. Fig. 6.) die Gegenecken des gesuchten Quadrates paarweise auf den gegebenen Geraden A, A_1 und B, B_1 liegen, und sind p, q, r, s die Durchschnitte von A, B; B, A_1; A_1, B_1, B_1, A, so beschreibe man über irgend zwei der vier Strecken pq, qr, rs, sp, z. B. über pq und rs, als Diagonalen, zwei Quadrate. Zwei anstossende, von p und q ausgehende Seiten des einen mögen die

A_1 und A in den Punkten p_1 und q_1, die beiden anderen Seiten dieselben Geraden in p_{11} und q_{11} schneiden, und auf ähnliche Weise seien durch die Seiten des anderen Quadrates die Punkte s_1 und r_1, s_{11} und r_{11} bestimmt. Man verbinde die Mittelpunkte der Strecken pp_1 und qq_1 mit einander durch eine Gerade S, und ebenso die Mittelpunkte der Strecken pp_{11} und qq_{11}, ss_1 und rr_1, ss_{11} und rr_{11} durch die Geraden S_1, S_2, S_3. Die Geraden S, S_1 schneiden die Geraden S_2, S_3 in vier Punkten m, m_1, m_2, m_3. Legt man durch irgend einen dieser Punkte, z. B. durch m, eine Gerade aa_1, welche von A, A_1 (oder B, B_1) begrenzt und in m gehälftet wird, und errichtet in m auf aa_1 eine Senkrechte, welche B, B_1 in b, b_1 schneidet, so ist $mb = ma = ma_1 = mb_1$; aber in zwei Fällen fallen die Punkte b, b_1 mit dem Durchschnitte von B und B_1 zusammen, und nur in den beiden andern bilden die Punkte a, b, a_1, b_1 ein Quadrat.

Beweis.

Da der Punkt m zur Geraden S gehört, so folgt aus der Analysis, dass $mb = ma = ma_1$, und da er auch zur Geraden S_2 gehört, so ist auch $mb_1 = ma = ma_1$, also sind a, a_1 und b, b_1, wofern nicht b und b_1 zusammenfallen, die Gegenecken eines Quadrates. Da nun $mb = ma = mb_1$, so muss der Punkt m auch auf einer der beiden Geraden liegen, welche man ebenso wie S, S_1 findet, indem man A, A_1 mit B, B_1 und B mit A vertauscht u. s. w. Welcher zwei der vier Strecken pq, qr, rs, sp man sich also auch zur Konstruktion der Punkte m, m_1, m_2, m_3 bedienen mag, allemal werden dieselben Punkte sich darunter befinden, welche in irgend einem Falle Quadrate liefern.

Determination.

Nennt man irgend zwei Dreiecke npq und $n_1p_1q_1$ (Taf. III. Fig. 5.) welche zu zwei der vier Geraden S, S_1, S_2, S_3 (Taf. III. Fig. 6.) gehören, gleichliegend oder ungleichliegend, jenachdem die Punkte p, p_1 auf einerlei oder auf verschiedene Seiten von nq fallen, wenn das eine Dreieck auf die in der Analysis angegebene Weise verschoben wird, und sind m, m_1 z. B. die Punkte, wo S_2 von S und S_1 geschnitten wird, so lässt sich folgendermassen urtheilen. Ist irgend eines der Dreiecke, welche zu S_2 gehören, mit irgend einem der zu S gehörigen gleichliegend, so müssen, weil alle Dreiecke, welche zu einer und derselben Geraden gehören, gleichliegend sind, je zwei Dreiecke, welche zu S und S_2 gehören, gleichliegend sein, und da je zwei zu S und S_1 gehörige Dreiecke ungleichliegend sind, so müssen auch je zwei zu S_2 und S_1 gehörige ungleichliegend sein, und umgekehrt. Gesetzt also, es fielen die durch m erhaltenen Punkte b, b_1 zusammen, so wären die Dreiecke aba_1 und ab_1a_1, deren eines zu S, das andere zu S_2 gehört, gleichliegend; folglich würden die beiden durch den Punkt m_1 erhaltenen, zu S_1 und S_2 gehörigen Dreiecke ungleichliegend sein, also ein Quadrat bilden, und umgekehrt. Hieraus folgt, dass allemal zwei, aber auch nur zwei der vier Punkte m, m_1, m_2, m_3 Quadrate liefern.

Uebrigens geht die Unmöglichkeit, dass die Aufgabe vier Auflösungen habe, noch einfacher schon daraus hervor, weil einer jeden der Strecken pq, qr, rs, sp ein Paar Gerade S, S_1 entsprechen, und eine jede von diesen acht Geraden zwei der Punkte m, m_1, m_2, m_3 verbinden müsste, was unmöglich ist, wenn nicht zwei derselben mit zwei anderen zusammenfallen sollen.

Anm. Ist $A \parallel A_1$ und $B \parallel B_1$, so fallen alle vier Punkte m mit dem Mittelpunkte des Parallelogramms zusammen, und dann wird die zuletzt gegebene Auflösung illusorisch, weshalb man in diesem Falle die in der vorigen Anmerkung angedeutete oder auch die in Diesterwegs Geometrischen Aufgaben nach der Methode der Griechen S. 166 mitgetheilte Auflösung zu wählen hat.

Zu beweisende Sätze.

1. Bildet man aus einer beliebigen Anzahl n Tangenten eines Kegelschnittes, deren Berührungspunkte alle auf einerlei Seite der Hauptachse liegen, irgend ein einfaches n-Eck, so ist die Summe der Winkel, unter welchen der Abstand der Brennpunkte von einander von den Ecken aus gesehen wird, eben so gross als die Summe der Winkel, unter welchen derselbe Abstand von den Berührungspunkten aus erscheint, und ist daher für alle so möglichen $3.4.5\ldots(n-1)$ einfachen n-Ecke von gleicher Grösse.

2. Haben eine Schaar von Kegelschnitten, welche

eine reelle oder ideale Sekante gemein haben, mit einem und demselben Kegelschnitte eine reelle oder ideale doppelte Berührung einerlei Art: a) so liegen auf jeder Tangente des letzteren zwei projektivische Gerade, deren entsprechende Punktenpaare auf jenen ersteren Kegelschnitten liegen, und zwar sind allemal im Berührungspunkte und auf der gem. Sekante entsprechende Punkte vereinigt; b) und je zwei Tangenten des letzten Kegelschnittes sind auf zweifache Weise in Ansehung der Punktenpaare, in denen sie von den ersteren geschnitten werden, perspektivisch; und zwar liegen die beiden Projektionspunkte auf der gem. Sekante; c) dagegen sind dieselben in Ansehung der, auf die beiden noch übrigen Weisen combinirten Punktenpaare zwar projektivisch, aber schiefliegend.

einen reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein haben, mit einem und demselben Kegelschnitte eine reelle oder ideale doppelte Berührung einerlei Art: a) so ist jeder Punkt des letzteren der Mittelpunkt zweier projektivischer Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlenpaare die von demselben an die ersteren gehenden Tangentenpaare sind; und zwar sind längs der Tangente des letzten Kegelschnittes und in der Richtung nach dem gem. Tangentendurchschnitte entsprechende Strahlen vereinigt; b) und jeder dieser beiden Tangentenbüschel ist mit einem der beiden, welche irgend einen anderen Punkt desselben Kegelschnittes zum Mittelpunkt haben, perspectivisch; und zwar gehen die beiden perspectivischen Durchschnitte nach dem gem. Tangentendurchschnitte; c) dagegen ist derselbe mit dem jedesmaligen anderen zwar projektivisch, aber schiefliegend.

3. **Haben eine Schaar von Kegelschnitten, welche**

eine reelle oder ideale Sekante gemein haben, mit einem und demselben Kegelschnitte eine reelle oder ideale doppelte Berührung einerlei Art: *a*) so liegen die Berührungspunkte aller Tangenten, welche von irgend einem Punkte der gem. Sekante an jene Kegelschnitte gezogen werden, auf dem Umfange eines neuen Kegelschnittes, welcher den letzteren ebenfalls, und zwar unter jenem Punkte (als Berührungspole) doppelt berührt, und welcher mit denjenigen Kegelschnitten, die die harmonischen Pole je einer beliebigen Geraden in Bezug auf die erste Schaar enthalten —, einerlei Sekante gemein hat. *b*) Alle mittels der einzelnen Punkte der gem. Sekante jener Schaar so erzeugten Kegelschnitte bilden eine zweite Schaar, welche eine Sekante gemein und mit demselben Kegelschnitte als die erste Schaar eine doppelte Berührung einerlei Art haben. *c*) Diese beiden Schaaren von Kegelschnitten stehen in vollkommener Wechselbeziehung zu einander, d. h. die erste kann aus der zweiten ebenso, wie diese aus jener, erzeugt werden u. s. w.

einen reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein haben, mit einem und demselben Kegelschnitte eine reelle oder ideale doppelte Berührung einerlei Art: *a*) so umhüllen alle Tangenten derselben, deren Berührungspunkte mit dem gem. Tangentendurchschnitte in gerader Linie liegen, einen neuen Kegelschnitt, welcher den letzteren ebenfalls, und zwar längs dieser geraden Linie, doppelt berührt, und welcher mit denjenigen Kegelschnitten, die von den harmonischen Polaren je eines beliebigen Punktes in Bezug auf die erste Schaar umhüllet werden —, einerlei Tangentendurchschnitt gemein hat. *b*) Alle mittels der einzelnen Strahlen des gem. Tangentendurchschnittes jener Schaar so erzeugten Kegelschnitte bilden eine zweite Schaar, welche einen Tangentendurchschnitt gemein und mit demselben Kegelschnitte als die erste Schaar eine doppelte Berührung einerlei Art haben. *c*) Diese beiden Schaaren von Kegelschnitten stehen in vollkommener Wechselbeziehung zu einander, d. h. die erste kann aus der zweiten ebenso, wie diese aus jener, erzeugt werden u. s. w.

4. **Die Seiten sämmtlicher Dreiecke, welche einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben und einem anderen gegebenen Dreiecke ähnlich sind, sind die Tangenten dreier Kegelschnitte, deren jeder zwei Seiten des ersteren Dreiecks berührt.**

Dieser letztere Satz führt zu einer ziemlich einfachen Lösung der Aufgabe: In ein gegebenes Dreieck ein zweites zu beschreiben, welches einem gegebenen dritten ähnlich sei und dessen eine Seite durch einen gegebenen Punkt gehe.

XXIX.
Ueber bestimmte Integrale und Summirung einiger Reihen.

Von

Herrn F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich vorzüglich mit der Entwickelung des bestimmten Integrals

$$\int_0^{n\pi} \varphi \log \sin\varphi d\varphi,$$

welches von Hill zuerst angegeben und von Clausen in Crelle's Journal Band VII. S. 309. besonders untersucht worden ist.

Beide Geometer erhalten $-\frac{1}{2}n^2\pi^2 \log 2$ als Werth des obigen Integrals. Die Clausensche Entwickelung ist sehr einfach. Sie geht von der bekannten Gleichung aus:

$$\log \sin\varphi = -\log 2 - \cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 4\varphi - \tfrac{1}{3}\cos 6\varphi - \text{ etc.}$$

Multiplicirt man nämlich auf beiden Seiten mit $\varphi d\varphi$, und integrirt zwischen den Grenzen 0 und $n\pi$, so ergiebt sich, da $\int_0^{n\pi} \varphi \cos 2k\varphi d\varphi$ verschwindet, auf der Stelle der angezeigte Werth.

Indem ich mich nun bei anderen Untersuchungen des Werths jenes Integrals bediente, gerieth ich auf einen Widerspruch, der mich veranlasste, die obige Entwickelung einmal genau durch zu nehmen, und bald entdeckte ich, dass in ihr ein Fehlschluss obwalte. Dieser liegt in der Annahme der obigen Gleichung, welche aufhört richtig zu sein, sobald $\sin\varphi$ negativ, oder $\log \sin\varphi$ imaginär wird. Dieser Fall tritt nun wirklich ein, wenn n grösser als die Einheit ist, indem dann der Bogen φ wegen der Integrations grenzen durch den dritten und vierten Quadranten geht, wo sein Sinus negativ wird, und somit gelangte ich zu der Ueberzeugung, dass Hill einen unrichtigen Werth angegeben hatte, welches sich

durch meine eigene Entwickelung in der That bestätigt hat. Zugleich ist $\log \sin \varphi$ selbst unbestimmt, indem ein Logarithmus bekanntlich unendlich viele Werthe zulässt, weswegen angegeben werden muss, welchen dieser Werthe man verstanden wissen will.

Meine Entwickelung weicht nun von der Clausenschen nicht nur ab, sondern sie leitet mich zugleich auf die Summation von Reihen, die ich der Mittheilung nicht ganz unwerth halte. Endlich reiht sich die Untersuchung des einfachern Integrals

$$\int_0^{n\pi} \log \sin \varphi d\varphi$$

an.

Nach diesen Bemerkungen schreite ich zur Sache, und erinnere rücksichtlich der vielfachen Werthe eines Logarithmus, und der Bedeutung des Logarithmus einer negativen Grösse an die aus Cauchy's Cours d'analyse de l'école royale polyt. bekannten Gleichungen

$$(\log a) = \log a + 2k\pi\sqrt{-1}, \quad (\log - a) = \log a + (2\lambda + 1)\pi\sqrt{-1},$$

wo $\log a$ den reellen Werth des Logarithmus der positiven Grösse a, dagegen die Grössen auf der Linken den Complex aller Werthe des Logarithmus bedeuten sollen; k und λ sind positive oder negative, beliebige ganze Zahlen.

Dieses Resultat ergiebt sich leicht, wenn man die imaginäre Exponentialgrösse $e^{y\sqrt{-1}}$ so definirt, dass sie aus der für e^y bekannten unendlichen Reihe hervorgeht, wenn $y\sqrt{-1}$ an die Stelle von y gesetzt wird. Dadurch erhält man definitiv $e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}.\sin y$. Ist also $x + y\sqrt{-1}$ der Logarithmus der beliebigen Grösse a, so hat man $a = e^x(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y)$, weshalb $\sin y = 0$ und $e^x \cos y = a$. Wegen der ersteren dieser Relationen ist $y = k\pi$, $\cos y = (-1)^k$, $(-1)^k e^x = a$. Ist daher a positiv, so muss k gerade und $e^x = a$ (d. h. $x = \log a$) sein; wenn aber a negativ ist, so ist nothwendig k ungerade und $e^x = -a$ (d. h. $x = \log - a$). Folglich wird $x + y\sqrt{-1} = \log a + 2k\pi\sqrt{-1}$, oder $= \log - a + (2\lambda + 1)\pi\sqrt{-1}$, jenachdem a positiv oder negativ ist, was oben behauptet wurde.

Demnach ist jeder beliebige Werth von $\log \sin \varphi$ begriffen in den Formeln

$$1) \quad \begin{cases} (\log \sin \varphi) = \log \sin \varphi + 2k\pi\sqrt{-1}, \\ (\log \sin \varphi) = \log - \sin \varphi + (2\lambda + 1)\pi\sqrt{-1}; \end{cases}$$

indem die erste, oder die zweite verstanden wird, jenachdem φ im ersten und zweiten, oder im dritten und vierten Quadranten endigt.

Ich nehme endlich an, dass in dem Integral $\int_0^{n\pi} \varphi \log \sin \varphi d\varphi$ für alle Bogen φ, die im ersten und zweiten, oder im dritten und vierten Quadranten endigen, resp. k und λ einen unveränderlichen Werth behalten.

I. Das bestimmte Integral $\int_0^{n\pi} \varphi \log \sin \varphi d\varphi$, in welchem n eine positive ganze Zahl anzeigt.

Führt man für $\sin\varphi$ den gleichbedeutenden Ausdruck $\pm\sqrt{1-\cos\varphi^2}$ ein, indem das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem der Bogen φ resp. im ersten und zweiten, oder im dritten und vierten Quadranten endigt, und entwickelt den Logarithmus in eine unendliche (wegen $\cos\varphi^2 < 1$ convergirende) Reihe, so erhält man nach einer von selbst verständlichen Bezeichnungsart:

$$2)\quad \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} \varphi \log \sin\varphi d\varphi$$
$$= -\tfrac{1}{2} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} \varphi \cos\varphi^{2p} d\varphi + 2k\pi\sqrt{-1} \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} \varphi d\varphi,$$

$$3)\quad \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \varphi \log \sin\varphi d\varphi$$
$$= -\tfrac{1}{2} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \varphi \cos\varphi^{2p} d\varphi + (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1} \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \varphi d\varphi,$$

wo m eine positive ganze Zahl bedeutet.

Wendet man nun auf das erste Integral zur Rechten die allgemeinste Reductionsformel an, indem man $\cos\varphi^{2p}\,d\varphi$ zerlegt in $\cos\varphi^{2p-1}\cos\varphi d\varphi$, und den letztern Factor integrirt, so erhält man den Ausdruck

$$\varphi\cos\varphi^{2p-1}\sin\varphi + \frac{1}{2p}\cos\varphi^{2p} + (2p-1)\int \cos\varphi^{2p-2}\sin\varphi^2 d\varphi.$$

Zerlegt man aber das letzte Integral dadurch, dass man $1-\cos\varphi^2$ für $\sin\varphi^2$ nimmt, so entsteht nach der Zusammenziehung

$$2p\int \varphi\cos\varphi^{2p}\,d\varphi$$
$$= \varphi\cos\varphi^{2p-1}\sin\varphi + \frac{1}{2p}\cos\varphi^{2p} + (2p-1)\int \varphi\cos\varphi^{2p-2}\,d\varphi.$$

Bezeichnen demnach m und n zwei positive ganze Zahlen, so wird

$$\int_{m\pi}^{n\pi} \varphi\cos\varphi^{2p}\,d\varphi = \frac{2p-1}{2p}\int_{m\pi}^{n\pi} \varphi\cos\varphi^{2p-2}\,d\varphi.$$

Diese Reductionsformel kann nun auf das Integral zur Rechten von Neuem angewandt werden u. s. f., da es aus dem zur Linken hervorgeht, wenn in diesem $p-1$ statt p gesetzt wird. Auf diese Weise kommt durch gehörige Substitution

$$4)\quad \int_{m\pi}^{n\pi} \varphi\cos\varphi^{2p}\,d\varphi = \tfrac{1}{4}\pi^2(n^2-m^2)\cdot\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots.2p}.$$

Führt man diesen Werth in 2) und 3) ein, so wird

$$5)\quad \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} \varphi \log\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= -\tfrac{1}{4}\pi^2(4m+1)\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots.\,2p} + k\pi^3\sqrt{-1}\,.\ (4m+1),$$

$$6)\quad \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \varphi \log\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= -\tfrac{1}{4}\pi^2(4m-1)\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots.\,2p} + \frac{2\lambda+1}{2}\pi^3\sqrt{-1}\,.\,(4m-1).$$

Es liegt uns nun ob, die hierin enthaltene Summe von unendlich vielen Gliedern zu bestimmen. Zu dem Ende versuche ich die Summation der allgemeinen Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots.\,2p}\cdot x^p$ ist, welche für jeden Werth von x, dessen absoluter Werth kleiner als die Einheit ist, convergirt, wovon man sich durch den einfachsten Satz von der Convergenz der Reihen sogleich überzeugt. Die Summation gelingt mittelst der bekannten Binomialreihe:

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots.\,2p}x^p.$$

Denn dividirt man mit x und multiplicirt mit dx, so entsteht durch Integration

$$\text{Const.} + \int\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}-1}{x}\,dx = \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots.\,2p}x^p.$$

Hiernach ist das Integral auf der Linken zu bestimmen, und zwar so, dass es für $x=0$ verschwindet.

Man zerlegt es aber in die beiden $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$ und $\int\frac{-dx}{x}$, von denen das letztere unmittelbar bekannt ist, indem es den Werth $-\log x$ hat. Was das erste betrifft, so wird es rational durch die Substitution $\sqrt{1-x}=y$, nämlich $\int\frac{-2dy}{1-y^2}$, welches letztere wieder zerlegt wird in $\int\frac{-dy}{1-y}+\int\frac{-dy}{1+y}$, also den Werth $\log\frac{1-y}{1+y}$ hat. Führt man für y seinen Werth ein, so wird

$$\int\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}-1}{x}\,dx = \text{Const.} - 2\log(1+\sqrt{1-x}),$$

und wenn man es für $x=0$ verschwinden lässt:

$$\int_0^x\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}-1}{x}\,dx = -2\log\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}.$$

Demnach ist

$$7)\ \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}x^p=-2\log\frac{1+\sqrt{1-x}}{2},$$

für jedes x, dessen absoluter Werth kleiner als die Einheit ist.
Hier ist jetzt $x=1$ zu setzen; allein es muss zuvor untersucht werden, ob die Summe auf der Linken noch für diesen Werth convergirt. Dass dies wirklich statt finde, erhellet aus einem Theorem von Raabe*), welches uns auf die Grenze des absoluten Werths von $(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)\,n$ hinweist, wo u_n das allgemeine Glied ist. Ist diese Grenze grösser als die Einheit, so findet Convergenz statt. Unsere Reihe entspricht nun in der That dieser Bedingung, da man leicht findet $(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)\,n=\frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}$, welches $\frac{3}{2}$ zur Grenze hat.

Setzen wir also in 7) $x=1$, so wird

$$7^*)\ \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}=2\log 2.$$

Deshalb ist nach 5) und 6)

$$8)\ \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi=-\tfrac{1}{2}\pi^2\log 2\,(4m+1)+k\pi^3\sqrt{-1}\,.\,(4m+1),$$

$$9)\ \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi=-\tfrac{1}{2}\pi^2\log 2(4m-1)+\frac{2\lambda+1}{2}\pi^3\sqrt{-1}\,.\,(4m-1)$$

Setzt man in der ersten dieser Relationen $m-1$ für m, und addirt dann 8) und 9), so entsteht

$$\int_{(2m-2)\pi}^{2m\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$
$$=-\tfrac{1}{2}\pi^2\log 2\,(2m)^2+k\pi^3\sqrt{-1}\,.\,(4m-3)+\frac{2\lambda+1}{2}\pi^3\sqrt{-1}\,.\,(4m-1).$$

Nimmt man nun für m nach und nach die Zahlen 1, 2, 3,... m und addirt alle dadurch entstandenen Integrale, so wird

$$\int_0^{2m\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$
$$=-\tfrac{1}{2}\pi^2\log 2(2m)^2+k\pi^3\sqrt{-1}\,.\,(2m-1)\,m+\frac{2\lambda+1}{2}\pi^3\sqrt{-1}\,.\,(2m+1)m,$$

oder

---

*) Zeitschrift für Physik und Mathematik von Baumgartner und v. Ettingshausen. Wien 1831.

$$10)\int_0^{2m\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$
$$=-\tfrac{1}{4}\pi^2(2m)^2\left[\log 2-k\pi\sqrt{-1}.(1-\frac{1}{2m})-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.(1+\frac{1}{2m})\right]$$

Addirt man hiezu das Integral 8), so ergiebt sich nach leichten Reductionen:

$$11)\int_0^{(2m+1)\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$
$$=-\tfrac{1}{4}\pi^2(2m+1)^2\left[\log 2-k\pi\sqrt{-1}.(1+\frac{1}{2m+1})-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.(1+\frac{1}{2m})\right].$$

Daher ist jetzt

$$12)\int_0^{n\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$
$$=-\tfrac{1}{4}n^2\pi^2\left[\log 2-k\pi\sqrt{-1}.(1\mp\frac{1}{n})-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.(1+\frac{1}{n-a})\right],$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen, und $a=0$ oder $=1$ zu setzen ist, jenachdem n gerade oder ungerade ist.

Ist $n=1$, so wird $\frac{1}{n-a}$ unendlich, allein die ganze Betrachtung lehrt, dass dann $\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.(1+\frac{1}{n-a})$ ganz zu vernachlässigen ist, indem der Logarithmus für diese Integrationsgrenzen nicht imaginär wird. Daher ist für $n=1$

$$13)\int_0^{\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi=-\tfrac{1}{4}\pi^2\left[\log 2-2k\pi\sqrt{-1}\right],$$

welche Formel als Ausnahmefall von 12) zu betrachten ist.

Versteht man in dieser Gleichung unter $\log\sin\varphi$ nur die reellen Werthe, welche es zwischen $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$ jedesmal erlangt, so verschwindet k und es wird $\int_0^{\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi=-\tfrac{1}{2}\pi^2\log 2$. Dann ist der von Hill angegebene Werth richtig, in allen andern Fällen ist er falsch.

II. Das bestimmte Integral $\int_0^{n\pi}\log\sin\varphi d\varphi$, in welchem n eine positive ganze Zahl anzeigt.

Der Werth dieses Integrals zwischen den Grenzen 0 und $\tfrac{1}{2}\pi$ wird am leichtesten durch das Integral $\int_0^{\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$ bestimmt.

Denn zerlegt man das letztere von $\varphi=0$ bis $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, und von $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ bis $\varphi=\pi$, und transformirt den zweiten Theil durch die Substitution $\varphi=\pi-\varphi'$, so findet man sogleich $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$. Also ist nach 13)

$$14)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin\varphi d\varphi=-\tfrac{1}{2}\pi\,(\log 2-2k\pi\sqrt{-1}).$$

Da nun nach dem Begriffe eines bestimmten Integrals als der Grenze einer Summe von unendlich vielen Elementen offenbar $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ ist, so ist ferner

$$15)\quad \int_0^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi=-\pi(\log 2-2k\pi\sqrt{-1}).$$

Ganz nach derselben Ansicht ist $\int_{\pi}^{2\pi}\log-\sin\varphi d\varphi=\int_0^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi$. Da nun $\log-\sin\varphi=\log\sin\varphi+(2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}$, so ist $\int_0^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ $=\int_{\pi}^{2\pi}\log\sin\varphi d\varphi+(2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}\int_{\pi}^{2\pi}d\varphi$, folglich

$$\int_{\pi}^{2\pi}\log\sin\varphi d\varphi=\int_0^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi-(2\lambda+1)\pi^2\sqrt{-1},$$

also

$$\int_0^{2\pi}\log\sin\varphi d\varphi=-2\pi[\log 2-2k\pi\sqrt{-1}-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}].$$

Dieselben Werthe haben die Integrale von 2π bis 4π, von 4π bis 6π u. s. f.; demnach hat man allgemein

$$16)\quad \int_0^{2m\pi}\log\sin\varphi d\varphi=-2m\pi[\log 2-2k\pi\sqrt{-1}-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}].$$

Nun zerfälle man $\int_0^{(2m+1)\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ von $\varphi=0$ bis $\varphi=2m\pi$, und von $\varphi=2m\pi$ bis $\varphi=(2m+1)\pi$, so erhält man, da $\int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ $=\int_0^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ ist, nach 16) und 15)

$$17)\quad \int_0^{(2m+1)\pi}\log\sin\varphi d\varphi$$

$$=-(2m+1)\pi[\log 2-2k\pi\sqrt{-1}-(2\lambda+1)\frac{m}{2m+1}\pi\sqrt{-1}].$$

Folglich ist allgemein

$$18)\quad \int_0^{n\pi}\log\sin\varphi d\varphi$$

$$=-n\pi[\log 2-2k\pi\sqrt{-1}-\frac{2\lambda+1}{2}\;\frac{n-a}{n}\pi\sqrt{-1}],$$

indem man $a=0$ oder $=1$ zu setzen hat, jenachdem n gerade oder ungerade ist.

III. Summirung einer Reihe mittelst Transformation des Integrals 14).

Macht man in dem Integral $J=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ die Substitution $\sin\varphi=x$, so geht es über in $\int_0^1\frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Da nun nach dem binomischen Lehrsatze $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1=\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}x^{2p}$, so ist $\int_0^1\log x dx[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1]=\int_0^1\log x dx\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}x^{2p}$. Es ist aber $\int x^{2p}\log x dx=\frac{x^{2p+1}\log x}{2p+1}-\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)^2}$, folglich, da man sich leicht versichert, dass $x^{2p+1}\log x$ für $x=0$ verschwindet, $\int_0^1 x^{2p}\log x dx=-\frac{1}{(2p+1)^2}$. Daher wird $\int_0^1\log x dx[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1]=-\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}$. Weil endlich $-\int_0^1\log x dx=1$, so hat man $\int_0^1\frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}}=-1-\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cdot\frac{1.3...(2p-1)}{2.4....2p}$; oder nach 14)

$$19)\quad 1+\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}=\tfrac{1}{2}\pi\log 2.\ ^{*})$$

IV. Bekanntlich ist $\operatorname{Arc}\sin x=x+\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}\cdot\frac{x^{2p+1}}{2p+1}$, folglich

$$20)\quad \int_0^1\frac{\operatorname{Arc}\sin x}{x}dx=-\int_0^1\frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder

$$21)\quad \int_0^1\frac{\operatorname{Arc}\sin x dx}{x}=\tfrac{1}{2}\pi\log 2.$$

---

*) Der Factor $2k\pi\sqrt{-1}$ muss hier verschwinden, da $\int_0^1\frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ nur unter der Voraussetzung den Werth $-\frac{1}{(2p+1)^2}$ hat, dass unter $\log x$ der reelle Werth verstanden wird.

XXX.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

In der von Herrn Director Rümker zu Hamburg herausgegebenen trefflichen vierten Auflage des Handbuchs der Schifffahrts-Kunde. Hamburg. 1844., welche so eben erschienen ist, hat Herr Hofrath Gauss S. 81. — S. 84. eine schöne Auflösung der folgenden, auch von Herrn Director Rümker S. 72. aufgelösten Aufgabe gegeben:

Aus drei in einer und derselben geraden Linie liegenden Punkten M, M_1, M_2, deren Entfernungen von einander bekannt sind, werden zwei andere mit jenen drei Punkten in einer Ebene liegende Punkte S und S_1, deren Entfernung von einander gleichfalls bekannt ist, gesehen, und in den Punkten M, M_1, M_2 die 180° nicht übersteigenden Winkel SMS_1, SM_1S_1, SM_2S_1, welche die von einem jeden der Punkte M, M_1, M_2 nach S und S_1 gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen, gemessen. Man soll die gegenseitige Lage der fünf Punkte M, M_1, M_2 und S, S_1 bestimmen.

Ich hoffe die von Herrn Hofrath Gauss gegebene Auflösung den Lesern des Archivs, denen wohl nicht allen das Handbuch der Schifffahrts-Kunde zu Gesicht kommen dürfte, in einem späteren Hefte mittheilen zu können, und will hier nur in der Kürze zeigen, wie sich vier verschiedene Auflösungen des vorliegenden Problems aus den bei Gelegenheit einer andern Aufgabe in der Abhandlung Archiv. Thl. IV. Nr. XLII. von mir entwickelten Gleichungen ableiten lassen.

Ich nehme wie a. a. O. die gerade Linie, in welcher die drei Punkte M, M_1, M_2 liegen, als die Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, und bezeichne die bekannten Coordinaten der Punkte M, M_1, M_2 respective durch

$$a,\ 0;\ a_1,\ 0,\ a_2,\ 0;$$

die unbekannten Coordinaten der Punkte S und S_1 durch x, y und x_1, y_1. Ferner bezeichne ich die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1$$

selbst oder deren Ergänzungen zu 180°, jenachdem man sich, um respective von dem Punkte

$$M,\ M_1,\ M_2$$

durch den Punkt S zu dem Punkte S_1 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss, durch

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2;$$

die bekannte Entfernung SS_1 durch $2e$, und setze wie a. a. O.

$$1)\quad x+x_1=2u,\ y+y_1=2v;\quad x-x_1=2u_1,\ y-y_1=2v_1;$$

also

$$2)\quad x=u+u_1,\ y=v+v_1;\quad x_1=u-u_1,\ y_1=v-v_1.$$

Dann habe ich wie a. a. O. S. 393. Nr. 35) zwischen den Grössen u, v, u_1, v_1 die drei folgenden Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} u^2+v^2-u_1^2-v_1^2+2\cot\alpha.(uv_1-vu_1)-2au-2a\cot\alpha.v_1=-a^2, \\ u^2+v^2-u_1^2-v_1^2+2\cot\alpha_1.(uv_1-vu_1)-2a_1u-2a_1\cot\alpha_1.v_1=-a_1^2, \\ u^2+v^2-u_1^2-v_1^2+2\cot\alpha_2.(uv_1-vu_1)-2a_2u-2a_2\cot\alpha_2.v_1=-a_2^2; \end{cases}$$

zu denen nun wegen der bekannten Entfernung $2e$ der Punkte S und S_1 von einander die vierte Gleichung

$$4)\quad u_1^2+v_1^2=e^2$$

kommt.

Mittelst der drei ersten Gleichungen, welche in Beziehung auf die unbekannten Grössen

$$u^2+v^2-u_1^2-v_1^2,\ uv_1-vu_1,\ u,\ v_1$$

vom ersten Grade sind, kann man auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination jede drei dieser vier Grössen durch die vierte in linearer Form darstellen, so dass man entweder

$$5)\ u^2+v^2-u_1^2-v_1^2=A+Bu,\ uv_1-vu_1=A_1+B_1u,\ v_1=A_2+B_2u;$$

oder

$$6)\ u^2+v^2-u_1^2-v_1^2=A'+B'v_1,\ uv_1-vu_1=A'_1+B'_1v_1,\ u=A'_2+B'_2v_1;$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$7)\quad u^2+v^2-u_1^2-v_1^2=t$$

gesetzt wird,

$$8)\quad uv_1-vu_1=A''+B''t,\ u=A''_1+B''_1t,\ v_1=A''_2+B''_2t;$$

oder endlich, wenn der Kürze wegen

$$9)\quad uv_1-vu_1=w$$

gesetzt wird,

$$10)\ u^2+v^2-u_1^2-v_1^2=A'''+B'''w,\ u=A'''_1+B'''_1w,\ v_1=A'''_2+B'''_2w$$

erhält, wo die sämmtlichen durch die Symbole A und B bezeichneten Coefficienten als bekannt zu betrachten sind.

Was nun zuvörderst die erste dieser vier Auflösungen betrifft, so erhält man aus den drei Gleichungen 5) mit Hülfe der Gleichung 4) leicht die Gleichung

$$u(A_2+B_2u)-u_1\sqrt{e^2+A+Bu-u^2}=A_1+B_1u,$$

also

$$u_1=\frac{u(A_2+B_2u)-(A_1+B_1u)}{\sqrt{e^2+A+Bu-u^2}},$$

und folglich vermöge der Gleichung 4):

$$11)\quad \frac{\{u(A_2+B_2u)-(A_1+B_1u)\}^2}{e^2+A+Bu-u^2}+(A_2+B_2u)^2=e^2.$$

Wie man, wenn man mittelst dieser Gleichung, welche, gehörig entwickelt, vom dritten Grade ist, u bestimmt hat, mit Hülfe der Gleichungen 4) und 5) auch v, u_1, v_1, und dann mittest der Gleichungen 2) auch x, y; x_1, y_1 bestimmen kann, unterliegt keinem Zweifel.

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen 6) mit Hülfe der Gleichung 4) die Gleichung

$$v_1(A'_2+B'_2v_1)-u_1\sqrt{e^2+A'+B'v_1-(A'_2+B'_2v_1)^2}=A'_1+B'_1v_1,$$

also

$$u_1=\frac{v_1(A'_2+B'_2v_1)-(A'_1+B'_1v_1)}{\sqrt{e^2+A'+B'v_1-(A'_2+B'_2v_1)^2}},$$

und folglich wegen der Gleichung 4):

$$12)\quad \frac{\{v_1(A'_2+B'_2v_1)-(A'_1+B'_1v_1)\}^2}{e^2+A'+B'v_1-(A'_2+B'_2v_1)^2}+v_1^2=e^2,$$

woraus sich nach gehöriger Entwickelung zur Bestimmung von v_1 wieder eine Gleichung des dritten Grads ergiebt. Hat man v_1 mittelst dieser Gleichung gefunden, so lassen sich dann mittelst der Gleichungen 4), 6) und 2) auch leicht die Grössen u, v, u_1 und x, y; x_1, y_1 bestimmen.

Aus den Gleichungen 8) und 4) ergiebt sich

$$(A''_1+B''_1t)(A''_2+B''_2t)-v\sqrt{e^2-(A''_2+B''_2t)^2}=A''+B''t,$$

also

$$v=\frac{(A''_1+B''_1t)(A''_2+B''_2t)-(A''+B''t)}{\sqrt{e^2-(A''_2+B''_2t)^2}}$$

Führt man nun diesen Werth von v und den Werth

$$u=A''_1+B''_1t$$

in die Gleichung 7) ein, so erhält man mit Hülfe der Gleichung 4) die Gleichung

$$13)\quad (A''_1+B''_1t)^2+\frac{\{(A''_1+B''_1t)(A''_2+B''_2t)-(A''+B''t)\}^2}{e^2-(A''_2+B''_2t)^2}=e^2+t,$$

welche, gehörig entwickelt, wieder zu einer Gleichung des dritten Grades führt. Hat man aber mittelst dieser Gleichung t gefunden, so können mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln auch die übrigen unbekannten Grössen ohne Schwierigkeit bestimmt werden.

Endlich erhält man aus den Gleichungen 9), 10) und 4) die Gleichung

$$w=(A'''_1+B'''_1w)(A'''_2+B'''_2w)$$
$$-\sqrt{\{e^2-(A'''_2+B'''_2w)^2\}\{e^2+A'''+B'''w-(A'''_1+B'''_1w)^2\}}$$

oder

$$14)\quad \{w-(A'''_1+B'''_1w)(A'''_2+B'''_2w)\}^2$$
$$=\{e^2-(A'''_2+B'''_2w)^2\}\{e^2+A'''+B'''w-(A'''_1+B'''_1w)^2\},$$

welche, gehörig entwickelt, wieder zu einer Gleichung des dritten Grades führt.

Von diesen vier Auflösungen wollen wir nun bloss die erste etwas weiter entwickeln. Wenn man mittelst der Gleichungen 3) die Grössen

$$u^2+v^2-u^2_1-v^2_1,\quad uv_1-vu_1,\quad v_1$$

sämmtlich durch die Grösse u ausdrückt, und der Kürze wegen

$$15)\quad N=2(a-a_1)\cot\alpha\cot\alpha_1+2(a_1-a_2)\cot\alpha_1\cot\alpha_2+2(a_2-a)\cot\alpha_2\cot\alpha,$$

$$Z=-2a_2^2(a-a_1)\cot\alpha\cot\alpha_1$$
$$-2a^2(a_1-a_2)\cot\alpha_1\cot\alpha_2-2a_1^2(a_2-a)\cot\alpha_2\cot\alpha,$$

$$\mathfrak{Z}=4a_2(a-a_1)\cot\alpha\cot\alpha_1$$
$$+4a(a_1-a_2)\cot\alpha_1\cot\alpha_2+4a_1(a_2-a)\cot\alpha_2\cot\alpha,$$

$$Z_1=-a(a_1-a_2)(a_1+a_2)\cot\alpha$$
$$-a_1(a_2-a)(a_2+a)\cot\alpha_1-a_2(a-a_1)(a+a_1)\cot\alpha_2,$$

$$\mathfrak{Z}_1=2a(a_1-a_2)\cot\alpha+2a_1(a_2-a)\cot\alpha_1+2a_2(a-a_1)\cot\alpha_2,$$

$$Z_2=-(a_1-a_2)(a_1+a_2)\cot\alpha$$
$$-(a_2-a)(a_2+a)\cot\alpha_1-(a-a_1)(a+a_1)\cot\alpha_2,$$

$$\mathfrak{Z}_2=2(a_1-a_2)\cot\alpha+2(a_2-a)\cot\alpha_1+2(a-a_1)\cot\alpha_2$$

setzt, so ist

$$u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2=\frac{Z}{N}+\frac{\mathfrak{Z}}{N}u,\ uv_1-vu_1=\frac{Z_1}{N}+\frac{\mathfrak{Z}_1}{N}u,\ v_1=\frac{Z_2}{N}+\frac{\mathfrak{Z}_2}{N}u;$$

im Obigen also

$$16)\ A=\frac{Z}{N},\ B=\frac{\mathfrak{Z}}{N};\ A_1=\frac{Z_1}{N},\ B_1=\frac{\mathfrak{Z}_1}{N};\ A_2=\frac{Z_2}{N},\ B_2=\frac{\mathfrak{Z}_2}{N}$$

zu setzen.

Entwickelt man aber die Gleichung 11) gehörig, so erhält man:

$$\begin{aligned}17)\quad 0= \; & A_1{}^2-(e^2+A)(e^2-A_2^2)\\ & +\{2(e^2+A)A_2B_2-(e^2-A_2^2)B-2A_1(A_2-B_1)\}u\\ & +\{e^2+B_1{}^2+(e^2+A)B_2^2-2(A_1B_2+A_2B_1)+2A_2BB_2\}u^2\\ & +(BB_2-2B_1)B_2u^3.\end{aligned}$$

Die weitere Entwickelung des Vorhergehenden, insbesondere auch der drei übrigen obigen Auflösungen, überlasse ich den Lesern, und bemerke nur noch, dass, wenn auch allerdings im Vorhergehenden, da die gerade Linie, in welcher die Punkte M, M_1, M_2 liegen, als Abscissenaxe angenommen worden ist, die Lage der Punkte S und S_1 gegen diese Linie und die Punkte M, M_1, M_2 bestimmt worden ist, daraus natürlich immer auch leicht eine Bestimmung der Lage der Punkte M, M_1, M_2 und der geraden Linie, in welcher dieselben liegen, gegen die Linie SS_1 und die Punkte S und S_1 abgeleitet werden kann, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Zum Schluss erlaube ich mir endlich noch an diejenigen Leser, welche in der Schiffahrts-Kunde erfahrener und bewanderter als ich sind, die Frage zu richten, ob nicht eben so wie die vorhergehende Aufgabe auch das in der Abhandlung Thl. IV. Nr. XLII. von mir aufgelöste Problem bei der Schiffahrt nützliche Anwendung finden kann. Wenigstens scheint mir diese letztere Aufgabe den besonderen Vortheil darzubieten, dass man bei derselben die Entfernung der Punkte S und S_1 von einander, überhaupt deren Lage, gar nicht zu kennen braucht. Wenn also ein Schiff bei unverändertem Curs in vier Punkten, deren Entfernungen von einander durch die bekannten, auf der See gebräuchlichen Mittel bestimmt worden sind, die Gesichtswinkel zwischen zwei ihrer Lage nach ganz unbekannten Landmarken gemessen hat, so lässt sich aus diesen Datis mit Hülfe der in Rede stehenden Aufgabe immer die gegenseitige Lage dieser beiden Landmarken und der vier Oerter des Schiffs bestimmen.

XXXI.

Ueber einige Integrale, welche goniometrische Functionen involviren.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Durch $(n-1)$malige Differenziation der bekannten Gleichungen

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{\cos\left(\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{\sin\left(\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

nach a als unabhängiger Veränderlichen hat man folgende beiden Integrale gefunden*):

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\cos bx\, dx = \frac{1.2.3....(n-1)\cos\left(n\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}n}},$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\sin bx\, dx = \frac{1.2.3....(n-1)\sin\left(n\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}n}};$$

welche auch allgemeiner für jedes gebrochene n gelten, wenn man statt $1.2.3....(n-1)$ die Gammafunction $\Gamma(n)$ setzt.

Es ist dann für jedes beliebige p:

---

*) M. s. hierüber einen Aufsatz des Herrn Herausgebers in Crelle's Journal. Thl. VIII. S. 146.

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{\Gamma(p)\cos\left(p\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\ldots.(1),$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{\Gamma(p)\sin\left(p\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\ldots.(2).$$

Von diesen Gleichungen lassen sich einige sehr wichtige Anwendungen zur Entdeckung anderweiter Integrale machen, von denen nur einige specielle Fälle bekannt sind.

§. 1.

Wir erinnern zuvörderst an die folgenden beiden bekannten Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi},\ 1>\mu>0\ldots.(3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi},\ 2>\mu>0\ldots.(4)$$

welche man leicht aus den ersten Eigenschaften der Gammafunctionen ableitet*). Setzt man $x=kt$, wo t die neue Veränderliche, k eine willkührliche Constante bedeutet, so ergiebt sich leicht:

$$\int_0^\infty \frac{\cos kt}{t^\mu}dt=\frac{\pi k^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi},\ 1>\mu>0\ldots.(5)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin kt}{t^\mu}dt=\frac{\pi k^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi},\ 2>\mu>0\ldots.(6)$$

von welchen Formeln wir sogleich Gebrauch machen werden.

Wird in der Gleichung (1) t für b gesetzt, beiderseits mit $\frac{dt}{t^q}$ multiplicirt und darauf nach t zwischen den Gränzen $t=0$, $t=\infty$ integrirt, so wird

$$\int_0^\infty\frac{dt}{t^q}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\cos tx\,dx=\Gamma(p)\int_0^\infty\frac{dt}{t^q}\cdot\frac{\cos\left(p\operatorname{Arctan}\frac{t}{a}\right)}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}p}}\ldots.(7).$$

Man hat hier auf der linken Seite einen von den glücklichen Fällen, in welchen man beide Integrationen ausführen kann, wenn man die Ordnung derselben umkehrt. Integrirt man nämlich zuerst nach t, so ist das Doppelintegral links gleich dem folgenden:

*) M. s. den dritten Abschnitt meiner „Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale.“

$$\int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-ax} dx \int_0^\infty \frac{\cos xt}{t^q}\, dt,$$

in welchem sich die Integration nach t mit Hülfe der Gleichung (5) für $k=x$ und $\mu=q$ bewerkstelligen lässt. Es ergiebt sich nämlich

$$\frac{\pi}{2\Gamma(q)\cos\frac{1}{2}q\pi}\int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-ax} dx \,.\, x^{q-1}\,,\ 1>q>0\ldots.(8)$$

Hier kann wieder nach x integrirt werden, wenn man sich an die Formel

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\, e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}$$

erinnert und $\mu=p+q-1$ setzt.

Das Integral (8), d. h. die linke Seite der Gleichung (7), geht jetzt in das folgende über:

$$\frac{\pi}{2\Gamma(q)\cos\frac{1}{2}q\pi}\cdot\frac{\Gamma(p+q-1)}{a^{p+q-1}},1>q>0$$

und es ist folglich mit Hülfe der Gleichung (7) nach beiderseitiger Division mit $\Gamma(p)$:

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{t^q}\cdot\frac{\cos(p\operatorname{Arctan}\frac{t}{a})}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}p}} = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2a^{p+q-1}\cos\frac{1}{2}q\pi}\\ 1>q>0\end{array}\right\}\ldots.(9).$$

Hier lässt sich nun das Integral links in eine andere, viel bequemere Form bringen, wenn man nämlich

$$\operatorname{Arctan}\frac{t}{a}=x$$

setzt. Es folgt hieraus

$$t=a\tan x,\ dt=\frac{a dx}{\cos^2 x}.$$

Man hat aber auch unmittelbar

$$d(\operatorname{Arctan}\frac{t}{a})=\frac{a dt}{a^2+t^2}=dx,$$

mithin

$$\frac{1}{a^2+t^2}=\frac{dx}{a dt},$$

oder wenn man für dt den oben gefundenen Werth setzt:

$$\frac{1}{a^2+t^2}=\frac{\cos^2 x}{a^2}.$$

Ferner wird für $t=\infty$, $x=\text{Arctan}\,\infty=\frac{\pi}{2}$ und für $t=0$, $x=\text{Arctan}\,0=0$. Durch Substitution aller dieser Werthe verschwindet die Constante a von selbst und man findet:

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos px}{\tan qx}\cos^{p-2}x\,dx=\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}\\ 1>q>0\end{array}\right\}\ldots.(10)$$

ein sehr bemerkenswerthes Resultat, dessen Allgemeinheit mancherlei Folgerungen zulässt.

§. 11.

Durch ein ganz gleiches Verfahren kann man aus der Gleichung (2) ein analoges Resultat ziehen. Setzt man auch hier t für b, multiplicirt mit $\frac{dt}{t^q}$ und integrirt für das Intervall $t=0$ bis $t=\infty$, so wird:

$$\int_0^\infty\frac{dt}{t^q}\int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-ax}\sin tx\,dx=\Gamma(p)\int_0^\infty\frac{dt}{t^q}\cdot\frac{\sin\left(p\,\text{Arctan}\frac{t}{a}\right)}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}p}}\ldots.(11)$$

Durch Umkehrung der Integrationsordnung wird die linke Seite

$$=\int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-ax}dx\int_0^\infty\frac{\sin xt}{t^q}dt=\frac{\pi}{2\Gamma(q)\sin\frac{1}{2}q\pi}\int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-ax}dx.x^{q-1}$$
$$2>q>0,$$

wobei die Formel (6) für $k=x$, $\mu=q$ in Anwendung gebracht worden ist. Die noch übrige Integration lässt sich wieder wie vorhin ausführen, und man erhält für die linke Seite der Gleichung (11) den Ausdruck

$$\frac{\pi}{2\Gamma(q)\sin\frac{1}{2}q\pi}\cdot\frac{\Gamma(p+q-1)}{a^{p+q-1}},\ 2>q>0,$$

mithin nach beiderseitiger Division mit $\Gamma(p)$ die Gleichung

$$\int_0^\infty\frac{dt}{t^q}\cdot\frac{\sin\left(p\,\text{Arctan}\frac{t}{a}\right)}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}p}}=\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2a^{p+q-1}\sin\frac{1}{2}q\pi}$$
$$2>q>0.$$

Setzt man hier wieder

$$\operatorname{Arctan}\frac{l}{a}=x,$$

so erhält man durch ganz die nämlichen Reductionen wie in §. 1., das Resultat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin px}{\tan^q x}\cos^{p-2}x\,dx=\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi},\ 2>q>0\ldots.(12)$$

welches dem in (10) gefundenen analog ist. Bemerkenswerthe specielle Fälle der beiden Gleichungen (10) und 12) sind folgende.

1) Für $p=2$ steht rechts der Quotient $\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(2)\Gamma(q)}$, welcher durch die Bemerkung, dass $\Gamma(q+1)=q\Gamma(q)$ und $\Gamma(2)=1$ ist, sich auf q reducirt. Man hat also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot^q x\cos 2x\,dx=\frac{q\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},\ 1>q>0\ldots.(13)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot^q x\sin 2x\,dx=\frac{q\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi},\ 2>q>0\ldots.(14)$$

2) Nimmt man in (10) und (12) $p=1$, und bemerkt, dass $\Gamma(1)=1$ ist, so reduciren sich beide Formeln auf ein gemeinschaftliches Resultat, nämlich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot^q x\,dx=\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},\ 1>q>0\ldots.(15)$$

woraus man dadurch, dass man $\frac{\pi}{2}-x$ für x substituirt, auch noch das folgende ableitet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^q x\,dx=\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},\ 1>q>0\ldots.(16).$$

3) Für $p=2-q$ erhält man rechts den Quotienten

$$\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(2-q)\Gamma(q)}=\frac{1}{(1-q)\Gamma(1-q)\Gamma(q)};$$

bekanntlich ist aber $\Gamma(q)\Gamma(1-q)=\frac{\pi}{\sin q\pi}$; führen wir diese Werthe ein und bemerken, dass $\sin q\pi=2\sin\frac{1}{2}q\pi\cos\frac{1}{2}q\pi$ ist, so finden wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2-q)x}{\sin^q x}\,dx=\frac{\sin\frac{1}{2}q\pi}{1-q},\ 1>q>0\ldots.(17)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2-q)x}{\sin^q x}\,dx=\frac{\cos\frac{1}{2}q\pi}{1-q},\ 2>q>0\ldots.(18)$$

Digitized by Google

4) Setzt man in Formel (12) $q=1$, was in (10) nicht geschehen darf, so ergiebt sich für jedes von Null verschiedene p:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin px}{\sin x} \cos^{p-1} x dx = \frac{\pi}{2} \ldots . (19)$$

wie auf anderem Wege auch Liouville in Crelle's Journal. Bd. 13. S. 232. gefunden hat.

XXXII.

Ueber eine für den Elementar-Unterricht in der Trigonometrie vorzüglich geeignete Methode zur Erläuterung der Berechnung der Tafeln der Sinus und Cosinus.

Nach einem Aufsatze des Herrn Lionnet, Professeur au Collége royal Louis-le-Grand, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normal, rédigé par Terquem et Gerono. T. II. Paris. 1843. p. 216.

frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Wir nehmen im Folgenden den Bogen x als positiv und nicht grösser als die Einheit an, was bekanntlich für die Berechnung der Tafeln der Sinus und Cosinus völlig hinreichend ist, da man bei derselben bloss von 0 bis 45° oder vielmehr von $x=0$ bis $x=0,78539816$ zu gehen braucht, und legen unsern Betrachtungen die beiden folgenden Sätze zum Grunde.

Weil unter den gemachten Voraussetzungen

$$\sin x < x < \operatorname{tang} x$$

ist, so ist

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tang} x},$$

also

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Nähert nun x sich der Null, so nähert $\cos x$ sich der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt. Also nähert sich der zwischen 1 und $\cos x$ liegende Bruch $\frac{\sin x}{x}$ um so mehr der Einheit, wenn x sich der Null nähert, und kann der Einheit beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt, oder die Einheit ist die Gränze, welcher der in Rede stehende Bruch sich bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man x sich der Null bis zu jedem beliebigen Grade nähern lässt.

Ferner ist bekanntlich allgemein

$$\sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x$$

und

$$\cos \tfrac{1}{2}x = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{4}x^2,$$

also nach der vorhergehenden Gleichung:

$$1)\ \sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2}x - 4 \sin \tfrac{1}{2}x \sin \tfrac{1}{4}x^2.$$

Weil nun

$$\sin \tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2}x,\ \sin \tfrac{1}{4}x < \tfrac{1}{4}x,\ \sin \tfrac{1}{4}x^2 < \tfrac{1}{16}x^2$$

ist, so ist

$$4 \sin \tfrac{1}{2}x \sin \tfrac{1}{4}x^2 < \tfrac{1}{8}x^3,$$

und folglich nach 1)

$$\sin x > 2 \sin \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^3.$$

Setzt man hierin für x nach und nach

$$x,\ \frac{x}{2},\ \frac{x}{2^2},\ \frac{x}{2^3}, \ldots \frac{x}{2^{n-1}};$$

so erhält man:

$$\sin x > 2 \sin \frac{x}{2} - \tfrac{1}{8}x^3, \quad \sin \frac{x}{2} > 2 \sin \frac{x}{2^2} - \tfrac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{2^3},$$

$$\sin \frac{x}{2^2} > 2 \sin \frac{x}{2^3} - \tfrac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{2^6},\ \text{u. s. w.}$$

$$\sin\frac{x}{2^{n-1}} > 2\sin\frac{x}{2^n} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{2^{3(n-1)}}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten der Zeichen nach der Reihe mit

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots .2^{n-1}$$

addirt und hebt auf, was sich aufheben lässt; so erhält man

$$\sin x > 2^n \sin\frac{x}{2^n} - \tfrac{1}{8}\left\{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2^{2(n-1)}}\right\} x^3,$$

also nach der Lehre von den geometrischen Progressionen:

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{2^2}}\,x^2.$$

Lässt man jetzt n ins Unendliche wachsen und geht zu den Gränzen über, so erhält man, weil $\frac{x}{2^n}$ sich der Null nähert:

$$\frac{\sin x}{x} > 1 - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{4}{3}x^2,$$

d. i.

$$2)\quad \sin x > x - \tfrac{1}{6}x^3.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sin\tfrac{1}{2}x > \frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^4},\quad \sin\tfrac{1}{4}x > \frac{x}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^7};$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{4}x > \frac{x^2}{2^3} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^6} + \tfrac{1}{9}\cdot\frac{x^6}{2^{11}},$$

und folglich um so mehr

$$\sin\tfrac{1}{4}x^2 > \frac{x^2}{2^3} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^6}.$$

Also ist ferner nach dem Obigen, wie man durch Multiplication leicht findet:

$$\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{4}x^2 > \frac{x^3}{2^4} - \frac{x^5}{2^6} + \tfrac{1}{9}\cdot\frac{x^7}{2^{10}},$$

und folglich um so mehr

$$\sin \tfrac{1}{2} x \sin \tfrac{1}{4} x^2 > \frac{x^3}{2^5} - \frac{x^5}{2^9};$$

also

$$4 \sin \tfrac{1}{2} x \sin \tfrac{1}{4} x^2 > \frac{x^3}{2^3} - \frac{x^5}{2^7},$$

und daher nach 1)

$$\sin x < 2 \sin \tfrac{1}{2} x - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^7}.$$

Setzt man nun hierin für x nach und nach

$$x,\ \frac{x}{2},\ \frac{x}{2^2},\ \frac{x}{2^3}, \ldots . \frac{x}{2^{n-1}};$$

so erhält man

$$\sin x < 2 \sin \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^7}, \qquad \sin \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2^2} - \frac{x^3}{2^6} + \frac{x^5}{2^{12}},$$

$$\sin \frac{x}{2^2} < 2 \sin \frac{x}{2^3} - \frac{x^3}{2^9} + \frac{x^5}{2^{17}}, \text{ u. s. w.}$$

$$\sin \frac{x}{2^{n-1}} < 2 \sin \frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^{3n}} + \frac{x^5}{2^{5n+2}};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten der Zeichen nach der Reihe mit

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \ldots . 2^{n-1}$$

multiplicirt, dann addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\sin x < 2^n \sin \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^3} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2^{2(n-1)}} \right\} x^3$$
$$+ \frac{1}{2^7} \left\{ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} + \ldots + \frac{1}{2^{4(n-1)}} \right\} x^5;$$

also nach der Lehre von den geometrischen Progressionen:

$$\sin x < 2^n \sin \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{2^2}} x^3 + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{4n}}}{1 - \frac{1}{2^4}} x^5,$$

oder

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{2^2}} x^2 + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{4n}}}{1 - \frac{1}{2^4}} x^4.$$

Lässt man nun n in's Unendliche wachsen und geht zu den Gränzen über, so erhält man

$$\frac{\sin x}{x} < 1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4$$

oder

$$3)\quad \sin x < x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sin\tfrac{1}{2}x > \frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^4} + \tfrac{1}{15}\cdot\frac{x^5}{2^8},\quad \sin\tfrac{1}{4}x < \frac{x}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^7} + \tfrac{1}{15}\cdot\frac{x^5}{2^{13}};$$

und folglich

$$\sin\tfrac{1}{4}x^2 < \frac{x^2}{2^4} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^8} + \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^6}{2^{11}} - \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^8}{2^{19}} + \tfrac{1}{225}\cdot\frac{x^{10}}{2^{26}},$$

also, weil unter den gemachten Voraussetzungen

$$-\tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^8}{2^{19}} + \tfrac{1}{225}\cdot\frac{x^{10}}{2^{26}}$$

offenbar eine negative Grösse ist, um so mehr

$$\sin\tfrac{1}{4}x^2 < \frac{x^2}{2^4} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^8} + \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^6}{2^{11}},$$

woraus man ferner mittelst des Vorhergehenden durch gewöhnliche Multiplication leicht erhält:

$$\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{4}x^2 < \frac{x^3}{2^5} - \frac{x^5}{2^9} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{12}} - \tfrac{1}{27}\cdot\frac{x^9}{2^{15}} + \tfrac{1}{675}\cdot\frac{x^{11}}{2^{19}},$$

also weil

$$-\tfrac{1}{27}\cdot\frac{x^9}{2^{15}} + \tfrac{1}{675}\cdot\frac{x^{11}}{2^{19}}$$

offenbar eine negative Grösse ist, um so mehr

$$\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{4}x^2 < \frac{x^3}{2^5} - \frac{x^5}{2^9} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{12}},$$

und folglich

$$4\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{4}x^2 < \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2^7} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{10}}.$$

Daher ist nach der Gleichung 1)

$$\sin x > 2\sin\tfrac{1}{2}x - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^7} - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{10}}.$$

Setzt man nun hierin für x nach und nach

$$x,\ \frac{x}{2},\ \frac{x}{2^2},\ \frac{x}{2^3},\ldots\frac{x}{2^{n-1}};$$

so erhält man

$$\sin x > 2\sin\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^7} - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{10}},$$

$$\sin\frac{x}{2} > 2\sin\frac{x}{2^2} - \frac{x^3}{2^6} + \frac{x^5}{2^{12}} - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{17}},$$

$$\sin\frac{x}{2^2} > 2\sin\frac{x}{2^3} - \frac{x^3}{2^9} + \frac{x^5}{2^{17}} - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{24}},$$

u. s. w.

$$\sin\frac{x}{2^{n-1}} > 2\sin\frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^{3n}} + \frac{x^5}{2^{5n+2}} - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{7n+3}};$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen nach der Reihe mit

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3 \ldots\ldots 2^{n-1}$$

multiplicirt, dann addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\begin{aligned}\sin x > 2^n \sin\frac{x}{2^n} &- \frac{1}{2^3}\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2(n-1)}}\right\}x^3\\ &+\frac{1}{2^7}\left\{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{12}}+\ldots+\frac{1}{2^{4(n-1)}}\right\}x^5\\ &-\tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}\left\{1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{18}}+\ldots+\frac{1}{2^{6(n-1)}}\right\}x^7.\end{aligned}$$

Also ist nach der Lehre von den geometrischen Progressionen:

$$\sin x > 2^n\sin\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{2^2}}x^3 + \frac{1}{2^7}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{4n}}}{1-\frac{1}{2^4}}x^5 - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{6n}}}{1-\frac{1}{2^6}}x^7$$

oder

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{2^2}}x^2 + \frac{1}{2^7}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{4n}}}{1-\frac{1}{2^4}}x^4 - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{6n}}}{1-\frac{1}{2^6}}x^6;$$

und folglich, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt und zu den Gränzen übergeht:

$$\frac{\sin x}{x} > 1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 - \tfrac{1}{5040}x^6$$

oder

$$4)\quad \sin x > x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7.$$

Ueberhaupt haben wir also jetzt die folgenden Gränzwerthe von $\sin x$ gefunden:

$$\sin x < x,$$
$$\sin x > x - \tfrac{1}{6}x^3,$$
$$\sin x < x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5,$$
$$\sin x > x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7;$$

und es unterliegt keinem Zweifel, wie man auf dem obigen Wege noch weiter fortschreiten könnte, was sich, wie es uns scheint, zu zweckmässigen Uebungen für die Schüler bei'm Unterrichte benutzen lässt. Jedenfalls ist aber schon das Obige mehr als hinreichend, um die Berechnung der Tafel der Sinus zu zeigen. Auch würden sich die obigen Betrachtungen allerdings verallgemeinern lassen, was aber bei'm Elementar-Unterrichte in der Trigonometrie, in dessen Interesse der vorliegende Aufsatz vorzugsweise geschrieben ist, nicht zweckmässig sein würde, und deshalb hier zu zeigen unterlassen wird. Dessungeachtet aber würde ich einem die Verallgemeinerung der obigen Betrachtungen sich zur Aufgabe machenden Aufsatze von einem andern Verfasser gern einen Platz in dem Archive einräumen, und erlaube mir daher, die Leser desselben aufzufordern, diese Verallgemeinerung in möglichst eleganter Form zu geben zu versuchen.

Weil bekanntlich

$$\cos x = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}x^2$$

und

$$\sin\tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2}x,\quad \sin\tfrac{1}{2}x^2 < \tfrac{1}{4}x^2$$

ist, so ist offenbar

$$5)\quad \cos x > 1 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

Weil ferner nach dem Obigen

$$\sin\tfrac{1}{2}x > \frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^4}$$

ist, so ist

$$\sin\tfrac{1}{2}x^2 > \frac{x^2}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^4} + \tfrac{1}{9}\cdot\frac{x^6}{2^8}$$

und folglich um so mehr

$$\sin\tfrac{1}{2}x^2 > \frac{x^2}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^4}.$$

also

$$2\sin\tfrac{1}{2}x^2 > \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{24}x^4;$$

daher nach dem Obigen

$$6)\quad \cos x < 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4.$$

Auf ähnliche Art ist nach dem Obigen

$$\sin\tfrac{1}{2}x < \frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^4} + \tfrac{1}{15}\cdot\frac{x^5}{2^8},$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}x^2 < \frac{x^2}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^4} + \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^6}{2^5} - \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^8}{2^{11}} + \tfrac{1}{225}\cdot\frac{x^{10}}{2^{14}},$$

und folglich, weil unter den gemachten Voraussetzungen

$$-\tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^8}{2^{11}} + \tfrac{1}{225}\cdot\frac{x^{10}}{2^{14}}$$

offenbar eine negative Grösse ist, um so mehr

$$\sin\tfrac{1}{2}x^2 < \frac{x^2}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^4} + \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^6}{2^5},$$

also

$$2\sin\tfrac{1}{2}x^2 < \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{720}x^6.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$7)\quad \cos x > 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6.$$

Auf ganz ähnliche Weise findet man, weil nach dem Obigen

$$\sin\tfrac{1}{2}x > \frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^4} + \tfrac{1}{15}\cdot\frac{x^5}{2^8} - \tfrac{1}{315}\cdot\frac{x^7}{2^{11}}$$

ist:

$$8)\quad \cos x < 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6 + \tfrac{1}{40320}x^8,$$

und hat also für $\cos x$ jetzt überhaupt die folgenden Gränzwerthe:

$$\cos x < 1,$$
$$\cos x > 1 - \tfrac{1}{2}x^2,$$
$$\cos x < 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4,$$
$$\cos x > 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6,$$
$$\cos x < 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6 + \tfrac{1}{40320}x^8.$$

Auch diese Rechnungen sind einer Verallgemeinerung fähig, welche zu geben verdienstlich sein würde, wenn dieselbe auch für den Elementar-Unterricht, den wir, wie schon mehrmals erinnert, bei den obigen Entwickelungen vorzüglich im Auge gehabt haben, von geringerer Bedeutung sein dürfte.

XXXIII.

Ein Paar allgemeine Eigenschaften der Eulerschen Integrale zweiter Art.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

In meinen „Beiträgen zur Theorie bestimmter Integrale" habe ich einige neue allgemeine Eigenschaften der sogenannten Gammafunktionen mitgetheilt, welche für die Theorie dieser Transcendenten ungefähr das sind, was das Binomialtheorem für die Theorie der Potenz ist. Die fraglichen Sätze erscheinen dort als specielle Fälle weit umfassenderer Theoreme, die durch mehrfache Integrationen gewonnen werden; will man aber die letzteren umgehen, so kann man jene auch aus den ersten Eigenschaften der Eulerschen Integrale, welche in den Gleichungen

$$\Gamma(\mu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx\ldots(1)$$

$$\Gamma(1)=1,\quad \Gamma(n)=1.2.3\ldots.(n-1)\ldots.(2)$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi},\quad \Gamma(n+\tfrac{1}{2})=\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\ldots.(3)$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{(1+x)^{\alpha+\beta}}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\ldots.(4)$$

ausgesprochen sind, auf folgende sehr einfache Weise ableiten.

I.

Wir nehmen unseren Auslauf von dem bekannten, für jedes ungerade μ und beliebige u geltenden Theoreme:

$$\sin \mu u = \frac{\mu}{1} \sin u - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3} \sin^3 u + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 u - \ldots.$$

Durch Differenziation desselben nach u ergiebt sich

$$\cos \mu u = \cos u \left[1 - \frac{\mu^2-1^2}{1.2} \sin^2 u + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4} \sin^4 u - \ldots.\right]$$

oder, was das Nämliche ist,

$$\cos \mu u = \cos u \left[1 - \frac{(\mu+1)(\mu-1)}{1.2} \sin^2 u + \frac{(\mu+3)(\mu+1)(\mu-1)(\mu-3)}{1.2.3.4} \sin^4 u - \ldots\right]$$

Setzen wir $\mu = 2m+1$, wo nun m jede ganze positive Zahl bedeuten darf, so wird

$$\cos(2m+1)u$$
$$= \cos u \left[1 - \frac{(m+1)m}{1.2}(2\sin u)^2 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{1.2.3.4}(2\sin u)^4 - \ldots\right]$$

oder wenn der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{l} M_0 = 1,\ M_2 = \dfrac{(m+1)m}{1.2},\quad M_4 = \dfrac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{1.2.3.4}, \\ M_6 = \dfrac{(m+3)(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4.5.6},\ \text{u. s. f.} \end{array}\right\} \ldots.(5)$$

genommen wird,

$$\cos(2m+1)u = \cos u\,(M\ - M_2(2\sin u)^2 + M_4(2\sin u)^4 - \ldots]\ldots(6)$$

wobei man auch

$$\cos(2m+1)u = \frac{e^{(2m+1)u\sqrt{-1}} + e^{-(2m+1)u\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\cos u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}}{2},$$

$$2\sin u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

setzen könnte. Für $u = lx\sqrt{-1}$ erhält man hieraus

$$\cos(2m+1)u = \tfrac{1}{2}\left(x^{2m+1} + \frac{1}{x^{2m+1}}\right),$$

$$\cos u = \tfrac{1}{2}(x + \frac{1}{x}), \quad 2\sin u = \frac{1}{\sqrt{-1}}(x - \frac{1}{x}).$$

Führen wir diese Werthe in die Gleichung (6) unter der Bemerkung ein, dass $(\sqrt{-1})^2 = -1$, $(\sqrt{-1})^4 = +1$, $(\sqrt{-1})^6 = -1$, u. s. f. ist, so ergiebt sich folgendes rein algebraische Theorem:

$$x^{2m+1} + \frac{1}{x^{2m+1}} = (x + \frac{1}{x})[M_0 + M_2(x - \frac{1}{x})^2 + M_4(x - \frac{1}{x})^4 + \ldots]$$

oder nach beiderseitiger Division mit x:

$$\frac{1}{x^{2m+2}} + x^{2m} = (1 + \frac{1}{x^2})[M_0 + M_2(x - \frac{1}{x})^2 + M_4(x - \frac{1}{x})^4 + \ldots.].$$

Diese Gleichung wollen wir beiderseits mit dem Ausdrucke

$$\frac{dx}{(x^2 + \frac{1}{x^2})^{\mu + \frac{1}{2}}},$$

in welchem μ eine ganz beliebige Grösse bezeichnet, multipliciren und zwischen den Gränzen $x = 1$ und $x = \infty$ integriren. Es wird so

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{2m+2}} \cdot \frac{dx}{(x^2 + \frac{1}{x^2})^{\mu+\frac{1}{2}}} + \int_1^\infty \frac{x^{2m}dx}{(x^2 + \frac{1}{x^2})^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$= M_0 \int_1^\infty (1 + \frac{1}{x^2}) \frac{dx}{(x^2 + \frac{1}{x^2})^{\mu+\frac{1}{2}}} + M_2 \int_1^\infty (1 + \frac{1}{x^2}) \frac{(x - \frac{1}{x})^2 dx}{(x^2 + \frac{1}{x^2})^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$+ M_4 \int_1^\infty (1 + \frac{1}{x^2}) \frac{(x - \frac{1}{x})^4 dx}{(x^2 + \frac{1}{x^2})^{\mu+\frac{1}{2}}} + M_6 \int_1^\infty (1 + \frac{1}{x^2}) \frac{(x - \frac{1}{x})^6 dx}{(x^2 + \frac{1}{x^2})^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

u. s. f. ....(7)

Abgesehen von den Coeffizienten sind alle Integrale rechts von einer allgemeinen Form, nämlich

$$\int_1^\infty (1 + \frac{1}{x^2}) \frac{(x - \frac{1}{x})^{2n} dx}{(x^2 + \frac{1}{x^2})^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

und gehen aus derselben hervor, wenn man darin $n = 0, 1, 2, 3$, etc. setzt. Das vorliegende Integral lässt sich auch in folgender Gestalt darstellen:

Digitized by Google

$$\int_1^\infty (1+\frac{1}{x^2}) \frac{(x-\frac{1}{x})^{2n} dx}{[2+(x-\frac{1}{x})^2]^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

welche zu einer eleganten Transformation Veranlassung giebt. Sei nämlich $x-\frac{1}{x}=z$, so wird $(1+\frac{1}{x^2})\,dx=dz$, und wenn x die Werthe ∞ und 1 angenommen hat, ist $z=\infty$ und $z=1$ geworden.

Diese Substitutionen verwandeln unser Integral in das folgende viel einfachere:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n}\,dz}{(2+z^2)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

welches für $z=(2x)^{\frac{1}{2}}$ in das folgende übergeht:

$$\frac{2^n}{2^{\mu+1}}\int_0^\infty \frac{x^{n-\frac{1}{2}}\,dx}{(1+x)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

dessen Werth nach Formel (4) ermittelt werden kann, wenn man $\alpha-1=n-\frac{1}{2}$ und $\alpha+\beta=\mu+\frac{1}{2}$ setzt, woraus $\alpha=n+\frac{1}{2}$, $\beta=\mu-n$ folgt. Hiernach ist nun

$$\frac{2^n}{2^{\mu+1}}\int_0^\infty \frac{x^{n-\frac{1}{2}}dx}{(1+x)^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{2^n}{2^{\mu+1}}\cdot\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\mu-n)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}.$$

Setzt man hierin $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man der Reihe nach die Werthe aller der Integrale, welche auf der rechten Seite der Gleichung (7) stehen und es ist nun nach (7)

$$(8)\ldots\int_1^\infty \frac{1}{x^{2m+2}}\cdot\frac{dx}{(x^2+\frac{1}{x^2})^{\mu+\frac{1}{2}}}+\int_1^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{(x^2+\frac{1}{x^2})^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2^{\mu+1}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}[M_0\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(\mu)+2M_2\Gamma(\tfrac{3}{2})\Gamma(\mu-1)+2^2M_4\Gamma(\tfrac{5}{2})\Gamma(\mu-2)+\ldots]$$

Hier bleibt noch der Werth der linken Seite zu bestimmen. Setzen wir im ersten Integrale $\frac{1}{x}=z$, im zweiten $x=z$, so ändert sich das letztere nicht wesentlich; dagegen wird im ersten

$$-\frac{dx}{x^2}=dz, \quad \frac{dx}{x^{2m+2}}=\frac{1}{x^{2m}}\cdot\frac{dx}{x^2}=-z^{2m}dz,$$

und wenn $x=\infty$, $x=1$ geworden ist, hat z die Werthe 0 und 1 angenommen. Das erste Integral in (8) wird demnach

$$=-\int_1^0 \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z^2}+z^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}=+\int_0^1 \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z^2}+z^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Digitized by Google

Die linke Seite der Gleichung (8) wird demnach

$$=\int_0^1 \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z^2}+z^2)^{\mu+\frac12}}+\int_1^\infty \frac{z^{2m}dz}{(z^2+\frac{1}{z^2})^{\mu+\frac12}},$$

und da hier unter beiden Integralzeichen die nämliche Differenzialformel steht, so ziehen sich beide Integrale nach dem Satze

$$\int_a^b f(z)\,dz+\int_b^c f(z)\,dz+\int_a^c f(z)\,dz$$

in das eine zusammen:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z^2}+z^2)^{\mu+\frac12}}=\int_0^\infty \frac{z^{2m+2\mu+1}dz}{(1+z^4)^{\mu+\frac12}},$$

dessen zweite Form aus der ersten entsteht, wenn man Zähler und Nenner desselben mit $(z^2)^{\mu+\frac12}$ multiplizirt. Setzt man endlich noch $z^4=x$ also $z=x^{\frac14}$, so erhält man leicht

$$\int_0^\infty \frac{z^{2m+\mu+1}dz}{(1+z^4)^{\mu+\frac12}}=\frac14\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m+\mu-1}{2}}dx}{(1+x)^{\mu+\frac12}},$$

wobei man rechts die Formel (4) für $\alpha-1=\frac{m+\mu-1}{2}$, $\alpha+\beta=\mu+\frac12$ anwenden kann. Man erhält $\alpha=\frac{\mu+m+1}{2}$, $\beta=\frac{\mu-m}{2}$, mithin

$$\frac14\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m+\mu-1}{2}}dx}{(1+x)^{\mu+\frac12}}=\frac14\cdot\frac{\Gamma(\frac{\mu+m+1}{2})\,\Gamma(\frac{\mu-m}{2})}{\Gamma(\mu+2)\frac12},$$

und dies ist der Werth der linken Seite in der Gleichung (8). Substituirt man denselben, so hebt sich beiderseits $\Gamma(\mu+\frac12)$ und es bleibt

$$(9)\ldots\ldots\frac14\,\Gamma\left(\frac{\mu+m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-m}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{\mu+1}}\left[M_0\Gamma(\tfrac12)\Gamma(\mu)+2M_2\Gamma(\tfrac32)\Gamma(\mu-1)+2^2M_4\Gamma(\tfrac52)\Gamma(\mu-2)+\ldots\right]$$

Dabei ist nun $\Gamma(\frac12)=\sqrt{\pi}$, die übrigen Glieder rechts sind von der Form

$$2^n M_{2n}\,\Gamma(n+\tfrac12)\,\Gamma(\mu-n),$$

aus welcher sie für $n=1, 2, 3, \ldots$ hervorgehen. Setzt man für M_{2n} und $\Gamma(n+\frac12)$ ihre Werthe, so ist dieser Ausdruck

$$= 2^n \cdot \frac{(\mu+n)(\mu+n-1)\ldots(\mu-\overline{n-1})}{1.2.3.4.5\ldots.(2n)} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu-n)$$

$$= \frac{(\mu+n)(\mu+n-1)\ldots.(\mu-\overline{n-1})}{2.4.6\ldots.(2n)} \sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu-n),$$

so dass also $\sqrt{\pi}$ als gemeinschaftlicher Faktor aller Glieder auf der rechten Seite in (9) erscheint. Multiplizirt man noch beiderseits mit $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$, so wird jetzt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\mu+m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-m}{2}\right) \\ &= \Gamma(\mu) + \frac{(m+1)m}{2}\Gamma(\mu-1) + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.4}\Gamma(\mu-2) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

worin sich eine merkwürdige Relation ausspricht. Es ist dies das erste der von mir gefundenen Theoreme.

II.

Setzt man in dem Anfangs citirten Theoreme $\frac{\pi}{2} - u$ für u, so erhält man

$$(-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos \mu u$$

$$= \frac{\mu}{1}\cos u - \frac{(\mu+1)\mu(\mu-1)}{1.2.3}\cos^3 u + \frac{(\mu+3)(\mu+1)\mu(\mu-1)(\mu-3)}{1.2.3.4.5}\cos^5 u - \ldots.$$

oder für $\mu = 2m+1$ nach beiderseitiger Division mit μ:

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos(2m+1)u$$

$$= \cos u - \frac{(m+1)m}{2.3}2^2 \cos^3 u + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.3.4.5}2^4 \cos^5 u - \ldots.$$

und wenn man $u = lx\sqrt{-1}$ nimmt:

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\left(x^{2m+1} + \frac{1}{x^{2m+1}}\right)$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right) - \frac{(m+1)m}{2.3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.3.4.5}\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 - \ldots$$

wobei wir zur Abkürzung

$$M_1 = 1,\quad M_3 = \frac{(m+1)m}{2.3},\quad M_5 = \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.3.4.5},\ \text{etc.}$$

setzen wollen, so dass die obige Gleichung die elegantere Form

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}(x^{2m+1}+\frac{1}{x^{2m+1}})=M_1(x+\frac{1}{x})-M_3(x+\frac{1}{x})^3+M_5(x+\frac{1}{x})^5-\ldots$$

annimmt.

Multipliziren wir jetzt beiderseits mit

$$\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu+1}}\cdot\frac{dx}{x},$$

worin μ eine beliebige Grösse bezeichnet, und integriren innerhalb der Gränzen $x=0$ und $x=1$, so wird

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\left[\int_0^1\frac{x^{2m}dx}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu+1}}+\int_0^1\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu+1}}\cdot\frac{dx}{x^{2m+2}}\right]$$

$$=M_1\int_0^1\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu}}\cdot\frac{dx}{x}-M_3\int_0^1\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu-2}}\cdot\frac{dx}{x}$$

$$+M_5\int_0^1\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu-4}}\cdot\frac{dx}{x}-M_7\int_0^1\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu-6}}\cdot\frac{dx}{x}$$

u. s. f. ....(11)

Die Integrale rechts stehen unter der gemeinschaftlichen Form

$$\int_0^1\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dx}{x},$$

aus der sie hervorgehen, wenn man für n der Reihe nach 0, 1, 2, 3, etc. setzt. Nehmen wir nun erstlich $x=z$, so ist

$$\int_0^1\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dx}{x}=\int_0^1\frac{1}{(z+\frac{1}{z})^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dz}{z}\ldots.(12)$$

nehmen wir aber $x=\frac{1}{z}$, so wird $\frac{dx}{x}=-\frac{dz}{z}$ und $z=\frac{1}{x}$; hat nun x die Werthe 1 und 0 angenommen, so ist $z=1$ und $z=\infty$ geworden, folglich hat man

$$\int_0^1\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dx}{x}=-\int_\infty^1\frac{1}{(\frac{1}{z}+z)^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dz}{z}=+\int_1^\infty\frac{1}{(z+\frac{1}{z})^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dz}{z}.$$

Addirt man hierzu die Gleichung (12) und bemerkt, dass rechts

das nämliche Integral erst von $z=0$ bis $z=1$, dann von $z=1$ bis $z=\infty$ genommen wird, so ergiebt sich

$$2\int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dx}{x}=\int_0^\infty \frac{1}{(z+\frac{1}{z})^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dz}{z},$$

folglich

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dx}{x}=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(z+\frac{1}{z})^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dz}{z}=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{z^{2\mu-2n-1}dz}{(1+z^2)^{2\mu-2n}}.$$

Setzt man in dem Integrale rechts $z^2=x$, also $z=x^{\frac{1}{2}}$, so geht dasselbe in das folgende über:

$$\tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^{\mu-n-1}dx}{(1+x)^{2\mu-2n}},$$

dessen Werth nach Formel (4) gefunden werden kann, wenn man dort $\alpha=\mu-n$, $\alpha+\beta=2\mu-2n$, also $\beta=\mu-n$ nimmt. Man erhält dann

$$\tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^{\mu-n-1}dx}{(1+x)^{2\mu-2n}}=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(\mu-n)\Gamma(\mu-n)}{\Gamma(2\mu-2n)}=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\overline{\Gamma(\mu-n)}^2}{\Gamma(2\mu-2n)}.$$

Führt man die hieraus für $n=0, 1, 2, 3,\ldots$ entspringenden Werthe in die Gleichung (11) ein, so ergiebt sich

$$(13)\ldots\frac{(-1)^m}{2m+1}\left[\int_0^1 \frac{x^{2m}dx}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu+1}}+\int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu+1}}\cdot\frac{dx}{x^{2\mu+2}}\right]$$

$$=\tfrac{1}{4}\left[M_1\frac{\overline{\Gamma(\mu)}^2}{\Gamma(2\mu)}-M_3\frac{\overline{\Gamma(\mu-1)}^2}{\Gamma(2\mu-2)}+M_5\frac{\overline{\Gamma(\mu-2)}^2}{\Gamma(2\mu-4)}-\ldots\right].$$

Es handelt sich nun noch um den Werth der Integrale links. Setzt man in dem ersten Integrale $x=z$, so ändert sich dasselbe nicht wesentlich, nimmt man dagegen im zweiten $x=\frac{1}{z}$, so wird $dx=-\frac{dz}{z^2}$, $\frac{dx}{x^{2m+2}}=\frac{1}{x^{2m}}\cdot\frac{dx}{x^2}=-z^{2m}dz$, und für $x=1$, $x=0$ wird $z=1$ und $z=\infty$, mithin jenes Integral

$$=-\int_\infty^1 \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z}+z)^{2\mu+1}}=+\int_1^\infty \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z}+z)^{2\mu+1}}.$$

Die in (13) zwischen den Parenthesen links stehende Summe wird hiernach

$$\int_0^1 \frac{z^{2m}\,dz}{(z+\frac{1}{z})^{2\mu+1}} + \int_1^\infty \frac{z^{2m}\,dz}{(\frac{1}{z}+z)^{2\mu+1}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{z^{2m}\,dz}{(\frac{1}{z}+z)^{2\mu+1}} = \int_0^\infty \frac{z^{2\mu+2m+1}\,dz}{(1+z^2)^{2\mu+1}}.$$

Für $z^2 = x$, also $z = x^{\frac{1}{2}}$) geht dieses Integral in das folgende über:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{\mu+m}\,dx}{(1+x)^{2\mu+1}},$$

dessen Werth nach Formel (4) für $\alpha - 1 = \mu + m$, $\alpha + \beta = 2\mu + 1$, also $\alpha = \mu + m + 1$, $\beta = \mu - m$ gefunden werden kann. Derselbe ist

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\mu+m+1)\,\Gamma(\mu-m)}{\Gamma(2\mu+1)}.$$

Setzt man dies statt der eingeklammerten Summe auf der linken Seite in (13), multiplizirt darauf beiderseits mit 4 und setzt für M_1, M_3, M_5, etc. ihre Werthe, so wird

$$(14)\ldots\ \frac{2(-1)^m}{2m+1}\cdot\frac{\Gamma(\mu+m+1)\,\Gamma(\mu-m)}{\Gamma(2\mu+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)^2}{\Gamma(2\mu)} - \frac{(m+1)m}{2.3}\cdot\frac{\Gamma(\mu-1)^2}{\Gamma(2\mu-2)} + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.3.4.5}\cdot\frac{\Gamma(\mu-2)^2}{\Gamma(2\mu-4)} - \ldots$$

worin sich das zweite der von mir gefundenen Theoreme ausspricht. Am a. O. steht dasselbe unter einer anderen Form, welche aber aus dieser leicht abgeleitet werden kann.

Legendre hat nämlich über die Gammafunktionen folgendes Theorem gefunden, welches nachher auf verschiedene Weise, am elegantesten von Lejeune Dirichlet bewiesen worden ist:

$$\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{n})\Gamma(a+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n}) = \Gamma(na)(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-na}.$$

Für $n=2$ ergiebt sich daraus

$$\Gamma(a)\Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2a)\,\frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2a}},$$

oder

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\cdot\frac{1}{\Gamma(a+\frac{1}{2})},$$

und für $a = \mu - n$

$$\frac{\Gamma(\mu-n)}{\Gamma(2\mu-2n)} = \frac{2^{2n}\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\cdot\frac{1}{\Gamma(\mu-n+\frac{1}{2})}.$$

Multiplizirt man noch beiderseits mit $\Gamma(\mu-n)$, so wird

$$\frac{\overline{\Gamma(\mu-n)}^2}{\Gamma(2\mu-2n)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\cdot\frac{2^{2n}\Gamma(\mu-n)}{\Gamma(\mu-n+\frac{1}{2})}.$$

Substituirt man die für $n=0, 1, 2, 3\ldots.$ hieraus resultirenden Gleichungen in Nr. (14), so geht dieselbe über in

$$\frac{2(-1)^m}{2m+1}\cdot\frac{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\mu-m)}{\Gamma(2\mu+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}-\frac{(m+1)m}{2.3}\cdot\frac{2^2\Gamma(\mu-1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-1)}+\ldots\right]$$

$$(15)\ldots.\frac{(-1)^m 2^{2\mu}}{2m+1}\cdot\frac{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\mu-m)}{\Gamma(2\mu+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}-\frac{(m+1)m}{2.3}\cdot\frac{2^2\Gamma(\mu-1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-1)}+\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.3.4.5}\cdot\frac{2^4\Gamma(\mu-2)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-2)}-\ldots$$

und in dieser Form wurde der genannte Satz zuerst mitgetheilt.

Zu bemerken ist noch, dass in beiden Theoremen $\mu > m$ sein muss, wenn keine der Differenzen $\mu-1$, $\mu-2$, etc. negativ, also ihre Gammafunktion unendlich werden soll.

XXXIV.

Miscellen.

Lehrsatz.

Von Herrn Professor Friedrich Pross zu Stuttgart.

Bewegen sich (Taf. II. Fig. 5.) zwei unveränderliche Punkte D und E einer Geraden BC auf zwei sich schneidenden Geraden XX' und YY', so beschreibt jeder Punkt M der Geraden BC eine Ellipse.

Beweis.

Man ziehe MP und Mp parallel mit XX' und YY', setze $MD=a$ und $ME=b$, nehme XX' zur Abscissenaxe und YY' zur Ordinatenaxe und bezeichne den Axenwinkel YAX mit φ, so ist:

$$Dp^2 + Mp^2 + 2Dp.Mp.\cos\varphi = DM^2;$$

allein: $Dp:DM = PM:EM$, oder: $Dp:a = y:b$;

$$\text{also: } Dp = \frac{ay}{b}.$$

Dieses in die obige Gleichung substituirt, giebt:

$$\frac{a^2y^2}{b^2} + x^2 + 2\frac{ay}{b}x.\cos\varphi = a^2,$$

oder

$$a^2y^2 + b^2x^2 + 2ab\,xy\cos\varphi = a^2b^2,$$

welches die allgemeine Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist.

Zusatz. Für ein rechtwinkliges Coordienatensystem ist $\cos\varphi = 0$; also:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Anmerkung. Auf diesen Satz gründet sich die bekannte Verzeichnungsart einer Ellipse mittelst des Ellipsographen, oder auch vermittelst eines Papierstreifens.

Herr Catalan hat der société philomatique de Paris die folgenden Sätze von den periodischen Kettenbrüchen ohne Beweis mitgetheilt.

1) Si l'on représente par y_n la valeur que l'on obtient quand on limite la fraction continue x aux n premières périodes, on a généralement:

$$y_n = \frac{Py_{n-1} + N}{P'y_{n-1} + N'},$$

$\frac{P}{P'}$ étant la réduite équivalente à y_1, et $\frac{N}{N'}$ la réduite précédente.

2) Si y_{n-1} est une fraction irréductible, $\frac{R}{R'}$, y_n ou $\frac{PR + NR'}{P'R + N'R'}$ sera aussi une fraction irréductible.

3) Comme on peut supposer y_1 réduit à sa plus simple expression $\frac{P}{P'}$, y_n est une réduite de la fraction continue.

4) Soient $y_{n-1} = \frac{R}{R'}$, $y_n = \frac{S}{S'}$, on aura

$$y_{n-1} - y_n = \frac{RS' - R'S}{R'S'} = \pm \frac{P'}{R'S'};$$

donc la différence entre y_{n-1} et y_n diminue indéfiniment lorsque n augmente.

5) Les dénominateurs R', S' sont divisibles par P'; donc

$$y_{n-1} - y_n = \pm \frac{1}{R''S'}.$$

Arago theilte der Akademie der Wissenschaften zu Paris aus einem Briefe von Requien in Avignon mit, dass in einem ungedruckten Briefe von Linné, welchen d'Hombre-Firmas besitzt, folgende Stelle sich findet: Ego primus fui, qui parare constitui thermometra nostra ubi punctum congelationis 0 et gradus coquentis aquae 100, et hoc pro hybernaculis horti; si his adsuetus esses, certus sum quod arrideret. Mithin würde die Feststellung der hunderttheiligen Scale von Celsius auf Linné überzutragen sein.

Berichtigungen.

Für den fünften Theil.

S. 75. Z. 18. ist zwischen den Worten „deren Mittelpunkt" und „in der Verticale" die Parenthese einzuschalten: (mit einer kleinen Vernachlässigung von höchstens $\frac{t}{300}$).

— 329. — 5. l. u statt n.

— 381. — 28. l. „Resultate convergenter" statt „unrichtigen Werthe der"

— 438. — 17. v. u. l. $\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \text{ in inf.}\right) \sqrt{\pi}$

statt $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$ in inf.

— 430. — 5. in der zweiten Gleichung streiche man das Minuszeichen.

XXXV.

Geometrischer Beweis des Satzes, dass jeder allgebraischen Gleichung mit Einer Unbekannten durch einen complexen Werth dieser Unbekannten Genüge geleistet werden kann.

Von

Herrn Doctor T. Wittstein

zu Hannover.

1.

Wie sorgfältig man auch darauf bedacht sein mag, alle Begriffe von Raum und Ausdehnung, als der Geometrie angehörig, aus der abstracten Arithmetik fern zu halten, so kann doch die eine Thatsache nicht hinweg geläugnet werden, dass man den Inbegriff der reellen Zahlen sich stets unter dem Bilde einer geraden nach beiden Seiten unbegrenzten Linie vorstellt. Dieses Bild ist das nothwendige Ergebniss desjenigen psychologischen Vorganges, welcher die Zahlen entstehen lässt, und es bildet, wenn auch mehr oder weniger unbewusst, die Grundlage aller arithmetischen Betrachtungen. Zuerst stellen sich die ganzen Zahlen dar als eine Reihe äquidistanter Punkte; ein beliebiger dieser Punkte wird als Nullpunkt angesehen, und von ihm ausgehend entwickeln sich nach der einen Seite die positiven, nach der anderen die negativen ganzen Zahlen, beide ins Unbegrenzte. Durch äquidistante Interpolirungen zwischen je zwei benachbarten Punkten vermittelst neuer Punkte gelangt man zur Darstellung der Brüche, sowohl der positiven als der negativen; und der Begriff der irrationalen Zahlen führt endlich dahin, die discontinuirliche Punktenreihe in eine continuirliche Linie*) übergehen zu machen.

*) Die Arithmetik ist also nichts weniger als eine Wissenschaft, die sich ausschliesslich mit discreten Grössen beschäftigt, welche sachwidrige Ansicht man noch immer von Lehrbuch zu Lehrbuch wandern sieht.

Digitized by Google

Bei dieser Ansicht der Sache würde man füglich von einer Arithmetik von Einer Dimension — analog der Geometrie von Einer Dimension — reden und darunter die Arithmetik der reellen Zahlen verstehen dürfen*); es bliebe nur noch übrig zu zeigen, dass es auch eine Arithmetik von mehr als Einer Dimension gebe. Dass und wie dies aber geschehen könne, davon soll hier zunächst in der Kürze gehandelt werden**).

2.

Durch diejenige gerade Linie, welche als bildliche Darstellung der reellen Zahlen angesehen werden kann und desshalb die **Achse der reellen Zahlen** heissen mag, werde eine Ebene hindurch gelegt, und es werde die Aufgabe gestellt, Zahlenformen anzugeben, welche die Lage beliebiger Punkte dieser Ebene in einer solchen Weise ausdrücken, dass darunter die Festlegung von Punkten in der genannten Achse durch reelle Zahlen als ein besonderer Fall begriffen ist.

Es sei A der Nullpunkt in der Achse der reellen Zahlen und B ein beliebiger anderer Punkt der Ebene. Die Lage des Punkts B gegen A allein wird bestimmt sein durch Angabe der geradlinigen Entfernung AB, und diese ist stets, unter Voraussetzung einer gegebenen Längeneinheit, einer positiven Zahl $=\varrho$ gleich, oder vielmehr einer Zahl, der kein Vorzeichen gegeben werden darf. Die Lage der geraden Linie AB aber wird in der Ebene bestimmt durch Angabe desjenigen positiven oder negativen Winkels, welcher durch eine Drehung, die aus der positiven Richtung der Achse der reellen Zahlen in die Richtung AB überführt, beschrieben wird; und dieser Winkel kann immer durch einen positiven oder negativen Kreisbogen $=\varphi$ zur Darstellung gebracht werden, welcher aus dem Mittelpunkte A mit einem der Längeneinheit gleichen Halbmesser beschrieben und von dem Punkte $+1$ der Achse der reellen Zahlen bis dahin gerechnet wird, wo ihn die Linie AB schneidet. — Die beiden Elemente ϱ und φ zusammengenommen müssen mithin das Zahlzeichen, welches die Lage des Punktes B in der Ebene festlegt, bilden. Ausserdem ist bekannt, dass für $\varphi=0$ sich dieses Zahlzeichen unter der Form $+\varrho=\varrho.+1$, und für $\varphi=\pi$ unter der Form $-\varrho=\varrho.-1$ darstellen muss.

Man projicire den Punkt B auf die Achse der reellen Zahlen durch ein Perpendikel BC, welches die letztere in C trifft, und

*) Es verdient beachtet zu werden, dass die Arithmetik von Einer Dimension einen so ausserordentlichen Umfang besitzt, während die Geometrie von Einer Dimension sich mit sehr wenigen Worten erledigen lässt.

) Man vergleiche hiemit die schätzbare Behandlung desselben Gegenstandes von Herrn **Ballauff, Bd. V. S. 280—286 des Archivs, die dem Verf. erst zu Gesicht kam, als das Nachstehende bereits niedergeschrieben war. Es ist zu verwundern, dass nach der so vortrefflichen Darstellung von **Gauss** in den Göttinger gel. Anz. von 1831, 64 Stück, die billig von keinem Mathematiker ungelesen bleiben sollte, dieses neue Feld nicht schon weiter angebauet worden ist.

betrachte die Linienverbindung ACB als Festlegung des Punktes B. Der Punkt C in der Achse der reellen Zahlen wird sodann festgelegt werden durch die Zahl $\varrho \cos\varphi$, welche positiv oder negativ ist, je nachdem $\cos\varphi$ das Zeichen $+$ oder $-$ hat; der Punkt B in Bezug auf C wird festgelegt werden durch die Zahl $\varrho \sin\varphi$, positiv oder negativ, je nachdem $\sin\varphi$ es ist. Bezeichnet man nun mit $+i$ diejenige Einheit, welche, an Grösse gleich der Einheit $+1$ in der Achse der reellen Zahlen, unter rechtem Winkel gegen diese Achse gerichtet ist; und nimmt man zugleich das Additionszeichen in derjenigen erweiterten Bedeutung, dass es auch auf die rechtwinklige Zusammenfügung zweier geraden Linien ausgedehnt wird, so erhält man

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

als allgemeines Zeichen derjenigen Zahlen, welche die Lage aller Punkte der gegebenen Ebene in Bezug auf die gegebene Achse und den gegebenen Anfangspunkt repräsentiren.

3.

Wir nennen jede Zahl von der Form $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nach Gauss eine complexe Zahl. In denjenigen besondern Fällen, in welchen $\varphi = 0$ oder gleich einem Vielfachen von $\pm\pi$ ist, reducirt sich die complexe Zahl auf eine reelle Zahl; in allen übrigen Fällen dagegen, in denen φ irgend einen andern Werth hat, heisst sie eine imaginäre Zahl.

Jede reelle Zahl tritt demnach unter der Form $\varrho . \pm 1$ auf, und da man hier gewohnt ist, den Factor ϱ den absoluten Zahlwerth der Zahl zu nennen, so könnte man nach dieser Analogie völlig allgemein den Factor ϱ der complexen Zahl $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ als den absoluten Zahlwerth der complexen Zahl ansehen; der andere Factor $\cos\varphi + i\sin\varphi$ würde sodann, gleichfalls nach Analogie des Factors ± 1 bei den reellen Zahlen, die Richtung angeben, nach welcher hin der absolute Zahlwerth construirt werden soll. Gebräuchlicher ist es, den Factor ϱ mit dem Namen des Modulus der complexen Zahl zu belegen; für reelle Zahlen fällt der Modulus mit dem absoluten Zahlwerthe zusammen.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dass jede complexe Zahl $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ auch unter der Form $a + ib$ dargestellt werden kann, indem man setzt

$$\varrho \cos\varphi = a, \quad \varrho \sin\varphi = b.$$

Wir werden jedoch hier von dieser letztern Form keinen Gebrauch machen, weil sie uns weniger die Natur der complexen Zahlen auszusprechen scheint, indem sie Zahlwerth und Richtung nicht getrennt hervortreten lässt. Es ist übrigens leicht, von der letztern Form zu der erstern zurückzukehren, indem man hat:

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

wo die Wurzel $\sqrt{a^2 + b^2}$ nur positiv zu nehmen ist.

4.

Ueber die Ausführung der arithmetischen Operationen in der Ebene der complexen Zahlen muss hier Nachstehendes bemerkt werden.

1. Was man unter der Addition complexer Zahlen zu verstehen habe, liegt schon theilweise in der oben entwickelten Definition dieser Zahlen ausgesprochen; man wird nämlich das Zeichen der Addition nicht nur für die Verbindung zweier Zahlen in derselben oder in entgegengesetzter Richtung, sondern überhaupt für ihre Verbindung in jeder beliebigen Richtung in der Ebene der complexen Zahlen zu gebrauchen haben, so dass, von dem der einen Zahl entsprechenden Punkte der Ebene ausgehend, die zweite ebenso in Hinsicht auf Grösse und Richtung construirt wird, wie sie vom Anfangspunkte A aus construirt sein würde. Man kann demnach, wenn z. B. B und B' zwei Punkte der Ebene bezeichnen, deren Lage resp. durch die complexen Zahlen

$$\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \text{ und } \varrho'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$$

repräsentirt wird, zur Auffindung desjenigen Punktes C der Ebene, dem die Summe

$$\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\varrho'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$$

entspricht, dadurch gelangen, dass man durch B eine der AB' gleiche und mit ihr übereinstimmend parallele Linie BC zieht. Wie hieraus der Satz folgt, dass die Ordnung der zu addirenden Zahlen in Hinsicht auf ihre Summe gleichgültig ist, und wie hieran die Addition von mehr als zwei Zahlen sich knüpft, leuchtet von selbst ein.

Um den analytischen Ausdruck der Summe zweier complexen Zahlen zu erhalten, bezeichne man mit

$$P(\cos\Phi+i\sin\Phi)$$

die gesuchte Summe; alsdann ist

$$P=\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2+2\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi')},$$

$$\cos\Phi=\frac{\varrho\cos\varphi+\varrho'\cos\varphi'}{\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2+2\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi')}},$$

$$\sin\Phi=\frac{\varrho\sin\varphi+\varrho'\sin\varphi'}{\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2+2\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi')}}.$$

Für $\varphi'=\varphi$ verwandelt sich die Summe in

$$(\varrho+\varrho')(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

für $\varphi'=\varphi+\pi$ in

$$(\varrho-\varrho')(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

2. Von der *Subtraction* zu reden ist überflüssig, weil dieselbe durch Umkehrung des Vorzeichens vom Subtrahend, d. h. durch Vergrösserung seiner Winkelzahl um $\pm\pi$ oder ein ungerades Vielfaches von $\pm\pi$, sich immer in eine Addition verwandeln lässt.

3. Die *Multiplication* complexer Zahlen erledigt sich gleichfalls einfach, indem man ihren Begriff dahin bestimmt, dass mit dem einen Factor in der Ebene der complexen Zahlen eben so operirt werden solle, wie der andere Factor aus der positiven reellen Einheit $+1$ hervorging. Sind also

$$\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \text{ und } \varrho'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$$

die gegebenen Factoren, so kann man sich den letztern nach §. 2. dadurch aus der Einheit $+1$ entstanden denken, dass man diese Einheit, welche von dem Anfangspunkte A aus durch einen entsprechenden Abschnitt auf der positiven Seite der Achse der reellen Zahlen dargestellt wird, um den Winkel φ' drehete und zugleich in dem Verhältnisse $1:\varrho'$ grösser werden liess; verfährt man eben so mit dem ersten Factor, so geht der Winkel φ über in $\varphi+\varphi'$, der Modulus ϱ aber in $\varrho\varrho'$. Man erhält mithin als analytischen Ausdruck des Products

$$\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi).\varrho'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=\varrho\varrho'(\cos\overline{\varphi+\varphi'}+i\sin\overline{\varphi+\varphi'}).$$

Dasselbe Resultat würde auch bei Vertauschung der Factoren erschienen sein.

4. Sollte das Product $=1$ werden, so würde man nur nöthig gehabt haben, $\varrho'=\frac{1}{\varrho}$ und $\varphi'=-\varphi$ zu setzen; daraus folgt aber, dass man jederzeit habe

$$\frac{1}{\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{\varrho}(\cos\overline{-\varphi}+i\sin\overline{-\varphi}).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung, die den reciproken Werth von einer gegebenen complexen Zahl finden lehrt, lässt sich stets die *Division* erledigen, indem durch Multiplication des Dividenden mit dem reciproken Werthe des Divisors der Quotient erhalten wird.

5. Das *Potenziren*, unter der Voraussetzung, dass der Exponent eine positive oder negative ganze Zahl ist, lässt sich leicht an das Multipliciren knüpfen; denn durch die Annahme mehrerer gleichen Factoren, deren Anzahl $=n$ sei, erhält man

$$\{\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\}^n=\varrho^n(\cos\overline{n\varphi}+i\sin\overline{n\varphi}),$$

woraus sogleich vermittelst der bekannten Bedeutung eines negativen Exponenten folgt:

$$\{\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\}^{-n}=\varrho^{-n}(\cos\overline{-n\varphi}+i\sin\overline{-n\varphi}).$$

Verfolgt man die successiven Potenzen, indem man $n=1,2,3\ldots$ setzt, in der Ebene der complexen Zahlen, so ist nicht schwer zu erkennen,

Digitized by Google

dass die ihnen correspondirenden Punkte einer logarithmischen Spirale angehören, deren Gleichung ist

$$r = k^u,$$

wenn r den Radius vector, u dessen Elongation von der Achse, und k eine Constante bezeichnet. Aber diese Constante, und mit ihr die Curve, ist durch jene Punkte allein noch nicht bestimmt; denn so wie die gegebene complexe Zahl sich nicht ändert, wenn man in ihr den Winkel φ um 2π oder ein Vielfaches von 2π sich ändern lässt, so kann auch die Curve, um von jedem der einzelnen Punkte zu dem nächstfolgenden zu gelangen, zuvor eine oder mehrere volle Umwindungen machen, während noch immer alle die gegebenen Punkte in ihr enthalten sind. Diese Bemerkung ist desshalb von Wichtigkeit, weil daraus die Vielförmigkeit derjenigen Potenzen einer complexen Zahl, deren Exponenten nicht ganze Zahlen sind, hervorgeht; nur für $\varrho = 1$ fällt dieses Bild weg, weil alsdann die logarithmische Spirale zu einem Kreise degenerirt.

Setzt man $\varphi = 0$ oder $= 2\pi$, so verwandelt sich die Spirale in die positive Hälfte der Achse der reellen Zahlen; oder man kann auch die Sache so ansehen, als ob die Punkte der Spirale, die als Spirale bestehen bleibt, um je 2π aus einander liegen. Setzt man aber $\varphi = \pi$, so haben die Punkte der Spirale einen Abstand von je π, und liegen abwechselnd in der positiven und negativen Hälfte der Achse der reellen Zahlen, womit eine Deutung derjenigen Erscheinung gegeben ist, dass die successiven Potenzen einer negativen Zahl abwechselnd positiv und negativ werden.

6. In Bezug auf das Wurzelausziehen ergibt sich durch Umkehrung sogleich

$$\Big\{\Big\{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big\}\Big\}^{\frac{1}{n}} = \varrho^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}),$$

wo (nach Cauchy) durch die doppelten Klammern die Mehrförmigkeit des Ausdrucks angezeigt werden soll. Die gegebene complexe Zahl ändert sich nämlich nicht, wenn man den Winkel φ um 2π oder ein Vielfaches von 2π ändert, während diese Aenderung nicht nur auf $\frac{\varphi}{n}$, sondern im Allgemeinen auch auf $\cos\frac{\varphi}{n}$ und $\sin\frac{\varphi}{n}$ von Einfluss ist. Die Anzahl der Werthe, deren demnach dieser Ausdruck fähig ist, beträgt n, und bezeichnet man mit φ_0 irgend einen derjenigen Werthe, die der Winkel φ annehmen kann (z. B. den kleinsten positiven), so entsprechen den n Wurzeln der Zahl $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ die Winkel

$$\frac{\varphi_0}{n},\ \frac{\varphi_0 + 2\pi}{n},\ \frac{\varphi_0 + 4\pi}{n},\ldots\ \frac{\varphi_0 + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Die n Wurzeln liegen mithin gleichförmig vertheilt auf der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser $\varrho^{\frac{1}{n}}$, in Abständen von je $\frac{2\pi}{n}$ von einander. Jede dieser Wurzeln liefert, zur Potenz n erhoben, die gegebene complexe Zahl wieder; aber die logarithmischen Spi-

ralen, welche diesen einzelnen Potenzirungen entsprechen, sind sämmtlich von einander verschieden (ausgenommen wenn $\varrho=1$ ist), obwohl sie einzelne Punkte mit einander gemein haben können.

Wie man hieraus auf beliebige Bruch-Exponenten, deren Zähler nicht Eins ist, weiter schliessen, und wie ferner hierunter die Wurzeln aus reellen Zahlen, und insbesondre die Wurzeln aus der positiven und negativen reellen Einheit mitbegriffen sind, leuchtet von selbst ein. Als ein Fall, der für sich Aufmerksamkeit verdient, möge nur noch erwähnt werden

$$((-1))^{\frac{1}{2}}=\pm i,$$

indem hieraus die Identität des Zeichens i mit $\sqrt{-1}$ hervorgeht, insofern man, wie gewöhnlich, $\sqrt{-1}$ als den positiven Werth von $((-1))^{\frac{1}{2}}$ definirt.

5.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zur Sache selbst, nämlich zu dem Beweise des Satzes:

Dass jeder algebraischen Gleichung mit Einer Unbekannten durch einen complexen Werth dieser Unbekannten Genüge geleistet werden kann.

Wir werden dabei einen Weg einschlagen, der im Wesentlichen zuerst von Cauchy befolgt worden ist, werden aber, was Cauchy nicht gethan hat, den Beweis sogleich auf die oben construirte Ebene der complexen Zahlen übertragen und daselbst zu Ende bringen.

Es sei

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots.+a_{n-1}x+a_n=0$$

die gegebene Gleichung, wofür wir zur Abkürzung schreiben wollen

$$f(x)=0,$$

so soll nachgewiesen werden, dass sich ein complexer Werth für x muss angeben lassen, welcher der Bedingung $f(x)=0$ Genüge leistet. Die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ dürfen dabei reelle oder auch selbst complexe Zahlen sein. Man setze

$$x=r(\cos t+i\sin t),$$

so wird nach § 4. $f(x)$ unter der Form

$$f(x)=R(\cos T+i\sin T)$$

dargestellt werden können, wo R und T Functionen von r und t sind; und wenn sich nachweisen lässt, dass r und t immer so gewählt werden können, dass man hat

$$R=0$$

Digitized by Google

(wobei der Werth von T gleichgültig ist), so ist das Verlangte bewiesen, denn diese Gleichung hat unmittelbar die Gleichung $f(x)=0$ zur Folge.

Aber aus der Beschaffenheit der Function $f(x)$ geht hervor, dass man für $r=\infty$ auch habe $R=\infty$, und dass für endliche Werthe von r auch R endlich bleibe, und da ausserdem der Modulus R seiner Natur nach nur positiv sein kann, so folgt, dass derselbe mindestens einen kleinsten Werth besitzen müsse, der zu bestimmten Werthen von r und t gehört. Wenn sich nun beweisen lässt:

> Dass, welchen von Null verschiedenen Werth des Modulus von $f(x)$ man auch für willkührliche Annahmen von r und t erhalten habe, dennoch immer durch entsprechende Aenderungen von r und t ein neuer Modulus von $f(x)$, der *kleiner* ist als der vorige, erhalten werden kann:

so folgt daraus unmittelbar, dass jener nothwendig vorhandene kleinste Werth des Modulus von $f(x)$ nur $=0$ sein kann, dass mithin die ihm zugehörigen Werthe von r und t die Gleichung $R=0$, und folglich auch die Gleichung $f(x)=0$ befriedigen, womit sodann der in Frage stehende Satz bewiesen sein würde.

6.

Zum Beweise desjenigen Hülfssatzes, auf welchen so eben der Beweis des vorgelegten Satzes zurückgeführt worden ist, werde angenommen, man habe durch die Substitution

$$x=r(\cos t+i\sin t)$$

erhalten:

$$f(x)=R(\cos T+i\sin T),$$

wo R nicht $=0$ sei. Ferner durch den Uebergang des x in $x_1=x+h$, wo

$$h=\varrho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

erhalte man:

$$f(x_1)=R_1(\cos T_1+i\sin T_1),$$

so ist nachzuweisen, dass ϱ und θ immer so gewählt werden können, dass man hat:

$$R_1<R.$$

Die Entwickelung von $f(x_1)=f(x+h)$ nach Potenzen von h gibt:

$$f(x_1)=f(x)+b_1h+b_2h^2+\ldots\ldots+h^n.$$

wo die Coefficienten $b_1, b_2, \ldots\ldots$ im Allgemeinen complexe Zahlen sein werden, z. B.

$$b_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$b_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$
$$\dots\dots$$

Von diesen Coefficienten können aber auch einzelne $=0$ werden, und wenn man desshalb der Allgemeinheit wegen annimmt, es sei $b_m h^m$ das erste stehen bleibende Glied, so hat man:

$$f(x_1) = f(x) + b_m h^m + b_{m+1} h^{m+1} + \dots + h^n,$$

und hierin überall die complexen Werthe an die Stelle setzend:

$$\begin{aligned} R_1(\cos T_1 + i\sin T_1) &= R(\cos T + i\sin T) \\ &+ r_m \varrho^m (\cos \overline{\varphi_m + m\theta} + i\sin \overline{\varphi_m + m\theta}) \\ &+ r_{m+1}\varrho^{m+1} (\cos \overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta} + i\sin \overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta}) \\ &\dots\dots \\ &+ \varrho^n (\cos n\theta + i\sin n\theta). \end{aligned}$$

Die Summe, welche durch die rechte Seite dieser Gleichung dargestellt wird, construire man nun in der Ebene der complexen Zahlen nach den früher (§. 4.) entwickelten Regeln der Addition. Man lege zu dem Ende von dem Anfangspunkte A der Achse der reellen Zahlen eine Linie $AB = R$ unter einem Winkel $= T$ gegen die positive Richtung dieser Achse; von B aus eine Linie $BC = r_m \varrho^m$ unter einem Winkel $= \varphi_m + m\theta$ gegen eine durch B gelegte Parallele zu der positiven Richtung der Achse der reellen Zahlen; von C aus eine Linie $CD = r_{m+1}\varrho^{m+1}$ unter einem Winkel $= \varphi_{m+1} + (m+1)\theta$, u. s. w. Gelangt man auf diese Weise zuletzt zu einem Punkte M der Ebene, so ist die gerade Linie $AM = R_1$, und der Winkel, den sie mit der positiven Richtung der Achse einschliesst, $= T_1$.

Damit nun aber, wie verlangt wird, $R_1 < R$ werde, kann man über die Grössen ϱ und θ verfügen wie folgt.

Man nehme θ so, dass $\varphi_m + m\theta = T + \pi$ wird, folglich

$$\theta = \frac{T + \pi - \varphi_m}{m} \dots (1)$$

so wird dadurch erreicht, dass die Linie BC auf AB fällt, und wählt man ausserdem ϱ so, dass $r_m \varrho^m < R$, folglich

$$\varrho < \sqrt[m]{\frac{R}{r_m}} \dots (2),$$

so wird ausserdem noch der Punkt C zwischen A und B auf der Linie AB liegen. Knüpft man nun noch ϱ an die Bedingung, dass

$$r_m \varrho^m > r_{m+1}\varrho^{m+1} + r_{m+2}\varrho^{m+2} + \dots + \varrho^n$$

oder auch, wenn man mit λ eine positivo Zahl bezeichnet, die nicht kleiner ist als der grösste der positiven Factoren r_{m+1}, r_{m+2}, ... bis 1:

$$r_m\varrho^m > \lambda(\varrho^{m+1}+\varrho^{m+2}+\ldots+\varrho^n)$$
$$> \lambda\varrho^{m+1}\cdot\frac{1-\varrho^{n-m}}{1-\varrho},$$

welche Bedingung erfüllt sein wird, wenn

$$\varrho < \frac{r_m}{r_m+\lambda}\ldots.(3)$$

so wird die Summe der einzelnen geraden Linien, aus denen der gebrochene Zug CD.... bis M zusammengesetzt ist, kleiner sein als die gerade Linie BC; folglich um so mehr die g e r a d e Linie CM kleiner als die gerade Linie BC; folglich $AM < AC + CM < AC + CB$, d. i. $< AB$, oder

$$R_1 < R,$$

wie verlangt wurde. Die Werthe von ϱ und θ, welche durch (1), (2), (3) bestimmt sind, leisten mithin der gestellten Forderung Genüge.

7.

Die beweisende Kraft des vorstehenden Beweises beruhet schliesslich, wie man sieht, in dem geometrischen Lehrsatze:

Dass zwischen zwei Punkten der geradlinige Zug kürzer ist als jeder aus geraden Linien zusammengesetzte gebrochene Zug;

welchen Lehrsatz vorauszusetzen hier um so weniger Bedenken getragen werden konnte, als durch die vorausgeschickten Entwikkelungen die ganze Frage überhaupt schon auf das Gebiet der Geometrie hinübergeführt worden war. Will man indessen den Beweis mit Umgehung jeder geometrischen Voraussetzung zu Ende führen, so kann man dazu in der That ganz einfach gelangen, indem man einen im Geiste der analytischen Geometrie geführten Beweis jenes geometrischen Lehrsatzes dergestalt in die obige Schlusskette hineinwebt, dass dessen wahre geometrische Bedeutung nicht sichtbar hervortritt.

Die analytische Geometrie nämlich drückt die Längen gerader Linien aus durch die Coordinaten ihrer Endpunkte, und verfährt man demgemäss in Bezug auf die geraden Linien $AB = R$ und $AM = R_1$, die beide im Anfangspunkte der Coordinaten beginnen, so hat man zunächst

$$R\cos T \quad\text{und}\quad R\sin T$$

als rechtwinklige Coordinaten des Endpunkts B, und ebenso

$$R_1\cos T_1 \quad\text{und}\quad R_1\sin T_1$$

als rechtwinklige Coordinaten des Endpunkts M. Zerlegt man nun die oben gefundene Entwickelung von $R_1(\cos T_1 + i \sin T_1)$ in ihren reellen und ihren rein imaginären Theil, um die Relation aufzustellen, welche zwischen den so eben genannten Coordinaten obwaltet, so erhält man

$$R_1 \cos T_1 =$$

$$R \cos T + r_m \varrho^m \cos \overline{\varphi_m + m\theta} + r_{m+1} \varrho^{m+1} \cos \overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta} + \dots \varrho^n \cos n\theta$$

$$R_1 \sin T_1 =$$

$$R \sin T + r_m \varrho^m \sin \overline{\varphi_m + m\theta} + r_{m+1} \varrho^{m+1} \sin \overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta} + \dots \varrho^n \sin n\theta$$

und daraus endlich, indem man quadrirt und addirt:

$$R_1^2 =$$

$$R^2 + 2R r_m \varrho^m \cos \overline{\varphi_m + m\theta - T} + 2R r_{m+1} \varrho^{m+1} \cos \overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta - T} + \dots$$

$$+ (r_m \varrho^m \cos \overline{\varphi_m + m\theta} + r_{m+1} \varrho^{m+1} \cos \overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta} + \dots)^2$$

$$+ (r_m \varrho^m \sin \overline{\varphi_m + m\theta} + r_{m+1} \varrho^{m+1} \sin \overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta} + \dots)^2$$

Damit nun $R_1^2 < R^2$ werde, hat man hier ϱ und θ so zu bestimmen, dass das dem R^2 unmittelbar nachfolgende Glied, welches die niedrigste Potenz von ϱ enthält, negativ werde, und zugleich einen Zahlwerth erhalte, der grösser ist als der Zahlwerth der Summe aller nachfolgenden Glieder. Das Erste aber wird erreicht, wenn man setzt

$$\cos \overline{\varphi_m + m\theta - T} = -1,\ \varphi_m + m\theta - T = \pi,\ \theta = \frac{T + \pi - \varphi_m}{m} \dots (1^*).$$

das Zweite aber, wenn man setzt, indem μ einen Zahlwerth bezeichnet, der nicht kleiner ist als der Zahlwerth des absolut grössten der Coefficienten der nachfolgenden Potenzen von ϱ:

$$2R r_m \varrho^m > \mu(\varrho^{m+1} + \varrho^{m+2} + \dots \varrho^{2n})$$
$$> \mu \varrho^{m+1} \cdot \frac{1 - \varrho^{2n-m}}{1 - \varrho},$$

welche Bedingung erfüllt wird, indem man annimmt

$$\varrho < \frac{2R r_m}{2R r_m + \mu} \dots (2^*).$$

Dieser Beweis ist, wenn man seine geometrische Grundlage hinwegnimmt, wesentlich derselbe, welchen Cauchy gegeben hat. Jene Grundlage aber wirft auf seine Entstehung erst das rechte Licht, und sie aufgedeckt zu haben möchte desshalb kein vergebliches Unternehmen gewesen sein.

Digitized by Google

Nachschrift des Herausgebers.

Mit Bezug auf die von dem Herrn Verfasser des vorhergehenden Aufsatzes auf S. 226. gemachte Bemerkung halte ich es für zweckmässig, die betreffende Stelle aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen. 1831. St. 64. S. 634.—S. 638. hier mitzutheilen, um dieses wichtige Actenstück in dem Archiv aufzubewahren.

„Der Verf. hat diesen hochwichtigen Theil der Mathematik*) seit vielen Jahren aus einem verschiedenen Gesichtspunkt betrachtet, wobei den imaginären Grössen eben so gut ein Gegenstand untergelegt werden kann, wie den negativen: es hat aber bisher an einer Veranlassung gefehlt, dieselbe öffentlich bestimmt auszusprechen, wenn gleich aufmerksame Leser die Spuren davon in der 1799 erschienenen Schrift über die Gleichungen, und in der Preisschrift über die Umbildung der Flächen leicht wiederfinden werden. In der gegenwärtigen Abhandlung sind die Grundzüge davon kurz angegeben; sie bestehen in Folgendem.

Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu stellen ist. Genau besehen findet diese Voraussetzung nur da Statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern Relationen zwischen je zweien Gegenständen das gezählte sind. Postulirt wird dabei, dass diese Gegenstände auf eine bestimmte Art in eine Reihe geordnet sind z. B. $A, B, C, D \ldots$, und dass die Relation des A zu B als der Relation des B zu C u. s. w. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegensetzung nichts weiter als der Umtausch der Glieder der Relation, so dass wenn die Relation (oder der Uebergang) von A zu B als $+1$ gilt, die Relation von B zu A durch -1 dargestellt werden muss. Insofern als eine solche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt ist, repräsentirt jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem bestimmten Gliede der Reihe.

Sind aber die Gegenstände von solcher Art, dass sie nicht in Eine, wenn gleich unbegrenzte, Reihe geordnet werden können, sondern sich nur in Reihen von Reihen ordnen lassen, oder was dasselbe ist, bilden sie eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen; verhält es sich dann mit den Relationen einer Reihe zu einer andern oder den Uebergängen aus einer in die andere auf eine ähnliche Weise wie vorhin mit den Uebergängen von einem Gliede einer Reihe zu einem andern Gliede derselben Reihe, so bedarf es offenbar zur Abmessung des Ueberganges von einem Gliede des Systems zu einem andern ausser den vorigen Einheiten $+1$ und -1 noch zweier andern unter sich auch entgegengesetzten $+i$ und $-i$

*) Nämlich die Lehre von den imaginären Grössen.

Offenbar muss aber dabei noch postulirt werden, dass die Einheit i allemal den Uebergang von einem gegebenen Gliede einer Reihe zu einem bestimmten Gliede der unmittelbar angrenzenden Reihe bezeichne. Auf diese Weise wird also das System auf eine doppelte Art in Reihen von Reihen geordnet werden können.

Der Mathematiker abstrahirt gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es bloss mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu thun: insofern ist er eben so, wie er den durch $+1$ und -1 bezeichneten Relationen, an sich betrachtet, Gleichartigkeit beilegt, solche auf alle vier Elemente $+1$, -1, $+i$ und $-i$ zu erstrecken befugt.

Zur Anschauung lassen sich diese Verhältnisse nur durch eine Darstellung im Raume bringen, und der einfachste Fall ist, wo kein Grund vorhanden ist, die Symbole der Gegenstände anders als quadratisch anzuordnen, indem man nämlich eine unbegrenzte Ebene durch zwei Systeme von Parallellinien, die einander rechtwinklich durchkreuzen, in Quadrate vertheilt, und die Durchschnittspunkte zu den Symbolen wählt. Jeder solche Punkt A hat hier vier Nachbaren, und wenn man die Relation des A zu einem benachbarten Punkte durch $+1$ bezeichnet, so ist die durch -1 zu bezeichnende von selbst bestimmt, während man, welche der beiden andern man will, für $+i$ wählen, oder den sich auf $+i$ beziehenden Punkt nach Gefallen rechts oder links nehmen kann. Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist, so bald man vorwärts und rückwärts in der Ebene, und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mittheilen können*). Wenn man aber auch über letzteres sich entschlossen hat, sieht man, dass es doch von unserer Willkühr abhing, welche von den beiden in Einem Punkte sich durchkreuzenden Reihen wir als Hauptreihe, und welche Richtung in ihr wir als auf positive Zahlen sich beziehend ansehen wollten; man sieht ferner, dass wenn man die vorher als $+i$ behandelte Relation für $+1$ nehmen will, man nothwendig die vorher durch -1 bezeichnete Relation für $+i$ nehmen muss. Das heisst aber, in der Sprache der Mathematiker, $+i$ ist mittlere Proportionalgrösse zwischen $+1$ und -1 oder entpricht dem Zeichen $\sqrt{-1}$; wir sagen absichtlich nicht die mittlere Proportionalgrösse, denn $-i$ hat offenbar gleichen Anspruch. Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Grösse in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen.

Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der soge-

---

*) Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, dass der Raum nur Form unserer äussern Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegentheil, und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset.

nannten imaginären Grössen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnissvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies grossentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können. Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird."

XXXVI.

Ueber das Princip des kleinsten Zwangs und die damit zusammenhängenden mechanischen Principe.

Von

Herrn Professor Dr. Reuschle

am Gymnasium zu Stuttgart.

Im vierten Bande des Crelle'schen Journals S. 232. stellt Gauss ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik auf, welches unter obigem Namen (Principle of least restraint) in einem englischen Lehrbuch (Earnshaw Dynamics, Cambridge 1839) unter die dynamischen Principe eingereiht worden ist. Soweit ich die Literatur kenne, ist es das einzige, wo es aufgeführt wird, übrigens ohne Beispiele, dergleichen auch Gauss nicht gegeben hat. Der Zweck dieser Abhandlung ist, nach einigen historischen Bemerkungen über die Behandlung des Princips in den beiden genannten Schriften, dasselbe zuerst geradezu an ein paar möglichst einfachen Beispielen zu erproben, es sodann der allgemeinen analytischen Behandlung zu unterwerfen und so in seinem Zusammenhang mit den übrigen Principen der Mechanik nachzuweisen.

Digitized by Google

§. 1.

Nach dem Ausdruck den ihm sein Urheber gegeben hat, lautet das Princip so:

„Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Weise mit einander verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglich grösster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung oder unter möglich kleinstem Zwange, indem als Maass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Producte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punkts von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet wird."

Gauss und Earnshaw beweisen diesen Satz auf verschiedene Art durch Zurückführung auf andere mechanische Principe.

1. Ersterer leitet ihn auf folgende Weise aus dem Dalembertischen Princip in Verbindung mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten ab. Es sei (Taf. IV. Fig. 1.) für irgend einen Punkt des Systems m die Masse, A sein Ort zur Zeit t, B der Ort, den er nach einem unendlich kleinen Zeitintervall τ in Folge der auf ihn wirkenden Kräfte und der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeit einnehmen würde, wenn er vollkommen frei wäre, C der wirkliche Ort, der zufolge des Systemverbandes diesem Zeitintervall entspricht, endlich D irgend ein anderer, dem Systemverband compatibler und, versteht sich, den Punkten A und C unendlich naher Ort, so ist $\Sigma m.\overline{BC}^2$ ein Minimum, wenn

$$\Sigma m.\overline{BD}^2-\Sigma m.\overline{BC}^2>0.$$

Ist aber θ der Winkel zwischen CB und CD, so ist in dem Dreieck BCD

$$BD^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\,\overline{BC}.\overline{CD}.\cos\theta,$$

folglich

$$(a)\ldots\Sigma m.\overline{BD}^2-\Sigma m.\overline{BC}^2=\Sigma m.\overline{CD}^2-2\,\Sigma m.\overline{BC}.\overline{CD}.\cos\theta,$$

aber nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, angewandt auf das Gleichgewicht der verlornen Kräfte, welches durch das Dalembertische gefordert wird, ist:

$$(b)\ldots\Sigma m.\overline{BC}.\overline{CD}.\cos\theta=0,$$

folglich

$$\Sigma m(\overline{BD}^2-\overline{BC}^2)=\Sigma m.\overline{CD}^2>0.$$

Es ist nämlich das Product $m.\overline{BC}.\overline{CD}.\cos\theta$ das dem materiellen Punkt m zugehörige virtuelle Moment, sofern $m.\overline{BC}$ als seine verlorne Kraft betrachtet werden darf. Ueber die Berechtigung hiezu, so wie über die wesentliche Homogeneität der Glei-

chung *(a)* hinsichtlich des Unendlichkleinen erlaube ich mir zu dem Gaussischen Beweise folgende Bemerkungen hinzuzufügen.

Das Product $m.\overline{BC}$ ist zuächst das Product aus der Masse in einen dem unendlichkleinen Zeittheilchen τ entsprechenden Raum oder Weg; man kann denselben aber an die Stelle der der Zeiteinheit entsprechenden Beschleunigung, oder wenn diese p zur Zeit t ist, $\frac{1}{2}p\tau^2$ für p setzen, sofern dann blos $\frac{1}{2}\tau^2$ als gemeinschaftlicher Factor vor das Summenzeichen in *(b)* tritt. Denn obschon die in obigem Ausdruck des Princips vorkommenden, zur Zeit t erlangten Geschwindigkeiten v Räume liefern von der Form $v\tau$, welche also nicht das Quadrat von τ enthalten würden, so sind doch in der That die verlornen Kräfte oder die dafür substituirbaren Räume BC von jenen Geschwindigkeiten v unabhängig, was durch die Nachweisung der verlornen Kraft in BC überhaupt erhellen wird. Sei zu dem Behuf (Taf. IV. Fig. 2.), ausgehend von dem der Zeit t entsprechenden Ort A, AE der im Zeittheilchen τ zufolge der erlangten Geschwindigkeit, AF der in demselben Zeitintervall zufolge der neuhinzutretenden Kraft durchlaufene Raum, während AC, wie oben, den wirklichen Weg bedeutet: so stellt, wenn man AEC zum Parallelogramm ergänzt, $EC = AG$ die wirksame, und wenn man AGF ergänzt, $FG = AH$ die verlorne Composante der beschleunigenden Kraft AF, endlich die Diagonale AB in dem Parallelogramm aus AE und AF den im Zeittheilchen τ frei durchlaufenen Raum vor. Diess ist aber zugleich die Diagonale in dem Parallelogramm aus AC und AH, und daher die Ablenkung BC von der freien Bewegung parallel und gleich der verlornen Kraft AH, woraus bereits erhellt, dass BC wie AF eine Grösse von der Form $\frac{1}{2}p\tau^2$ ist. Noch unmittelbarer aber zeigt sich die Unabhängigkeit der Grösse BC oder AH von der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeit so: ist AC' der AC gleich und entgegengesetzt, so ist AH Resultante aus AB und AC'; zerlegt man aber diese beiden in ihre Composanten zurück, welche für jene AE und AF, für diese AE' und AG' sind, d. h. die der AE und AG gleichen und direct entgegengesetzten Grössen, so heben sich somit AE und AE' als Composanten von AH auf. — Da nun $BC = \frac{1}{2}p\tau^2$, so ist allerdings $\Sigma m.\overline{BC}.\overline{CD}.\cos\theta = \frac{1}{2}\tau^2\,\Sigma mp.\overline{CD}\cos\theta$ nach den citirten Principen null; aber da sich BC zugleich als ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung herausstellt, so müssen auch BD und CD als solche sich erweisen, damit *(a)* homogen sei, weil sonst das in der Gleichung *(b)* enthaltene Glied als ein Unendlichkleines höherer Ordnung aus *(a)* wegfiele, unabhängig vom Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Es ist aber D ein mit C gleichartiger Punkt und es lässt sich für ihn die vorige Construction wiederholen, indem man überall D an die Stelle von C setzt und, ausgehend von A, die gegebene Anfangsgeschwindigkeit AE eben so bei AD, wie bei AC, concurriren, aber irgend eine andere beschleunigende Kraft, anstatt AF, hinzutreten lässt; hiedurch zeigt sich BD als eine Grösse von der Form $\frac{1}{2}p'\tau^2$, wo p' eine willkührlich andere, nur den Bedingungen des Systems entsprechende Beschleunigung ist, die m von B aus anstatt nach C, in demselben Zeittheilchen τ nach D führen würde, und alsdann ist auch CD, als Resultante aus CB und BD, eine Grösse von derselben Form, nämlich, wenn λ der im Dreieck BCD der CD gegenüberliegende Winkel ist, $\overline{CD}^2 = \frac{1}{4}\tau^4\,(p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\lambda)$.

Digitized by Google

II. Eine andere Beweisart versucht Earnshaw, indem er mit dem Dalembertischen Princip die statischen und dynamischen Eigenschaften des Schwerpunkts verbindet, durch eine mechanische Construction, der übrigens ich wenigstens nicht die gehörige Evidenz, Vollziehbarkeit in der Anschauung, zuschreiben kann, welche sich aber auch umgehen lässt. Ausgehend davon, dass in der Richtung BC die Resultante der verlornen, oder wie er sich passend ausdrückt, der Zwangskräfte (forces of restraint, restraining pressures), auf m wirkt, mithin BC der Raum ist, um den die Resultante das Theilchen m in der unendlichkleinen Zeit τ ablenkt: so denke man sich jetzt sämmtliche materiellen Punkte des Systems ihrem Verbande entnommen, in freiem Zustande an irgend einem Punkt β des Raums vereinigt und hier zumal von, den resp. Zwangskräften gleichen, Drucken in deren Richtungen getrieben, so wird sich jedes Theilchen m von β nach einem Punkte γ bewegen, so dass $\beta\gamma$ gleich und parallel BC ist. Da nun die Zwangskräfte von der Art sind, dass sie Gleichgewicht an dem System hervorbringen, gemäss dem Dalembertischen Princip, so können sie keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts haben, gemäss dem Princip der Erhaltung des Schwerpunkts, es bleibt mithin noch der Schwerpunkt der Theilchen m, wenn sie in den Punkten γ sich befinden. Nach einer bekannten Eigenschaft des Schwerpunkts aber ist $\Sigma m\beta\gamma^2$, folglich auch $\Sigma m\overline{BC}^2$ ein Minimum. d. h. der Werth dieser Grösse ist kleiner, als wenn die Zwangskräfte kein Gleichgewicht hervorbrächten, wie sie es nach dem Dalembertischen Princip sollen.

So scharfsinnig und wirklich in der Natur der Sache gegründet nun die Zuziehung dieses Satzes vom Schwerpunkt ist, dass die Summe der Producte aus jeder Masse in das Quadrat ihrer Entfernung vom Schwerpunkt ein Minimum sei: so sehr scheint mir durch die Art, wie der Satz von der Erhaltung des Schwerpunkts in Anwendung gebracht wird, der mechanischen Anschauung Zwang angethan zu werden. Denn so sehr die Forderung an die mathematische Abstraction zuzugestehen ist, sich eine beliebige Masse in einem Punkt, und desgleichen in einer Linie, Fläche, vereinigt, concentrirt zu denken, so unnatürlich, ja wie eine contradictio in adjecto, kommt mir die Forderung vor, mehrere einzelne materielle Punkte (oder in Punkten concentrirt gedachte Massen) in freiem Zustande, unverbunden, so dass jeder für sich sich bewegen kann, als in einem Punkt vereinigt sich zu denken, vielmehr bilden mehrere materielle Punkte dieser Art ein System. und es müsste daher erst bewiesen werden, dass β der Schwerpunkt dieses Systems ist, ehe sich begreifen lässt, dass er es bleibt. Dass nun aber β wirklich der Schwerpunkt der in den Punkten γ befindlichen materiellen Punkte ist, folgt aus einem rein statischen Satze, den Lagrange in der analytischen Mechanik, im 5ten Abschnitt der Statik (T. I. pag. 107). als von Leibnitz aufgestellt, anführt und aus seinen Formeln herleitet. Der Satz besteht darin, dass, wenn mehrere Kräfte an einem Punkt sich Gleichgewicht halten, und von diesem Punkt aus Linien gezogen werden, die nach Grösse und Richtung jene Kräfte vorstellen, der betreffende Punkt der Schwerpunkt eben so vieler (als Kräfte vorhanden sind), in den Endpunkten jener Linien angebrachter, gleicher Massen sei; und man kann ihn dahin erweitern: wenn man

jede der statischen Kräfte P, die an einem Punkt sich Gleichgewicht halten, durch ein Product mp vorstellt, wovon der eine Factor m als eine Masse, der andere p als eine Beschleunigung, oder als ein in einer gewissen Zeit durchlaufener Weg betrachtet werden kann, so ist jener Punkt der Schwerpunkt der in den Entfernungen p von ihm angebrachten Massen m, jene Entfernungen in Richtung der gegebenen Kräfte genommen; und dann ist nach einem zweiten statischen Satze, dem von Earnshaw citirten, Σmp^2 ein Minimum. Indem ich den Beweis des so gestellten Satzes, so wie des letzt erwähnten, in die Berichtigung des englischen Beweises für unser Princip einflechte, besteht dieser nunmehr aus folgenden Momenten:

1) Dem Princip der Erhaltung des Schwerpunkts zufolge können die Zwangskräfte, die an dem System vermöge des Dalembertischen Princips sich Gleichgewicht halten, keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts haben, sondern müssen sich an demselben, mithin überhaupt an einem Punkt β des Raums Gleichgewicht halten*). Setzt man daher, wie in Nro. I. $BC = \beta\gamma = \frac{1}{2}p\tau^2$. und sind a, b, c die Winkel der Linie $\beta\gamma$ mit drei rechtwinkligen Axen der x, y, z, so drücken die Gleichungen

$$(\alpha)\quad \Sigma mp\cos a = 0,\ \Sigma mp\cos b = 0,\ \Sigma mp\cos c = 0$$

das Gleichgewicht der Zwangskräfte $m\,.\,\overline{BC}$ am Punkte β aus.

2) Sind alsdann ξ, η, ζ die Coordinaten des Punkts β und x, y, z die irgend eines der Punkte γ, so ist

$$\overline{\beta\gamma}^2 = \tfrac{1}{4}p^2\tau^4 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

und

$$\cos a = \frac{x-\xi}{\frac{1}{2}p\tau^2},\ \cos b = \frac{y-\eta}{\frac{1}{2}p\tau^2},\ \cos c = \frac{z-\zeta}{\frac{1}{2}p\tau^2};$$

aus den vorhergehenden Gleichungen (α) wird daher:

$$(\beta)\quad \Sigma m(x-\xi) = 0,\ \Sigma m(y-\eta) = 0,\ \Sigma m(z-\zeta) = 0,$$

und diese geben

$$\xi = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m},\ \eta = \frac{\Sigma my}{\Sigma m},\ \zeta = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m},$$

wonach der Punkt β, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, der Schwerpunkt der materiellen Punkte m ist, deren Coordinaten x, y, z, d. h. der in den Punkten γ befindlichen Massen m**).

---

*) Oder einfacher: Da die Zwangskräfte nach dem Dalembertischen Princip an dem gegebenen System Gleichgewicht hervorbringen, so müssen sie insbesondere die fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts aufheben, mithin an einem Punkt sich Gleichgewicht halten.

**) Da man nun, anstatt $mp = P$, $m'p' = P'$ u. s. w. zu setzen, auch setzen kann: $P = mq$, $P' = mq'$...., d. h. alle diese Massen als gleich annehmen, so erhält man, wenn n die Anzahl derselben (oder der Kräfte P):

$$\xi = \frac{1}{n}\Sigma x,\quad \eta = \frac{1}{n}\Sigma y,\quad \zeta = \frac{1}{n}\Sigma z,$$

in welcher Form Lagrange am citirten Ort diese Resultate herleitet, als Ausdruck des Leibnitzischen Satzes.

3) Da die ersten Theile der Gleichungen (β) die partiellen Ableitungen nach ξ, η, ζ von der Function $\frac{\tau^4}{4}\Sigma m p^2$ sind, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, und da die zweiten, nämlich die einen, wo zweimal nach der nämlichen Variable differenzirt wird, sämmtlich auf die wesentlich positive Grösse Σm, die andern, wo nach zwei verschiedenen Variabeln differenzirt wird, sämmtlich auf Null sich reduciren: so sind alle Bedingungen erfüllt, welche jene Function, mithin $\Sigma m.\overline{BC}^2$, zu einem Minimum machen in Beziehung auf ξ, η, ζ, d. h. kleiner, als wenn ξ, η, ζ nicht die dem Schwerpunkt entsprechenden Werthe hätten, mithin kleiner, als wenn die Zwangskräfte $m.\overline{BC}$ nicht an einem Punkt, also auch nicht an dem System sich Gleichgewicht hielten*).

III. Vergleichen wir nun die beiden Beweise, so gehen beide gemeinschaftlich von dem Fundamentalprincip der Dynamik, dem Gleichgewicht der Zwangskräfte aus, unterscheiden sich aber darin, dass der Gaussische dieses Gleichgewicht mittelst der allgemeinsten Bedingung des Gleichwichts in Anwendung bringt, die in dem Verschwinden der virtuellen Momente besteht, der von Earnshaw dagegen mittelst einer partiellen Bedingung, welche bloss die Aufhebung der fortschreitenden Bewegung zur Folge hat. So innig und zierlich nun hier die Beziehung unseres Minimums zu demjenigen, welches der Schwerpunkt darbietet, erscheint, so ist dieser Beweis doch keineswegs allgemein und passt zunächst bloss auf freie Systeme, wo die Zwangskräfte die Bedingung erfüllen müssen, an einem Punkt sich Gleichgewicht zu halten, was nicht mehr der Fall ist, wenn das System einen fixen Punkt oder eine fixe Axe enthält: so dass, sollte sich überhaupt in allen Fällen $\Sigma m.\overline{BC}^2$ auf $\Sigma m r_0^2$ (wo r_0 die Entfernung der Masse vom Schwerpunkt) zurückführen lassen, diess in den genannten Fällen besonders, oder allgemein, geschehen müsste, dann aber wohl nur mittelst des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten geschehen könnte. Hiernach kann man behaupten, dass der englische Beweis bloss die Nachweisung des Princips an einem, obwohl viele Fälle unter sich begreifenden Beispiele ist, dergleichen wir in §. 2. an einem andern Beispiele all-

---

*) Man kann diesen Satz vom Schwerpunkt, dass, wenn r_0 die Distanz eines der materiellen Punkte m vom Schwerpunkt, $\Sigma m r_0^2$ ein Minimum sei, auch ohne Differenzialrechnung so zeigen: es seien $x_0 = x - \xi$, $y_0 = y - \eta$, $z_0 = z - \zeta$ die Coordinaten von m in Beziehung auf den Schwerpunkt, also $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$, ebenso $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, und $\varrho^2 = \xi + \eta^2 + \zeta^2$, so ist:

$$\Sigma m(r^2 - r_0^2) = \Sigma m\left((x_0 + \xi)^2 - x_0^2 + (y_0 + \eta)^2 - y_0^2 + (z_0 + \zeta)^2 - z_0^2\right)$$
$$= 2\xi \Sigma m x_0 + 2\eta \Sigma m y_0 + 2\zeta \Sigma m z_0 + \varrho^2 \Sigma m,$$

folglich, wegen

$$\Sigma m x_0 = \Sigma m y_0 = \Sigma m z_0 = 0, \quad \Sigma m(r^2 - r_0^2) = \varrho^2 \Sigma m > 0,$$

was auch der Coordinatenursprung sein mag.

gemeinerer Art zeigen werden, dass aber der allgemeine Beweis mit Gauss durch die allgemeine Formel der Dynamik, die Verbindung des Dalembertischen Princips mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten, geführt werden muss. Dann nur ist das Princip des kleinsten Zwangs auch hinsichtlich seiner Folgen allgemein aufgestellt, so dass es gleicherweise der Herleitung sämmtlicher Bewegungsgleichungen eines gegebenen Systems zu Grunde gelegt werden kann, wie das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner Anwendung auf das Gleichgewicht der verlornen Kräfte; denn aus dem Gaussischen Beweise erhellt unmittelbar, dass man umgekehrt vom Princip des kleinsten Zwangs zu jener allgemeinen Formel der Dynamik gelangt.

Wie man vermöge des Dalembertischen Satzes aus jeder dynamischen Formel eine statische ableiten kann und umgekehrt, so ist nach Gauss das Gleichgewicht nur ein besonderer Fall des allgemeinen Gesetzes, indem dann bloss die Punkte A selbst, als der Gleichgewichtslage entsprechend, an die Stelle der Punkte C treten, und $\Sigma m.\overline{BA}^2$ ein Minimum ist. Diess heisst in der That soviel als: in der allgemeinen Formel der Dynamik alles, was sich auf die wirkliche Bewegung zur Zeit t bezieht, Null setzen, im Falle die am System wirkenden Kräfte selbst sich Gleichgewicht halten; übrigens lässt sich auch der Beweis ganz auf dieselbe Weise führen, denn entspricht D einer virtuellen Lage des materiellen Punkts m, so dass AD mit AB in Bezug auf die Grösse gleichartig ist, so liefert das Dreieck BAD, wie zuvor BCD, die der (a) ähnliche Relation

$$(c)\quad \Sigma m.(\overline{BD}^2-\overline{BA}^2)=\Sigma m\,\overline{AD}^2-2\Sigma m\,\overline{BA}.\overline{AD}.\cos\varphi,$$

indem φ der Winkel zwischen der Richtung der freien Bewegung AB oder der der Kraft und zwischen dem virtuellen Weg AD, und mit

$$\Sigma m\overline{BA}.\overline{AD}.\cos\varphi=0$$

reducirt sich

$$\Sigma m\overline{BD}^2-\Sigma m\overline{BA}^2$$

auf die wesentlich positive Grösse

$$\Sigma m.\overline{AD}^2.$$

Auch hier ist alsdann, was bereits durch die Forderung angedeutet ist, dass AD der Grösse nach gleichartig mit AB sein soll, zu bemerken, dass, da, wenn wiederum p die an m wirksame beschleunigende Kraft ist und τ das unendlich kleine Zeitintervall, $AB=\frac{1}{2}p\tau^2$ ist, auch der virtuelle Weg AD ein Unendlichkleines zweiter Ordnung in Beziehung auf τ sein muss; was sich in der That auch dadurch rechtfertigt, dass die Grössen AD als die im Zeitintervall τ durchlaufenen Wege zu denken sind, wenn andere beschleunigende Kräfte q an die Stelle der in den Punkten A sich Gleichgewicht haltenden Kräfte p treten. Man vergl. übrigens §. 2. III. u. §. 3. I.

§. 2.

Wir prüfen nun das Princip des kleinsten Zwangs direct an einigen der einfachsten Beispiele, sowohl von Bewegung, als von Gleichgewicht.

1. Um für die Bewegung eines Systems den möglichst einfachen Fall zu nehmen, so wird dazu namentlich erfordert, dass sämmtliche Punkte A, B, C, D, E für jeden der materiellen Punkte in die nämliche Gerade fallen; wir nehmen daher zwei ungleiche Massen m, m' an den Enden eines um eine gewichtlose Rolle gehenden, gewichtlosen, absolut biegsamen und unausdehnbaren Fadens an und legen die Anordnung der Punkte $ABCDE$ für die Masse m und der entsprechenden $A'B'C'D'E'$ für die Masse m' nach (Taf. IV. Fig. 3.) zu Grunde: so sind nach der Natur des Systems alle Abstände der übrigen Punkte von E auf der einen, denen von E' auf der andern Seite gleich und haben entgegengesetzten Sinn, ausgenommen EB und $E'B'$, die beide dem Sinn der Schwere entsprechen. Nun ist hiernach:

$$\overline{BC} = \overline{EB} - \overline{EC}, \qquad \overline{B'C'} = \overline{EB} + \overline{EC},$$

$$\overline{BD} = \overline{EB} - \overline{EC} - \overline{CD}, \qquad \overline{B'D'} = \overline{EB} + \overline{EC} + \overline{CD},$$

$$\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 - 2.\overline{CD}.(\overline{EB} - \overline{EC}),$$

$$\overline{B'D'}^2 - \overline{B'C'}^2 = \overline{CD}^2 + 2.\overline{CD}.(\overline{EB} + \overline{EC}),$$

folglich die Grösse

$$\Sigma m.(\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2) = (m+m').\overline{CD}^2 + 2(m+m').\overline{CD}.\overline{EC} - 2(m-m')\overline{CD}.\overline{EB}$$

$$= (m+m')\left\{\overline{CD}^2 + 2.\overline{CD}.(\overline{EC} - \frac{m-m'}{m+m'}\cdot\overline{EB})\right\}.$$

Ist aber, wie gewöhnlich, g die Beschleunigung der Schwere und τ ein Zeitintervall, das in unserm Fall, mit allen vorhergehenden Linien, eine beliebige endliche Grösse haben darf, so ist

$$\overline{EB} = \tfrac{1}{2} g\tau^2, \quad \overline{EC} = \tfrac{1}{2}\frac{m-m'}{m+m'} g\tau^2,$$

mithin

$$\overline{EC} - \frac{m-m'}{m+m'}\cdot\overline{EB} = 0,$$

und folglich

$$\Sigma m.\overline{BD}^2 - \Sigma m.\overline{BC}^2 = (m+m')\,\overline{CD}^2 = \Sigma m.\overline{CD}^2 > 0,$$

was auch die willkührliche Linie CD sein mag, wofern sie nur in Richtung des Fadens genommen wird, und somit

Digitized by Google

$$m\overline{BC}^2 + m'\overline{B'C'}^2$$

ein Minimum.

Führt man die Werthe von EB, EC in den Ausdruck ein, welcher ein Minimum sein soll, so hat man, indem man $\frac{m-m'}{m+m'}$ $=\mu$ macht

$$\overline{BC}=\tfrac{1}{2}(1-\mu)g\tau^2, \quad \overline{B'C'}=\tfrac{1}{2}(1+\mu)g\tau^2,$$

folglich

$$\Sigma m.\overline{BC}^2=(m(1-\mu)^2+m'(1+\mu)^2)\frac{g^2\tau^4}{4},$$

und man geht hiervon offenbar zu $\Sigma m.\overline{BD}^2$ über, indem man für μg eine andere Beschleunigung $(\mu+\alpha)g$ substituirt, die ebenfalls dem Faden entlang wirkt, wo α eine willkührliche, positive oder negative, Grösse ist, woraus man

$$\Sigma m\cdot\overline{BD}^2-\Sigma m\overline{BC}^2=(m+m')\frac{\alpha^2g^2\tau^4}{4},$$

d. h. $\Sigma m.\overline{CD}^2$ erhält, indem eben $CD=\frac{1}{2}\alpha g\tau^2$. Hieraus erhellet aber auch, dass man, Behufs der Nachweisung des Minimum's durch Differenzialrechnung, in Beziehung auf μ zu differenziren hat, und da die zwei ersten Ableitungen obiger Grösse nach μ

$$(-m(1-\mu)+m'(1+\mu))\frac{g^2\tau^4}{4} \text{ und } (m+m')\frac{g^2\tau^4}{4}$$

sind, wovon die erste vermöge des Werths von μ identisch null, die zweite wesentlich positiv ist, so ist auch von dieser Seite das Minimum bestätigt.

Will man endlich das Princip dazu anwenden, die Beschleunigung an dem System erst zu finden, so seien z, z' die Abstände der Punkte A, A', zur Zeit t, vom horizontalen Durchmesser der Rolle, also, weil überhaupt die Bedingung des Systems $\Delta z'=-\Delta z$ ist, entsprechend dem Zeitintervall τ,

$$EC=-E'C'=\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{\tau^2}{2}+\ldots.,$$

folglich

$$BC=(g-\frac{d^2z}{dt^2})\frac{\tau^2}{2}-\ldots., \quad B'C'=(g+\frac{d^2z}{dt^2})\frac{\tau^2}{2}+\ldots.,$$

mithin die Grösse, die ein Minimum sein soll:

$$\left\{m(g-\frac{d^2z}{dt^2})^2+m'(g+\frac{d^2z}{dt^2})\right\}\frac{\tau^4}{4}+\ldots..$$

Ihre erste Ableitung nach der wirklichen Beschleunigung $\frac{d^2z}{dt^2}$ genommen, wie zuvor, giebt zunächst:

$$\left\{-m\left(g-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+m'\left(g+\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\}\frac{\tau^4}{4}+\ldots=0,$$

woraus, da diese Gleichung unabhängig von der Grösse des Zeitintervalls τ gelten muss:

$$-m\left(g-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+m'\left(g+\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0$$

folgt, mithin

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{m-m'}{m+m'}g.$$

Da sofort $\frac{d^3z}{dt^3}=0$, und desgleichen alle folgenden Zeitableitungen, so reduciren sich obige Ausdrücke auf ihre ersten Glieder und die zweite Ableitung $(m+m')\frac{\tau^4}{4}$ zeigt, als wesentlich positiv, ein Minimum an.

II. Das Princip findet übrigens auch seine Anwendung auf einen einzigen materiellen Punkt; auch hier ist $m.\overline{BC}^2$, mithin, abgesehen vom Zeichen, BC selbst ein Minimum. Diess erhellt bei der freien Bewegung von selbst, wo $BC=0$, bei der gezwungenen aber weist es sich allgemein auf eine sehr einfache Weise nach; bei der Bewegung eines Punkts auf einer schiefen Ebene unter dem Einfluss der Schwere z. B. ist, nach der unmittelbaren geometrischen Construction (Taf. IV. Fig. 4.) BC normal zur schiefen Ebene, mithin die kürzeste Linie von B nach derselben, und zwar für beliebige endliche Wege oder ein endliches Zeitintervall τ. Diess gilt aber offenbar von jeder Bewegung dieser Art, was auch die Fläche oder Curve sein mag, an welche die Bewegung des Punkts gebunden ist und was für Kräfte dabei im Spiel sein mögen, woferu im Allgemeinen das Zeitintervall unendlich klein genommen wird; denn die verlorne Kraft ist hier immer ein Normaldruck auf jene Curve oder Fläche, also BC normal, mithin die kürzeste Linie von B aus zu derselben, auf der ja auch die compatibeln Punkte D liegen müssen.

Um auch hier in dem einfachsten Beispiel dieser Art, wo nämlich der vorgeschriebene Weg geradlinig ist, die Differenzialgleichung des Minimums zur Auffindung der Beschleunigung anzuwenden, so seien x, y die Coordinaten des Punkts in Beziehung auf zwei rechtwinklige Axen, die der positiven y im Sinne der Schwere genommen, und s der auf der schiefen Ebene zur Zeit t durchlaufene Weg, also wenn α der Winkel der schiefen Ebene mit der Richtung der Schwere ist, $x=s\sin\alpha$, $y=s\cos\alpha$,

$$\overline{BC}^2=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\tau^2}{2}+\ldots\right)^2+\left(\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{\tau^2}{2}-\ldots\right)^2$$

$$=\left\{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\sin^2\alpha+(g-\frac{d^2s}{dt^2}\cos\alpha)^2\right\}\frac{\tau^4}{4}+\ldots..$$

woraus durch Differenziation nach $\frac{d^2s}{dt^2}$, weil die Ableitung unabhängig von τ verschwinden muss,

$$\frac{d^2s}{dt^2}\sin^2\alpha-(g-\frac{d^2s}{dt^2}\cos\alpha)\cos\alpha=0,$$

d. h.

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g\cos\alpha$$

folgt, und die zweite Ableitung reducirt sich, weil die höhern Ableitungen von s, mithin auch von x, y nach t verschwinden, auf die positive Grösse

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\frac{\tau^4}{4}.$$

III. Was nun das Gleichgewicht betrifft, für welches das Princip des kleinsten Zwangs $\Sigma m.\overline{AB}^2$ als Minimum, mithin

$$\Sigma m(\overline{BD}^2-\overline{AB}^2)>0$$

festsetzt, so hat man im ersten unserer Beispiele (Taf. IV. Fig. 3.), indem man, um die Figur nicht ändern zu müssen, E, E' anstatt A, A' als die Gleichgewichtsplätze betrachtet,

$$\overline{BE}=\overline{B'E'},\quad \overline{ED}=\overline{E'D'},$$

$$\overline{BD}=\overline{BE}-\overline{ED},\quad \overline{B'D'}=\overline{BE}+\overline{ED},$$

folglich

$$\Sigma m.(\overline{BD}^2-\overline{BE}^2)=m((\overline{BE}-\overline{ED})^2-\overline{BE}^2)+m'((\overline{BE}+\overline{ED})^2-\overline{BE}^2)$$

$$=(m+m').\overline{ED}^2-2(m-m').\overline{ED}.\overline{EB};$$

aber beim Gleichgewicht ist $m=m'$, folglich

$$\Sigma m.(\overline{BD}^2-\overline{BE}^2)=2m.\overline{ED}^2>0.$$

Zu einem zweiten Beispiel diene ein Hebel (Fig. IV. Taf. 5.), wo in den Lagen A, A' zwei Massen m, m' an den Armen a, a' sich Gleichgewicht halten, wofür die Bedingung $ma=m'a'$ ist. Nun ist wiederum $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, ferner, wenn θ der Drehungswinkel des Hebels aus der Lage AA' in die Lage DD' ist,

$$AD=2a\sin\tfrac{1}{2}\theta,\quad A'D'=2a'\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

Digitized by Google

mithin, da in den Dreiecken BAD, $B'A'D'$ die Winkel an A und A' resp. $\frac{1}{2}\theta$ und $180^\circ - \frac{1}{2}\theta$ sind,

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + 4a^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\theta - 2a.\overline{AB}.\sin\theta,$$

$$\overline{B'D'}^2 = \overline{AB}^2 + 4a'^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\theta + 2a'.\overline{AB}.\sin\theta;$$

folglich

$$\Sigma m(\overline{BD}^2 - \overline{BA}^2) = \Sigma m.\overline{AD}^2 - 2(ma - m'a').\overline{AB}.\sin\theta,$$

wo das zweite Glied zufolge der Gleichgewichtsbedingung verschwindet, das erste aber, indem man die Länge des ganzen Hebels mit l, das gemeinschaftliche Drehungsmoment mit μ bezeichnet,

$$\Sigma m.\overline{AD}^2 = 4(ma^2 + m'a'^2)\sin^2\tfrac{1}{2}\theta = 4\mu l \sin^2\tfrac{1}{2}\theta$$

wird, mithin

$$\Sigma m(\overline{BD}^2 - \overline{BA}^2) = 4\mu l \sin^2\tfrac{1}{2}\theta > 0.$$

In beiden Beispielen ist $AB = A'B' = \frac{1}{2}g\tau^2$, also die Minimumsgrösse

$$\Sigma m\overline{AB}^2 = (m + m')\frac{g^2\tau^4}{4},$$

wo sich zunächst nicht absehen lässt, wie und nach was sie differenzirt werden sollte, um auf diesem Wege, bei vorausgesetzter Gleichgewichtsbedingung, das Minimum zu constatiren, oder, bei vorausgesetztem Minimum, die Gleichgewichtsbedingung herzuleiten; allein da diese Differenziation dem Uebergang von BA zu BD entspricht, wobei sich bloss der Punkt A ändert, während B derselbe bleibt, so sind erst die Coordinaten des Punkts A einzuführen, um die Differenziation vollziehen zu können. Seien daher im ersten Beispiele z_0, z'_0 die vertikalen Ordinaten der Gleichgewichtsplätze E, E', und z, z' die der Punkte B, B', so ist

$$BE = z - z_0, \quad B'E' = z' - z'_0,$$

folglich

$$\Sigma m.\overline{BE}^2 = m(z - z_0)^2 + m'(z' - z'_0)^2,$$

und wenn man nach z_0 differenzirt, so sind die zwei ersten Ableitungen

$$-2m(z - z_0) - 2m'(z' - z'_0)\frac{dz'_0}{dz_0},$$

$$2m + 2m'\left(\frac{dz'_0}{dz_0}\right)^2 - 2m'(z' - z'_0)\frac{d^2z'_0}{dz_0^2};$$

aber vermöge der Bedingung des Systems ist $z_0 + z'_0 = \text{Const.}$, folglich

$$\frac{dz'_0}{dz_0}=-1\,,\quad \frac{d^2z'_0}{dz_0^2}=0,$$

wie alle folgenden; mithin reduzirt sich die erste, indem man nun $BE=B'E'=\frac{1}{2}g\tau^2$ berücksichtigt, auf $-(m-m')g\tau^2$, d. h. auf Null, wenn $m-m'=0$, alsdann die zweite auf die positive Grösse $4m$.

Bezieht man im zweiten Beispiel die Punkte A, A', B, B' auf zwei rechtwinklige Axen, der x und y, so dass der Ursprung im Umdrehungspunkt des Hebels liegt, und die Axe der positiven x mit dem Hebelarm a in der Gleichgewichtslage den Winkel α, also mit dem andern a' den Winkel $180^\circ+\alpha$ macht, gemäss der Bedingung des Systems: so ist, wenn x_0, y_0 und x, y die Coordinaten von m in den Lagen A, B, ebenso x'_0, y'_0 und x', y' die von m' in den Lagen A', B' sind, indem sowohl AB als $A'B'$ die Winkel $90^\circ+\alpha$ und α mit den Axen der positiven x und y machen,

$$\overline{AB}.\sin\alpha=-(x-x_0),\quad \overline{A'B'}.\sin\alpha=-(x'-x'_0);$$

$$\overline{AB}.\cos\alpha=y-y_0,\qquad \overline{A'B'}.\cos\alpha=y'-y'_0;$$

und

$$\Sigma m\overline{AB}^2=m((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)+m'((x'-x'_0)^2+(y'-y'_0)^2):$$

folglich hat man, wenn man in Beziehung auf α differenzirt, aber bloss die auf die Punkte A, A' sich beziehenden Coordinaten variiren lässt, in

$$-2m((x-x_0)\frac{dx_0}{d\alpha}+(y-y_0)\frac{dy_0}{d\alpha})-2m'((x'-x'_0)\frac{dx'_0}{d\alpha}+(y'-y'_0)\frac{dy'_0}{d\alpha}),$$

und

$$2m\left(\left(\frac{dx_0}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dy_0}{d\alpha}\right)^2\right)+2m'\left(\left(\frac{dx'_0}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dy'_0}{d\alpha}\right)^2\right)$$
$$-2m((x-x_0)\frac{d^2x_0}{d\alpha^2}+(y-y_0\frac{d^2y_0}{d\alpha^2})-2m'((x'-x'_0(\frac{d^2x'_0}{d\alpha^2}+(y'-y'_0)\frac{d^2y'_0}{d\alpha^2})$$

die beiden ersten Ableitungen. Nun ist

$$x_0=a\cos\alpha,\quad \frac{dx_0}{d\alpha}=-a\sin\alpha,\quad \frac{d^2x_0}{d\alpha^2}=-a\cos\alpha;$$

$$y_0=a\sin\alpha,\quad \frac{dy_0}{d\alpha}=\ a\cos\alpha,\quad \frac{d^2y_0}{d\alpha^2}=-a\sin\alpha;$$

$$x'_0=-a'\cos\alpha,\quad \frac{dx'_0}{d\alpha}=a'\sin\alpha,\quad \frac{d^2x'_0}{d\alpha^2}=a'\cos\alpha;$$

$$y'_0=-a'\sin\alpha,\quad \frac{dy'_0}{d\alpha}=-a'\cos\alpha,\quad \frac{d^2y'_0}{d\alpha^2}=a'\sin\alpha;$$

wodurch die vorhergehenden Ausdrücke werden

$$-2ma((y-y_0)\cos\alpha-(x-x_0)\sin\alpha)+2m'a'((y'-y'_0)\cos\alpha-(x'-x'_0)\sin\alpha),$$

und

$$2(ma^2+m'a'^2)+2ma((y-y_0)\sin\alpha+(x-x_0)\cos\alpha)$$
$$-2m'a'((y'-y'_0)\sin\alpha+(x'-x'_0)\cos\alpha);$$

aber

$$(y-y_0)\cos\alpha-(x-x_0)\sin\alpha=AB,$$
$$(y'-y'_0)\cos\alpha-(x'-x'_0)\sin\alpha=A'B';$$
$$(y-y_0)\sin\alpha+(x-x_0)\cos\alpha=AB\sin 2\alpha,$$
$$(y'-y'_0)\sin\alpha+(x'-x'_0)\cos\alpha=A'B'\sin 2\alpha;$$

mithin, wenn man nunmehr, nach vollzogener Differenziation, auf $AB=A'B'=\frac{1}{4}g\tau^2$ Rücksicht nimmt, so reducirt sich die erste Ableitung auf $-(ma-m'a')g\tau^2$, mithin auf Null, wenn $ma-m'a'=0$, die zweite auf

$$2(ma^2+m'a'^2)+(ma-m'a')g\tau^2\sin 2\alpha,$$

mithin unter derselben Bedingung auf die positive Grösse $2\mu l$, indem wiederum $ma=m'a'=\mu, a+a'=l$ gesetzt wird.

Auch in diesem Beispiel des Hebels durften die Räume AB, AD oder das Zeitintervall τ in beliebiger endlicher Grösse vorausgesetzt werden, wie in den vorhergehenden Fällen der Rolle und der schiefen Ebene; übrigens findet zwischen diesem und jenen der Unterschied statt, dass, während dort bei der Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, die auf die Richtung der Kräfte zu projicirenden Wege, welche die Punkte des Systems bei einer Verrückung desselben aus der Gleichgewichtslage durchlaufen, endlich sein dürfen, diess beim Hebel nicht gilt, wohl aber gehört dieser zu den Fällen, wo statt ihrer Projectionen die virtuellen Wege selbst, und diese dann in endlicher Grösse, genommen werden dürfen.

§. 3.

Da, den Bemerkungen in §. 1. III. zufolge, um das Gaussische Princip aus dem Dalembertischen in gehöriger Allgemeinheit herzuleiten, das von letzterem festgesetzte Gleichgewicht der verlornen Kräfte auf die allgemeinste Art, d. h. mittelst des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten in Anwendung zu bringen ist, so soll nun gezeigt werden, wie der allgemeine analytische Ausdruck des Gaussischen Satzes durch die allgemeine Formel der Dynamik sich bestätigt, welche das Verschwinden der Summe der virtuellen Momente sämmtlicher verlorner Kräfte aussagt. Sie bedarf übrigens zuvor einiger Erörterungen, die wir in diesem Paragraphen vornehmen.

I. Bekanntlich wird sie, indem man alle Punkte des Systems auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezieht, und alle an den-

selben wirkenden Kräfte auf ihre Axenprojectionen zurückführt, so dargestellt:

$$\Sigma m \left\{ (X - \frac{d^2 x}{dt^2}) \delta x + (Y - \frac{d^2 y}{dt^2}) \delta y + (Z - \frac{d^2 z}{dt^2}) \delta z \right\} = 0,$$

wofür wir

$$(1)\ \Sigma m [(X - \frac{d^2 x}{dt^2}) \delta x] = 0$$

schreiben, indem wir sofort überhaupt zur Abkürzung jeden aus drei Gliedern bestehenden Ausdruck, welche der Reihe nach den drei Coordinaten, oder auch ihren drei Paaren, entsprechen, durch ein einziges dieser Glieder vorstellen, das wir in eckige Klammern einschliessen. In dieser Formel sind für die Zeit t und irgend einen der materiellen Punkte, dessen Masse m ist, x, y, z seine Coordinaten, also $\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}$ seine wirklichen dem Systemverbande entsprechenden Beschleunigungen nach den drei Axen, X, Y, Z die Axenprojectionen der an ihm unabhängig vom Systemverbande wirkenden beschleunigenden Kräfte, also $X - \frac{d^2 x}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2 y}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2 z}{dt^2}$ seine verlornen Kräfte, endlich δx, δy, δz seine sogenannten virtuellen Geschwindigkeiten, projicirt auf die drei Axen, und ebendamit auf die Richtungen der Kräfte, die sich Gleichgewicht halten sollen. Es handelt sich nun zunächst um die genauere Feststellung der Bedeutung dieser Grössen im Geiste der Functionsrechnung, da sie gewöhnlich im Sinne der Infinitesimalmethode als Unendlichkleine betrachtet werden. Gehen wir zu dem Behuf auf die Aussage des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten zurück, so verlangt dasselbe dem System eine, im Allgemeinen unendlichkleine, seiner Natur compatible, Verrückung aus der Gleichgewichtslage zu ertheilen, die Wege, welche dabei die einzelnen Punkte des Systems durchlaufen, auf die Richtungen der Kräfte, welche an ihnen sich Gleichgewicht halten sollen, oder beide auf eine gemeinschaftliche Richtung zu projiciren, alsdann soll die Summe der Producte aus diesen beiderlei Projectionen und den Massen, d. h. die Summe der virtuellen Momente, verschwinden. Die Axenprojectionen der unendlich kleinen Wege oder die der Verrückung entsprechenden unendlich kleinen Variationen der Coordinaten werden nun gewöhnlich mit δx u. s. w. bezeichnet und als die virtuellen Geschwindigkeiten betrachtet; wir müssen aber virtuelle Wege und virtuelle Geschwindigkeit unterscheiden, und, wenn desshalb Dx einen, zunächst endlichen oder unendlichkleinen, Zuwachs von x (da es auch Fälle giebt, wo die virtuellen Wege endlich sein dürfen) bezeichnet, als nächsten Ausdruck der obigen Aussage des Princips aufstellen:

$$(2)\ \Sigma m [(X - \frac{d^2 x}{dt^2}) Dx] = 0,$$

wo nun Dx eine Grösse ist nach Art von Δx, nur dass Δx der wirklichen Bewegung des sich selbst überlassenen Systems wäh-

rend des Zeitintervalls Δt entspricht, Dx aber einer willkührlichen, nur compatibeln Verrückung, einer virtuellen Bewegung. Man verwandelt aber

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots.$$

in Dx, wenn man an die Stelle der durch die wirkliche Bewegung bestimmten Zeitableitungen $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$, u. s. w. willkührliche Functionen der Zeit setzt, nur mit der Einschränkung, dass sie an die Bedingungsgleichungen des Systems gebunden sind, so dass also, wenn man diese willkührlichen Grössen nach dem Gebrauche der Variationsrechnung mit δx, $\delta^2 x$ u. s. w. bezeichnet,

$$Dx = \delta x . \Delta t + \delta^2 x . \frac{\Delta t^2}{2} + \ldots..$$

gesetzt werden kann, wo Δt bloss als ganz willkührliche Fortschreitungsgrösse dient, die nach Umständen endlich oder unendlich klein zu nehmen ist, und so den Grössenrang von Dx bestimmt. Diess ist dem Geiste der Variationsrechnung ganz gemäss, wonach man von einer gegebenen Function $x = ft$ von t zu der variirten übergeht, indem man, wenn ε eine neue, absolut independente Variable ist, und φ eine willkührliche Function, $x + Dx = \varphi(t, \varepsilon)$ setzt, wobei nur $\varphi(t, 0) = ft$ sein muss und worans, durch Entwicklung nach ε,

$$x + Dx = \varphi_0 + \left(\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right)_0 \varepsilon + \left(\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}\right)_0 \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots. = x + \varepsilon\delta x + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 x + \ldots;$$

hier aber kann man ε mit Δt vertauschen, da ε nichts anders sein soll als eine völlig unabhängige, jedes Grades von Kleinheit fähige, Grösse, ebenso wie das Zeitincrement Δt es ist: so dass man, während $x + \Delta x = f(t + \Delta t)$ ist, $x + Dx = \varphi(t, \Delta t)$ hat, und man kann beifügen, dass, wie diese variirte Function immer der Bedingung $x = \varphi(t, 0)$ zu unterwerfen ist, nach Umständen auch die weiteren Bedingungen $\frac{dx}{dt} = \delta x, \frac{d^2x}{dt^2} = \delta^2 x$, u. s. w. gemacht werden können, bis zu einem beliebigen Gliede, bis zu welchem Δx und Dx übereinstimmen sollen.

Entwickelt man aber vermöge des aufgestellten Werthes von Dx die Formel (2) nach Δt, so erhält man, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors Δt,

$$\Sigma m\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x\right] + \tfrac{1}{2}\Delta t \Sigma m\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta^2 x\right] + \ldots. = 0.$$

und nun sind die beiden Fälle zu unterscheiden, wo die Verrückung des Systems unendlich klein sein **muss** und wo sie endlich sein **darf**. Im ersten ist Δt unendlichklein zu nehmen und die vorhergehende Gleichung reducirt sich auf ihr erstes Glied, d. h. auf die Gleichung (1); im zweiten, wo Δt nur den Grad von Kleinheit

haben muss, dass die Reihe convergent sei, zerfällt sie, weil sie unabhängig von dieser willkührlichen Grösse bestehen muss, in eine unendliche Menge von Gleichungen, wovon (1) die erste ist und welche die allgemeine Form haben

$$(3) \quad \Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta^n x\right]=0,$$

wo n jede ganze positive Zahl von der Einheit an sein kann; und die Uebereinstimmung dieser sämmtlichen Gleichungen wird eben das analytische Zeichen davon sein, dass bei einem System, wo diess statt findet, die virtuellen Wege eine endliche Grösse haben dürfen.

II. Die besonderen Gleichungen der Bewegung des Systems, in welche die Formel (1) zerfällt, lassen sich entweder dadurch darstellen, dass man sämmtliche Bedingungsgleichungen des Systems mit unbestimmten Factoren in die Formel (1) einführt und sofort sämmtliche Coordinaten als eben so viele independente behandelt; oder dass man die Coordinaten auf die kleinste Anzahl independenter Variabeln zurückgeführt voraussetzt, mittelst jener Bedingungsgleichungen, wo es nöthig ist, auch nach Umständen unter Zuziehung der Formeln der Coordinatentransformation. Seien im ersten Fall $L=0$, $L'=0$ u. s. w. jene Bedingungsgleichungen, d. h. Relationen zwischen den Coordinaten der einzelnen Punkte des Systems, an welche dieselben während der ganzen Bewegung gebunden sind, so dass $\frac{dL}{dt}=0$ u. s. w. und eben so $\delta L=0$ u. s. w., und welche im Allgemeinen entweder bloss mittelbar, implicit, oder auch explicit die Zeit enthalten können, so dass, mit Ausschliessung des letztern Falls, die Gleichungen $\frac{dL}{dt}=0, \delta L=0$ soviel sind als

$$\left[\frac{dL}{dx_1}\frac{dx_1}{dt}\right]+\left[\frac{dL}{dx_2}\frac{dx_2}{dt}\right]+\ldots=0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\left[\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt}\right]=0,$$

und

$$\left[\frac{dL}{dx_1}\delta x_1\right]+\left[\frac{dL}{dx_2}\delta x_2\right]+\ldots=0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\left[\frac{dL}{dx}\delta x\right]=0$$

Alsdann zerfällt, wenn λ, λ', λ''.... die sogenannten Eliminationsfactoren sind, die Gleichung

$$(4) \quad \Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x\right]+\lambda\delta L+\lambda'\delta L'+\ldots=0,$$

die nun an die Stelle von (1) tritt, in ebensoviel mal, als Punkte m vorhanden sind, drei Gleichungen von der Form

$$(5)\quad \begin{cases} m\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\lambda\frac{dL}{dx}+\lambda'\frac{dL'}{dx}+\ldots\ldots=0, \\ m\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\lambda\frac{dL}{dy}+\lambda'\frac{dL'}{dy}+\ldots\ldots=0, \\ m\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\lambda\frac{dL}{dz}+\lambda'\frac{dL'}{dz}+\ldots\ldots=0; \end{cases}$$

und die Bewegungsgleichungen des Systems sind das Resultat der Elimination sämmtlicher Grössen λ zwischen diesen Systemen von der Form (5).

Es seien im zweiten Falle ω, ψ, χ u. s. w. die letzten geometrischen independenten Variabeln, oder eben so viele von einander unabhängige Functionen der Zeit, worauf sich zuletzt, nach Berücksichtigung aller Bedingungen des Systems, die Coordinaten seiner Punkte zurückführen lassen. Diese Coordinaten sind alsdann wiederum im Allgemeinen entweder rein geometrische Functionen jener independenten, oder durch Relationen damit verknüpft, worin überdiess die Zeit explicit vorkommt, so dass man, mit Ausschliessung des letztern Falls, hat $x=f(\omega,\psi,\chi\ldots.)$ und folglich

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\omega}\frac{d\omega}{dt}+\frac{dx}{d\psi}\frac{d\psi}{dt}+\ldots.,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{d\omega}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{d^2x}{d\omega^2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+2\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\frac{d\omega}{dt}\frac{d\psi}{dt}+\frac{dx}{d\psi}\frac{d^2\psi}{dt^2}+\frac{d^2x}{d\psi^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\ldots.$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{dx}{d\omega}\frac{d^3\omega}{dt^3}+\frac{d^3x}{d\omega^3}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3+3\frac{d^2x}{d\omega^2}\frac{d\omega}{dt}\frac{d^2\omega}{dt^2}$$

$$+3\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\left(\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{d\omega}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)+3\frac{d^3x}{d\omega^2 d\psi}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\frac{d\psi}{dt}+3\frac{d^3x}{d\omega d\psi^2}\frac{d\omega}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

$$+\frac{dx}{d\psi}\frac{d^3\psi}{dt^3}+\frac{d^3x}{d\psi^3}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^3+3\frac{d^2x}{d\psi^2}\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2}+\ldots.,$$

u. s. w., ebenso

$$\delta x=\frac{dx}{d\omega}\delta\omega+\frac{dx}{d\psi}\delta\psi+\ldots.,$$

$$\delta^2x=\frac{dx}{d\omega}\delta^2\omega+\frac{d^2x}{d\omega^2}\delta\omega^2+2\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\delta\omega\delta\psi+\frac{dx}{d\psi}\delta^2\psi+\frac{d^2x}{d\psi^2}\delta\psi^2+\ldots.,$$

u. s. w., ferner

$$\Delta x=\frac{dx}{d\omega}\Delta\omega+\frac{dx}{d\psi}\Delta\psi+\ldots+\frac{d^2x}{d\omega^2}\frac{\Delta\omega^2}{2}+\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\Delta\omega\Delta\psi+\frac{d^2x}{d\psi^2}\frac{\Delta\psi^2}{2}+\ldots.,$$

$$Dx=\frac{dx}{d\omega}D\omega+\frac{dx}{d\psi}D\psi+\ldots+\frac{d^2x}{d\omega^2}\frac{D\omega^2}{2}+\frac{d^2x}{d\omega d\psi}D\omega D\psi+\frac{d^2x}{d\psi^2}\frac{D\psi^2}{2}+\ldots.,$$

wobei

$$\Delta\omega = \frac{d\omega}{dt}\Delta t + \ldots\ldots, \quad D\omega = \delta\omega\,\Delta t + \ldots\ldots, \text{ u. s. w.}$$

Wie nun in den Bedingungsgleichungen $L=0$ bald die Coordinaten sämmtlicher Punkte, bald die einiger, bald selbst bloss die eines einzigen vorkommen können, so können in den Relationen $x=f(\omega,\psi..)$ bald alle, bald einige, bald sämmtliche independente vorkommen; wenn ferner eine solche independente ω mehreren Punkten des Systems gemeinschaftlich zukommen soll, so heisst das zunächst, dass für alle diese Punkte von jedem beliebigen Zeitpunkt t aus, ihre Aenderung $\Delta\omega$ oder $D\omega$ den nämlichen Werth habe, während der dem Zeitpunkt t entsprechende Werth die Form $\alpha+\omega$ hat, wo α eine Constante ist, die für die verschiedenen von ω abhängenden Punkte des Systems verschiedene, durch den Systemverband gegebene, Werthe hat; man kann aber, theils um die Veriable ω vor der Hand ohne Unterschied auf alle Punkte des Systems zu beziehen, theils um insbesondere auch den Fall mitzubegreifen, wo, wenn z. B. ω ein Winkel ist, je nach der Zählung desselben, $\Delta\omega$ für die einen Punkte positiv, für die andern negativ ausfallen würde, noch allgemeiner festsetzen, dass für irgend einen Punkt des Systems der Werth von ω zur Zeit t die Form $\alpha+a\omega$ habe, wo a eine ähnliche Constante wie α, beide namentlich auch des Nullwerths fähig: so dass die Relation zwischen einer Coordinate x und den independenten allgemein durch

$$x=f(\alpha+a\omega,\ \beta+b\psi,\ldots\ldots)$$

vorzustellen ist, anstatt durch $x=f(\omega,\psi,\ldots\ldots)$. Da nun die Variationen $\delta\omega$, $\delta^2\omega\ldots\ldots$ einer geometrischen independenten ω als völlig willkührliche, von einander durchaus unabhängige Functionen der Zeit zu betrachten sind, so zerfallt die Gleichung (1) durch Einführung des Werths von δx in eben so viele Gleichungen

$$(6)\quad \Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{dx}{d\omega}]=0, \qquad \Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{dx}{d\psi}]=0, \text{ u. s. w.}$$

als independente Variabeln ω, $\psi\ldots\ldots$ vorhanden sind; Gleichungen, die sämmtlich von der zweiten Ordnung hinsichtlich der Zeitableitungen der independenten sind, vermöge des Werths von $\frac{d^2x}{dt^2}$, und daher zur Bestimmung der Bewegung des Systems hinreichen.

III. Von den beiden Formen (5. u. 6.), die man den Bewegungsgleichungen eines Systems geben kann, ist für unsern nächsten Zweck die letztere geeigneter. Eben so wie diese aus (1) hervorgegangen sind, zerfallt nämlich die Formel (3) durch Einführung der independenten, in Gleichungen, deren allgemeine Form

$$(7)\quad \Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d^nx}{d\omega^{n'}d\omega^{n''}\ldots}]=0,$$

wo $n', n''\ldots$ ebenfalls ganze positive Zahlen sind, aber aller Werthe von Null an fähig und an die Bedingung $n'+n''+\ldots\ldots=n$ gebun-

den. Da nun aber die Gleichungen (6) die Bewegung bereits vollständig bestimmen, so müssen sämmtliche in der Formel (7), ausser jenen, enthaltenen Gleichungen mit denselben identisch werden, was somit erfordert, dass alle höhere Ableitungen der Coordinaten nach $\omega, \psi \ldots$ verschwinden oder die ersten reproduciren, d. h. im Allgemeinen, dass die Coordinaten entweder lineäre Functionen der independenten,

$$\varDelta = A + a\omega + b\psi + c\chi + \ldots\ldots,$$

oder Exponentialfunctionen von der Form

$$\varDelta = Kk^{\alpha\omega + \beta\psi + \gamma\chi + \ldots\ldots}$$

mit der beliebigen Basis k seien, wo $K, A, a, b, c \ldots.$ Constanten hinsichtlich der Zeit sind, die von einem Punkt des Systems zum andern variiren, $\alpha, \beta, \ldots$ aber Constanten, die, wie k, unabhängig vom Systemverbande sind. Diess wären also die analytischen Bedingungen dafür, dass die virtuellen Räume endlich sein dürfen; man erhält aber diessfalls noch mehr coexistirende Gleichungen durch successive Differenziation von (7) nach t; eine erste giebt

$$\Sigma m \left\{ \begin{array}{l} (X - \frac{d^2x}{dt^2})(\frac{d^{n+1}x}{d\omega^{n'+1}d\psi^{n''}\ldots}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d^{n+1}x}{d\omega^{n'}d\psi^{n''+1}\ldots}\frac{d\psi}{dt} + \ldots.) \\ + \frac{d}{dt}(X - \frac{d^2x}{dt^2}) \cdot \frac{d^nx}{d\omega^{n'}d\psi^{n''}\ldots.} \end{array} \right\} = 0,$$

woraus, da der erste Bestandtheil dieses Ausdrucks vermöge (7) für sich verschwindet, indem die Ausdrücke $\frac{d\omega}{dt}, \frac{d\psi}{dt} \ldots.$ vor das Summenzeichen treten,

$$(8) \quad \Sigma m \left[\frac{d}{dt}(X - \frac{d^2x}{dt^2}) \cdot \frac{d^nx}{d\omega^{n'}d\psi^{n''}\ldots.}\right] = 0;$$

eine zweite, d. h. die Differenziation des letztern Ausdrucks führt ebenso zu

$$\Sigma m \left[\frac{d^2}{dt^2}(X - \frac{d^2x}{dt^2}) \cdot \frac{d^nx}{d\omega^{n'}d\psi^{n''}\ldots.}\right] = 0,$$

und so fortfahrend gelangt man zu der allgemeinen Formel

$$(9) \quad \Sigma m \left[\frac{d^i}{dt^i}(X - \frac{d^2x}{dt^2}) \cdot \frac{d^nx}{d\omega^{n'}d\psi^{n''}\ldots.}\right] = 0,$$

worin die vorhergehenden nebst (7) für die Werthe $i = 0, = 1, = 2$ enthalten sind, und wo i aller ganzen positiven Werthe von Null an fähig ist. Wenn die virtuellen Wege nicht endlich sein dürfen, also (7) nicht gilt, so gelten zwar die vollständigen Zeitableitungen der Gleichungen (6), zerfallen aber nicht in Gleichungen von der Form (8) und (9).

Wir ziehen hieraus noch schliesslich folgende Resultate.

1) Addirt man die Gleichungen (6) nach resp. Multiplication mit $\frac{d\omega}{dt}, \frac{d\psi}{dt} \ldots$, so erhält man, da wir uns auf den Fall beschränkt haben, dass x bloss mittelst der independenten $\omega, \psi \ldots$ von t abhängt, in

$$(10) \quad \Sigma m\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{dt}\right] = 0,$$

die der Form nach mit (6) und (1) ganz analoge Gleichung, deren Integral bekanntlich das Princip der lebendigen Kräfte enthält. Man erhält sie gleicherweise durch Vertauschung der Variationen oder virtuellen Geschwindigkeiten δx in (1) mit den Zeitableitungen oder wirklichen Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$; wir können auch sagen, durch Vertauschung des virtuellen Wegs Dx in (2) mit dem wirklichen Weg Δx, welche Vertauschungen gestattet sind, so wie die Relationen zwischen den Coordinaten und independenten oder die Bedingungsgleichungen des Systems die Zeit nicht explicit enthalten, wie sich Lagrange in der analytischen Mechanik ausdrückt. In den Fällen nun, wo Dx endlich sein darf, muss dasselbe auch von Δx gelten, und man hat alsdann als Folge von

$$(11) \quad \Sigma m\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\Delta x\right] = 0$$

neben (10) eine Reihe Gleichungen von der allgemeinen Form

$$(12) \quad \Sigma m\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{d^nx}{dt^n}\right] = 0,$$

welche sich in der That, wenn man den Ausdruck von $\frac{d^nx}{dt^n}$ durch die independenten einführt, mittelst (7) rechtfertigt.

2) Da in dem Zeitintervall Δt die Grössen X und x die Incremente ΔX, Δx erhalten, so wird aus der Formel (1)

$$(13) \quad \Sigma m\left[\left(X + \Delta X - \frac{d^2(x+\Delta x)}{dt^2}\right)\delta(x+\Delta x)\right] = 0,$$

(wo man auch D für δ schreiben kann, analog der Formel (3)). d.h. die Gleichgewichtsformel der verlornen Kräfte zur Zeit $t + \Delta t$, und da

$$\Delta X = \frac{dX}{dt}\Delta t + \frac{d^2X}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,$$

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,$$

folglich

$$\frac{d^2\Delta x}{dt^2}=\Delta\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^3x}{dt^3}\Delta t+\frac{d^4x}{dt^4}\frac{\Delta t^2}{2}+\ldots,$$

$$\Delta\delta x=\Delta\delta x=\frac{d\delta x}{dt}\Delta t+\frac{d^2\delta x}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2}+\ldots,$$

$$X+\Delta X-\frac{d^2(x+\Delta x)}{dt^2}=X-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d}{dt}(X-\frac{d^2x}{dt^2})\Delta t+\ldots,$$

so bildet der erste Theil von (13) eine Entwickelung nach Δt, deren einzelne Glieder wegen der willkührlichen Grösse des Zeitintervalls verschwinden müssen, wodurch man eine Folge von Gleichungen erhält:

$$\Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d\delta x}{dt}+\frac{d}{dt}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\delta x]=0,$$

$$\Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d^2\delta x}{dt^2}+2\frac{d}{dt}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\frac{d\delta x}{dt}+\frac{d^2}{dt^2}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\delta x]=0,$$

u. s. w.

die, wie natürlich, nichts anders sind als die vollständigen Ableitungsgleichungen von (1) nach t. Aber in dem Fall, wo die Gleichung (7) und folglich (9) gilt, zerfallen sie wiederum in Gleichungen von der allgemeinen Form

$$(14)\quad \Sigma m\left[\frac{d^i}{dt^i}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\frac{d^{i'}\delta x}{dt^{i'}}\right]=0,$$

wo i und i' positive ganze Zahlen sind, aller Werthe von Null an fähig, so dass für $i+i'=0$ die Gleichung (1) darin enthalten ist, für $i+i'=1$ die beiden

$$\Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d\delta x}{dt}]=0,\quad \Sigma m[\frac{d}{dt}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\delta x]=0,$$

die man in der That unmittelbar mittelst (9) rechtfertigt, indem man den Werth von δx und von $\frac{d\delta x}{dt}$ d. h.

$$\frac{d\delta x}{dt}=\frac{dx}{d\omega}\frac{d\delta\omega}{dt}+(\frac{d^2x}{d\omega^2}\frac{d\omega}{dt}+\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\frac{d\psi}{dt}+\ldots)\delta\omega+\ldots$$

einführt. Endlich, da dann auch die in (4) enthaltenen Gleichungen bestehen, so folgt daraus ebenso, wie (14) aus (1),

$$(15)\quad \Sigma m\left[\frac{d^i}{dt^i}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\frac{d^{i'}\delta_n x}{dt^{i'}}\right]=0,$$

die sich ebenso wie (14) durch (9) rechtfertigt.

§. 4.

Nun lässt sich zeigen, dass das Princip des kleinsten Zwangs zu denselben Gleichungen führt, wie die Gleichgewichtsformel der Zwangskräfte, nnd zwar in der Art, dass in den Fällen, wo das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bei endlichen Verrükkungen des Systems gilt, auch unser Princip für ein endliches Zeitintervall statt findet, während im Allgemeinen, d. h. wenn dort die virtuellen Wege unendlich klein sein müssen, auch hier das Zeitintervall, für welches die freien Bewegungen der Punkte des Systems mit den wirklichen verglichen werden, unendlich klein zu nehmen ist.

I. Es seien für irgend einen der materiellen Punkte m des Systems seine rechtwinkligen Coordinaten in der der Zeit t ent sprechenden Lage A (um die Benennungen aus § 1. beizubehalten) x, y, z, und in den beiden der Zeit $t+\Delta t$ entsprechenden Lagen, in C $x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z$, in B $x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta$, wo also $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ und ebenso $\xi,\ \eta,\ \zeta$ Functionen von Δt sind. Setzt man daher

$$BC=u\text{, und } \Sigma mu^2=U,$$

so ist

$$u^2=(\xi-\Delta x)^2+(\eta-\Delta y)^2+(\zeta-\Delta z)^2,$$

und die Grösse U, die ein Minimum sein soll:

$$(a)\quad U=\Sigma m[(\xi-\Delta x)^2].$$

Um nun U nach Δt zu entwickeln, so ist als Function von Δt

$$\xi=\xi_0+\left(\frac{d\xi}{d\Delta t}\right)_0\Delta t+\left(\frac{d^2\xi}{d\Delta t^2}\right)_0\frac{\Delta t^2}{2}+\left(\frac{d^3\xi}{d\Delta t^3}\right)_0\frac{\Delta t^3}{2.3}+\ldots,$$

aber für $\Delta t=0$, oder für die Zeit t hat man

$$\xi_0=0,\quad \left(\frac{d\xi}{d\Delta t}\right)_0=\frac{dx}{dt},\quad \left(\frac{d^2\xi}{d\Delta t^2}\right)_0=X,$$

indem, wie in §. 3., X, Y, Z die Axencomposanten der zur Zeit t auf den materiellen Punkt m unabhängig vom Systemverbande wirkenden beschleunigenden Kräfte sind; es ist ferner zu Ende des Zeitintervalls Δt

$$\frac{d^2\xi}{d\Delta t^2}=X+\Delta X=X+\frac{dX}{dt}\Delta t+\frac{d^2X}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2}+\ldots,$$

aber auch vermöge des vorhergehenden Ausdrucks von ξ

$$\frac{d^2\xi}{d\Delta t^2}=\left(\frac{d^2\xi}{d\Delta t^2}\right)_0+\left(\frac{d^3\xi}{d\Delta t^3}\right)_0\Delta t+\left(\frac{d^4\xi}{d\Delta t^4}\right)_0\frac{\Delta t^2}{2}+\ldots,$$

folglich durch Vergleichung dieser beiden identischen Entwickelungen:

$$\left(\frac{d^3\xi}{d\varDelta t^3}\right)_0=\frac{dX}{dt},\quad \left(\frac{d^4\xi}{d\varDelta t^4}\right)_0=\frac{d^2X}{dt^2},\text{ u. s. w.}$$

Man hat mithin

$$\xi=\frac{dx}{dt}\varDelta t+X\frac{\varDelta t^2}{2}+\frac{dX}{dt}\frac{\varDelta t^3}{2.3}+\ldots,$$

und

$$\varDelta x=\frac{dx}{dt}\varDelta t+\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\varDelta t^2}{2}+\frac{d^3x}{dt^3}\frac{\varDelta t^3}{2.3}+\ldots,$$

folglich

$$\xi-\varDelta x=\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{\varDelta t^2}{2}+\frac{d}{dt}\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right).\frac{\varDelta t^3}{2.3}+\ldots,$$

also

$$(b)\quad U=\frac{\varDelta t^4}{4}\Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\varDelta t}{3}\frac{d}{dt}\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\ldots\right)^2\right].$$

Auch ist vermöge der Entwickelungen in §. 3. III.

$$\frac{d^2(\xi-\varDelta x)}{d\varDelta t^2}=X+\varDelta X-\frac{d^2(x+\varDelta x)}{dt^2},$$

mithin kann die dortige Formel (13), indem man zugleich die virtuellen Räume statt der virtuellen Geschwindigkeiten setzt, so dargestellt werden:

$$(16)\quad \Sigma m\left[\frac{d^2(\xi-\varDelta x)}{d\varDelta t^2}.\,D(x+\varDelta x)\right]=0.$$

II. Um nun direct, nach Analogie des Gaussischen Beweises, zu zeigen, dass U kleiner ist, als wenn willkührlich von A aus, statt des wirklichen Orts C zur Zeit $t+\varDelta t$, ein compatibler Punkt D, d. h. ein anderer Punkt der Trajectorie von m, genommen wird, so seien $x+Dx$, $y+Dy$, $z+Dz$ die Coordinaten von m in der Lage D, wo Dx, Dy, Dz willkührliche, aber dem Zustande des Systems zur Zeit t compatible Aenderungen der Coordinaten sind, um von A zu D überzugehen, also Grössen nach Art der in §. 3. auf diese Weise bezeichneten virtuellen Wege,

$$Dx=\delta x.\varDelta t+\delta^2x.\frac{\varDelta t^2}{2}+\ldots,$$

doch mit dem Unterschied, dass, gemäss den Erörterungen in Betreff des Gaussischen Beweises in §. 1., die zur Zeit t erlangten

Digitized by Google

Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ ebenso in Dx, wie in $\varDelta x$ und ξ stecken, d. h. dass $\delta x = \frac{dx}{dt}$ und desgleichen $\delta\omega = \frac{d\omega}{dt}$ u. s. w. zu nehmen ist. Alsdann ist aber

$$Dx - \varDelta x = (\delta^2 x - \frac{d^2x}{dt^2})\frac{\varDelta t^2}{2} + (\delta^3 x - \frac{d^3x}{dt^3})\frac{\varDelta t^3}{2.3} + \ldots,$$

und gemäss den Ausdrücken von $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\delta^3 x$, u. s. w. mittelst der independenten, indem man darin $\delta\omega = \frac{d\omega}{dt}$, $\delta\psi = \frac{d\psi}{dt}$, u. s. w. macht:

$$\delta^2 x - \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{d\omega}(\delta^2\omega - \frac{d^2\omega}{dt^2}) + \frac{dx}{d\psi}(\delta^2\psi - \frac{d^2\psi}{dt^2}) + \ldots,$$

$$\delta^3 x - \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dx}{d\omega}(\delta^3\omega - \frac{d^3\omega}{dt^3}) + \frac{dx}{d\psi}(\delta^3\psi - \frac{d^3\psi}{dt^3}) + \ldots$$
$$+ 3(\frac{d^2x}{d\omega^2}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d^2x}{d\omega d\psi}\frac{d\psi}{dt} + \ldots)(\delta^2\omega - \frac{d^2\omega}{dt^2}) + \ldots,$$

u. s. w.

Nun sei

$$BD = u', \quad \Sigma m u'^2 = U',$$

so ist zu beweisen, dass

$$U' - U = \Sigma m(u'^2 - u^2) > 0.$$

Aber

$$u'^2 = (\xi - Dx)^2 + (\eta - Dy)^2 + (\zeta - Dz)^2$$
$$= [(\xi - \varDelta x - (Dx - \varDelta x))^2]$$
$$= u^2 + [(Dx - \varDelta x)^2] - 2[(\xi - \varDelta x)(Dx - \varDelta x)],$$

folglich

$$(c) \quad U' - U = \Sigma m[(Dx - \varDelta x)^2] - 2\Sigma m[(\xi - \varDelta x)(Dx - \varDelta x)];$$

und es ist $U' - U > 0$, mithin U ein Minimum, wenn das zweite Glied dieses Ausdrucks verschwindet, oder wenn

$$(17) \quad \Sigma m[(\xi - \varDelta x)(Dx - \varDelta x)] = 0;$$

denn alsdann kommt $U' - U$ auf den wesentlich positiven Ausdruck

$$\Sigma m[(Dx - \varDelta x)^2] \text{ oder } \Sigma m . \overline{CD}^2$$

Digitized by Google

zurück. Entwickelt man aber den ersten Theil der zu beweisenden Gleichung (17) mittelst der Ausdrücke von $\xi - \Delta x$, $Dx - \Delta x$ nach Δt und setzt man alle Variationen und Zeitableitungen vor die Summenzeichen, so findet sich jedes Glied mit einer Summe behaftet von der Form derjenigen, welche die eine Seite der Gleichung (9) bilden. Wenn daher das System von der Art ist, dass die virtuellen Wege endliche Grösse haben dürfen, so verschwinden, vermöge der dann giltigen Gleichung (9), alle einzelnen Glieder der Gleichung (17), was auch Δt sein mag, wofern nur die den ersten Theil derselben bildende Reihe convergirt; d. h. das Princip des kleinsten Zwangs gilt für endlich Zeitintervalle Δt, welche überdiess jede beliebige Grösse haben dürfen in dem Falle, wo die Coordinaten lineäre Functionen der independenten sind, weil dann mit den Ableitungen $\frac{d^n x}{d\omega^{n'} d\psi^{n''} \ldots}$ von $n=2$ an alle Glieder der Reihe ausser dem ersten verschwinden, mithin Δt keine Convergenzbedingung mehr erfüllen darf. Gestattet aber das System, was im Allgemeinen der Fall ist, bloss unendlich kleine virtuelle Wege, so gilt die Gleichung (9) bloss für $i=0$, $n=1$, oder reducirt sich auf die Gleichungen (6), vermöge deren alsdann bloss das erste Glied in der Entwickelung der Gleichung (17) nach Δt verschwindet, Δt muss also unendlich klein genommen werden, damit diese Entwickelung auf das erste Glied zurückkomme, oder (c) auf

$$(d) \quad U' - U = \frac{\Delta t^4}{4} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m \left[\left(\frac{dx}{d\omega} \left(\delta^2 \omega - \frac{d^2 \omega}{dt^2} \right) + \frac{dx}{d\psi} \left(\delta^2 \psi - \frac{d^2 \psi}{dt^2} \right) + \ldots \right)^2 \right] \\ -2 \left(\left(\delta^2 \omega - \frac{d^2 \omega}{dt^2} \right) \Sigma m \left(X - \frac{d^2 \omega}{dt^2} \right) \frac{dx}{d\omega} + \ldots \right) \end{array} \right\},$$

wobei sich zugleich die Homogeneität dieses Ausdrucks zeigt.

Die obige Entwickelung von $Dx - \Delta x$ lässt sich auch dadurch machen, dass man diese Grösse und entsprechend $D\omega - \Delta\omega = h$, $D\psi - \Delta\psi = i$, u. s. w. als Incremente von Δx und $\Delta\omega$, $\Delta\psi \ldots$ betrachtet, beim Uebergang vom Punkt C zum Punkt D; man hat alsdann

$$Dx - \Delta x = \frac{d\Delta x}{d\Delta\omega} h + \frac{d\Delta x}{d\Delta\psi} i + \ldots + \frac{d^2 x}{d\Delta\omega^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^2 \Delta x}{d\Delta\omega \, d\Delta\psi} hi + \frac{d^2 \Delta x}{d\Delta\psi^2} \frac{i^2}{2} + \ldots,$$

wo

$$h = D\omega - \Delta\omega = \left(\delta^2 \omega - \frac{d^2 \omega}{dt^2} \right) \frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,$$

$$i = D\psi - \Delta\psi = \left(\delta^2 \psi - \frac{d^2 \psi}{dt^2} \right) \frac{\Delta t^2}{2} + \ldots;$$

u. s. w.

und, vermöge der in §. 3 angegebenen Ausdrücke von Δx mittelst $\Delta\omega$, $\Delta\psi$ ...

$$\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}=\frac{dx}{d\omega}+\frac{d^2x}{d\omega^2}\Delta\omega+\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\Delta\psi+\ldots=\frac{dx}{d\omega}+(\frac{d^2x}{d\omega^2}\frac{d\omega}{dt}+\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\frac{d\psi}{dt}+..)\Delta t+..$$

$$\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega^2}=\frac{d^2x}{d\omega^2}+(\frac{d^3x}{d\omega^3}\frac{d\omega}{dt}+\frac{d^3x}{d\omega^2d\psi}\frac{d\psi}{dt}+\ldots)\Delta t+\ldots,$$

$$\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega d\Delta\psi}=\frac{d^2x}{d\omega d\psi}+(\frac{d^3x}{d\omega^2d\psi}\frac{d\omega}{dt}+\frac{d^3x}{d\omega d\psi^2}\frac{d\psi}{dt}+\ldots)\Delta t+\ldots,$$

Formeln, die auch noch später gebraucht werden. — Man kann endlich den Uebergang vom Punkt C zu D durch Incremente $D(x+\Delta x)$ der Coordinaten $x+\Delta x$ von C andeuten, so dass dann die von D die Form haben $x+\Delta x+D(x+\Delta x)$, wo zunächst, wie in der Formel (16),

$$D(x+\Delta x)=Dx+\Delta Dx=Dx+\frac{dDx}{dt}+3\frac{d^2Dx}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2}+\ldots$$

und

$$Dx=\Delta t\,\delta x+\frac{\Delta t^2}{2}\delta^2x+\ldots,$$

mithin

$$D(x+\Delta x)=\delta x.\Delta t+(\delta^2x+2\frac{d\delta x}{dt})\frac{\Delta t^2}{2}+(\delta^3x+3\frac{d\delta^2x}{dt}+3\frac{d^2\delta x}{dt^2})\frac{\Delta t^3}{2.3}+\ldots;$$

allein da in Δx bereits die Anfangsgeschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ enthalten ist, so ist, gemäss der obigen Erörterung, in Dx zu setzen $\delta x=0$, wodurch Dx und $D(x+\Delta x)$ zurückkommen auf:

$$Dx=\delta^2x\frac{\Delta t^2}{2}+\delta^3x.\frac{\Delta t^3}{2.3}+\ldots$$

und

$$D(x+\Delta x)=\delta^2x.\frac{\Delta t^2}{2}+(\delta^3x+3\frac{d\delta^2x}{dt})\frac{\Delta t^3}{2.3}+\ldots$$

so dass diess Grössen vom Range des Quadrats von Δt werden, und, da nun auch gleicherweise $\delta\omega=0$, $\delta\psi=0$, u. s. w. zu nehmen ist,

$$\delta^2x=\frac{dx}{d\omega}\delta^2\omega+\frac{dx}{d\psi}\delta^2\psi+\ldots,$$

$$\delta^3x=\frac{dx}{d\omega}\delta^3\omega+\frac{d^2x}{d\omega^2}\delta^2\omega^2+2\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\delta^2\omega\delta^2\psi+\ldots,$$

u. s. w.

ist. Wenn man hiernach die Gleichung, die nun an die Stelle von (17) tritt,

$$(18)\quad \Sigma m[(\xi' - \Delta x)\, D(x+\Delta x)] = 0$$

entwickelt, so ist leicht zu sehen, dass sie, wie die Entwickelung von (15), lauter Glieder liefert, die durch die Gleichung (9), wenn diese statt findet, verschwinden; während für ein unendlichkleines Δt an die Stelle von (d) tritt

$$(d')\quad U' - U = \frac{\Delta t^4}{4}\left\{ \begin{array}{l} \Sigma m[(\frac{dx}{d\omega}\delta^2\omega + \frac{dx}{d\psi}\delta^2\psi + \ldots)^2] \\ \quad - 2(\delta^2\omega\, \Sigma m[(X - \frac{d^2x}{dt^2})\frac{dx}{d\omega}] + \ldots) \end{array} \right\}$$

eine homogene Formel, deren zweiter Theil vermöge der Gleichungen (6), mithin vermöge (1), verschwindet*).

III. Um nun das Minimum auch unmittelbar durch Differenzialrechnung zu behandeln, so könnten wir, ausgehend von der nach Δt entwickelten Form (b) der Function U, (wie in §. 2., wozu wir daselbst durch die Natur der Sache geführt wurden), nach den wirklichen Beschleunigungen differenziren und so durch Nullsetzung ihrer ersten Ableitungen nach jeder der independenten Beschleunigungen, d. h. nach den zweiten Zeitableitungen der independenten Variabeln, ebensoviele Gleichungen erhalten, als solche independente vorhanden sind. Diese sind, wenn man, wie im Allgemeinen erfordert wird, die Entwickelung nach Δt auf ihr erstes, mit Δt^4 behaftetes, Glied zurückführt und

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \omega'', \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = \psi'', \text{ u. s. w.}$$

setzt,

$$(19)\quad \Sigma m[(X - \frac{d^2x}{dt^2})\frac{d}{d\omega''}\frac{d^2x}{dt^2}] = 0, \quad \Sigma m[(X - \frac{d^2x}{dt^2})\frac{d}{d\psi''}\frac{d^2x}{dt^2}] = 0, \text{ u. s. w.}$$

---

*) Natürlich haben hier die dem Uebergang von C zu D entsprechenden Variationen nicht dieselbe Bedeutung, wie die in der Formel (d), welche den Uebergang von A zu D andeuten; unterscheidet man der Vergleichung wegen die jetzigen durch Accentuirung des δ, so ist

$$\delta'^2\omega = \delta^2\omega - \frac{d^2\omega}{dt^2}, \text{ u. s. w.}$$

und entsprechend:

$$\delta'^2x = \delta x - \frac{d^2x}{dt^2};$$

überhaupt muss, wenn man die Formeln (17) und (18) vergleicht,

$$D'(x+\Delta x) = Dx - \Delta x$$

identisch sein, und die gliederweise Vergleichung der Entwickelung dieser beiden Ausdrücke nach Δt giebt die vorhergehende und alle übrigen Relationen zwischen den Variationen δ und δ'.

d. h. die Gleichungen (6); denn, vermöge des Ausdrucks von $\frac{d^2x}{dt^2}$ mittelst der independenten, ist:

$$\frac{d}{d\omega''}\,\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{d\omega},\quad \frac{d}{d\psi''}\,\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{d\psi},\ \text{u. s. w.}$$

Wir verfolgen aber von dieser Seite die Sache nicht weiter; denn da, wenn ω', ω''', u. s. w. ebenso die erste, dritte, u. s. w. Zeitableitung von ω vorstellt, überhaupt

$$\frac{d}{d\omega'}\,\frac{dx}{dt}=\frac{d}{d\omega''}\,\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{d\omega'''}\,\frac{d^3x}{dt^3}=\ldots.=\frac{dx}{d\omega},$$

d. h. gleich dem ersten Gliede von $\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}$ ist, so weist diess auf eine allgemeinere, bereits im Vorhergehenden angedeutete Art hin, die Differenziationen anzustellen, nämlich nach den dem Zeitincrement Δt entsprechenden Incrementen $\Delta\omega$, $\Delta\psi$... der independenten Variabeln; denn diese Differenziation entspricht allgemein dem Uebergang vom Punkt C zu D, von dem in Nro. II. die Rede war, wobei wir auf die Function U in ihrer ersten, unentwickelten Gestalt (a) zurückgehen müssen.

Da bei diesem Uebergang die Punkte B, mithin die Grössen ξ ungeändert bleiben, so sind die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von der Function U nach $\Delta\omega$, $\Delta\psi$....

$$\frac{dU}{d\Delta\omega}=-2\Sigma m\left[(\xi-\Delta x)\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\right],\quad \frac{dU}{d\Delta\psi}=-2\Sigma m\left[(\xi-\Delta x)\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\right],$$

u. s. w.,

$$\frac{d^2U}{d\Delta\omega^2}=2\Sigma m\left[\left(\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\right)^2\right]-2\Sigma m\left[(\xi-\Delta x)\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega^2}\right],$$

$$\frac{d^2U}{d\Delta\psi^2}=2\Sigma m\left[\left(\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\right)^2\right]-2\Sigma m\left[(\xi-\Delta x)\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\psi^2}\right],$$

$$\frac{d^2U}{d\Delta\omega\, d\Delta\psi}=2\Sigma m\left[\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\,\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\right]-2\Sigma m\left[(\xi-\Delta x)\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega\, d\Delta\psi}\right]$$

u. s. w.,

und die Bedingungen des Minimum's sind von dreierlei Art, nämlich

$$(\alpha)\quad \frac{dU}{d\Delta\omega}=0,\quad \frac{dU}{d\Delta\psi}=0,\ \text{u. s. w.}$$

$$(\beta)\quad \frac{d^2U}{d\Delta\omega^2}>0,\quad \frac{d^2U}{d\Delta\psi^2}>0,\ \text{u. s. w.}$$

$$(\gamma)\cdot\quad \frac{d^2U}{d\Delta\omega^2}\cdot\frac{d^2U}{d\Delta\psi^2}<\left(\frac{d^2U}{d\Delta\omega\, d\Delta\psi}\right)^2,\ \text{u. s. w.}$$

Digitized by Google

Sie sind erfüllt, wenn

$$(20)\quad \Sigma m[(\xi-\Delta x)\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}]=0,\quad \Sigma m[(\xi-\Delta x)\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}]=0, \text{ u. s. w.}$$

$$(21)\quad \Sigma m[(\xi-\Delta x)\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega^2}]=0,\quad \Sigma m[(\xi-\Delta x)\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega d\Delta\psi}]=0, \text{ u. s. w.};$$

denn alsdann kommen die zweiten Ableitungen von U auf ihre ersten Glieder zurück, die bei allen von der Form $\frac{d^2 U}{d\Delta\omega^2}$ wesentlich positiv sind, wie es die Bedingungen (β) erfordern, und das Stattfinden der Bedingungen von der Form (γ) erhellt unmittelbar durch Entwickelung ihrer Bestandtheile, indem

$$\frac{d^2 U}{d\Delta\omega^2}\cdot\frac{d^2 U}{d\Delta\varphi^2}=4\,\Sigma m\Big[\Big(\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\Big)^2\Big]$$
$$+4\,\Sigma m\Big[\Big(\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\frac{d\Delta y}{d\Delta\psi}\Big)^2+\Big(\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\frac{d\Delta y}{d\Delta\omega}\Big)^2\Big]$$
$$\Big(\frac{d^2 U}{d\Delta\omega d\Delta\psi}\Big)^2=4\,\Sigma m\Big[\Big(\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\Big)^2\Big]$$
$$+8\,\Sigma m\Big[\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\frac{d\Delta y}{d\Delta\psi}\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\frac{d\Delta y}{d\Delta\omega}\Big],$$

wonach die Sache auf den Satz $a^2+b^2>2ab$ hinausläuft. Entwickelt man aber die ersten Theile der nun noch zu erweisenden Gleichungen (20), (21) nach Δt vermöge obiger (Nro. II.) Entwickelungen der Ableitungen $\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}$ u. s. w. und der Grössen $\xi-\Delta x$, so befinden sich wiederum in allen Gliedern, (nach gehöriger Absonderung der von den Summationen unabhängigen Factoren) Summen, deren allgemeine Form in der Gleichung (9) enthalten ist; die Gleichungen (20), (21) gelten mithin unabhängig von der Grösse des Zeitintervalls Δt, wenn alle diese Summen vermöge der Gleichung (9) verschwinden. Wenn aber diese bloss für $i=0$, $n=1$ gilt, so ist das Zeitintervall unendlich klein zu nehmen, wie die virtuellen Wege, und die, desshalb auf ihre ersten Glieder zurückgeführten, Gleichungen (20) sind einerlei mit den Gleichungen (6); die Gleichungen (21) dagegen, deren erste Glieder die Summen

$$\Sigma m\,[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d^2x}{d\omega^2}],\ \Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d^2x}{d\psi^2}], \text{ u. s. w.}$$

enthalten, gelten zwar dann nicht mehr, weil hier $n=2$ in der Formel (9) zu nehmen wäre, sind aber diessfalls zur Erfüllung der Bedingungen (β), (γ) auch nicht mehr nöthig, weil die zweiten Theile in den Ausdrücken der zweiten Ableitungen von U wegen des Unendlichkleinen von selbst wegfallen; denn es kommt alsdann z. B. $\frac{d^2 U}{d\Delta\omega^2}$ auf

$$\frac{d^2 U}{d\Delta\omega^2}=2\,\Sigma m\Big[\Big(\frac{dx}{d\omega}\Big)^2\Big]-\Delta t^2\,\Sigma m\Big[\Big(X-\frac{d^2x}{dt^2}\Big)\frac{d^2x}{d\psi^2}\Big]$$

Digitized by Google

zurück, mithin, wegen $\Delta t = \frac{1}{x}$, auf $2\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2\right]$, und ebenso die übrigen.

§. 5.

Hier betrachten wir noch das Princip des kleinsten Zwangs im Falle des Gleichgewichts.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten liefert, wenn die Kräfte, deren Axenprojectionen X, Y, Z sind, selbst an dem System sich Gleichgewicht halten sollen, die Gleichung

$$(\alpha)\quad \Sigma m[XDx]=0,$$

woraus man, wenn Dx endlicher Werthe fähig ist, die Formeln

$$(\beta)\ \Sigma m[X\delta^n x]=0,\ \Sigma m\left[X\frac{d^n x}{d\omega^{n'}d\psi^{n''}\ldots}\right]=0,\ \Sigma m\left[\frac{d^i x}{dt^i}\frac{d^n x}{d\omega^{n'}d\psi^{n''}\ldots}\right]=0$$

zieht, wovon man die letztere aus der vorhergehenden erhält durch Differenziation nach einer Variabeln t, wovon alle andern als Functionen betrachtet werden, oder auch, was auf dasselbe hinausläuft, durch Differenziation nach der Characteristik δ (nur dass dann $\delta^i X$ für $\frac{d^i X}{dt^i}$ zu setzen ist), und die im Allgemeinen auf

$$(\gamma)\ \Sigma m[X\delta x]=0;\ \Sigma m\left[X\frac{dx}{d\omega}\right]=0,\ \Sigma m\left[X\frac{dx}{d\psi}\right],\ \text{u. s. w.}$$

zurückkommen, wovon letztere in der Anzahl der geometrischen independenten vorhanden sind, mithin die Gleichgewichtslage vollkommen bestimmen. Es ist nun zu zeigen, wiefern diese Gleichungen auch diesfalls ein Minimum des Zwangs ausdrücken, was auf ganz ähnliche Weise, wie in §. 4. geschehen kann.

Seien x, y, z die Coordinaten von m in der Gleichgewichtslage A, $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ oder x', y', z' in der Lage B, wohin M von A aus gelangt, wenn es sich, wie alle andere Punkte des Systems, aus der Gleichgewichtslage frei unter dem Einfluss der an ihm wirkenden Kräfte X, Y, Z bewegt; endlich $x+Dx$, $y+Dy$, $z+Dz$ in der Lage D, in die es von A aus gelangt bei einer willkührlichen, dem Systemverbande compatibeln, Verrückung sämmtlicher Punkte des Systems, oder vielmehr in die es von A aus, wenn das Gleichgewicht gestört wird, während des Zeitintervalls Δt, in welchem es frei nach B käme, bei seiner Verbindung mit den übrigen Punkten des Systems wirklich sich bewegt, (so dass man auch Δx, Δy, Δz für Dx, Dy, Dz setzen könnte) Setzt man wieder

$$AB=u,\ \Sigma mu^2=U,$$

so dass U die Function ist, die ein Minimum sein soll, wenn die Gleichungen (β) oder (γ) gelten; ebenso, wenn der Punkt D an die Stelle von A tritt,

$$BD=u',\ \Sigma mu'^2=U'.$$

Digitized by Google

so ist

$$u^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

$$u'^2 = [(\xi - Dx)^2] = u^2 + [Dx^2] - 2[\xi Dx];$$

mithin

$$(a)\quad U = \Sigma m[\xi^2], \text{ oder } U = \Sigma m[(x' - x)^2],$$

und

$$(b)\quad \begin{cases} U' - U = \Sigma m[Dx^2] - 2\Sigma m[\xi Dx] > 0, \\ \text{d. h. } \Sigma m[\xi Dx] = 0 \end{cases}$$

die Bedingung des Minimums von U. Oder wenn man U n der zweiten Form nach den independenten ω, ψ.... differenzirt, wobei bloss die Coordinaten x des Punkts A sich ändern, während die Coordinaten x' des Punkts B ungeändert bleiben (wie in dem Beispiel §. 2. III.), so hat man in

$$(c)\quad \begin{cases} \frac{dU}{d\omega} = -2\,\Sigma m[\xi \frac{dx}{d\omega}] = 0, \frac{dU}{d\psi} = -2\,\Sigma m[\xi \frac{dx}{d\psi}] = 0, \text{ u. s. w.} \\ \frac{d^2U}{d\omega^2} = 2\,\Sigma m\,[(\frac{dx}{d\omega})^2] - 2\,\Sigma m\,[\xi \frac{d^2x}{d\omega^2}] > 0, \text{ u. s. w.} \\ \frac{d^2U}{d\omega^2} \cdot \frac{d^2U}{d\psi^2} > (\frac{d^2U}{d\omega d\psi})^2, \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

das System der Minimumsbedingungen. Da nun $\frac{dx}{dt} = 0$, mithin auch $\delta x = 0$, so hat man zur Entwickelung dieser Ausdrücke die Werthe

$$\xi = X.\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{dX}{dt}.\frac{\Delta t^3}{2.3} + \ldots.,$$

$$Dx = \delta^2 x.\frac{\Delta t^2}{2} + \delta^3 x.\frac{\Delta t^3}{2.3} + \ldots.,$$

wo $\delta^2 x$, $\delta^3 x$, u. s. w., weil auch $\delta\omega = \delta\psi = \ldots = 0$, dieselben Werthe haben, wie in der letzten Entwickelung in §. 4. II., nämlich

$$\delta^2 x = \frac{dx}{d\omega}\delta^2\omega + \frac{dx}{d\psi}\delta^2\psi + \ldots.,$$

$$\delta^3 x = \frac{dx}{d\omega}\delta^3\omega + \frac{d^2x}{d\omega^2}\delta^2\omega^2 + 2\,\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\,\delta^2\omega\delta^2\psi + \ldots.$$

u. s. w. Vermöge dieser Ausdrücke erhellt aber, dass, mag Δt endlich oder unendlich klein zu nehmen sein, die Minimumsbedingungen in der einen (b), wie in der andern Form (c) durch die Gleichgewichtsbedingungen (β) oder (γ) sich rechtfertigen.

Digitized by Google

Schlussbemerkung.

Mit Vorstehendem glaube ich das Princip des kleinsten Zwangs nach allen Seiten erörtert zu haben; ich musste mich dabei zugleich in eine Erörterung über das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten einlassen, die darin hauptsächlich von den gebräuchlichen Darstellungen abweicht, dass ich bei den virtuellen Bewegungen immer zwischen den virtuellen Räumen und Geschwindigkeiten (man kann beifügen: Beschleunigungen) unterschieden und gezeigt habe, dass von diesem Gesichtspunkt aus ein wesentlicher Unterschied in der Entwickelung der Bewegungsgleichungen eintritt für die beiden Fälle, einmal denjenigen, wo die virtuellen Räume endlich sein dürfen, alsdann den, wo sie unendlich klein sein müssen. Man pflegt die virtuellen Bewegungen, die man einem System ertheilt, ins Gebiet der Variationsrechnung zu ziehen; ich glaube behaupten zu dürfen, dass nur bei obiger Darstellung die strengen, dem Geiste der Functionentheorie angepassten Begriffe der Variationsrechnung in Anwendung kommen, wie sie namentlich Ohm in seinen Schriften auseinandersetzt. Diese Methode besteht übrigens nicht im Verbannen des Unendlichkleinen, sondern in der strengen und folgerichtigen analytischen Behandlung desselben.

XXXVII.

Untersuchungen über den sogenannten berganlaufenden Doppelkegel.

Von dem

Herrn Professor Dr. F. Stegmann

an der Universität zu Marburg.

Die bekannte, in jedem Cursus über Experimentalphysik erwähnte und öfters als mechanisches Paradoxon aufgeführte Erscheinung, dass ein Doppelkegel auf zwei divergirenden Stützen durch selbstständige Rotation in die Höhe läuft, bietet sowohl in geometrischer als mechanischer Hinsicht mehrere interessante Fragen dar, und es existiren darüber auch bereits zwei Abhandlungen in den Schriften der Petersburger Akademie, die eine von Kraft (Novi Comment. Acad. Petropol. Tom. VI. p. 389.), die andere von Kononoff (Nova Acta Acad. Petrop. Tom. VII. p. 229.). Allein

die erste erklärt eben nur, mit nicht geringer Weitläuftigkeit, warum die gedachte Bewegung vor sich gehen müsse, und dass das Aufsteigen nur ein scheinbares sei, und ist selbst in diesem Wenigen nicht frei von Irrthümern; die zweite genannte Arbeit dagegen, welche hauptsächlich in mechanischer Hinsicht die nöthigen Formeln zu entwickeln bestimmt war, ist durch einen fundamentalen Fehler, wie sich später (§. 16.) zeigen wird, so sehr missrathen, dass man nicht anstehen darf, sie als ganz unbrauchbar zu bezeichnen. Unter diesen Umständen möchten die nachstehenden Untersuchungen, welche vorzugsweise über die bei dieser Bewegung sich darbietenden geometrischen Fragen Aufschluss geben sollen, manches neue und vielleicht überraschende Resultat liefern.

§. 1.

Es mögen in Fig. 1. die beiden congruenten Trapeze $AEGB$ und $AEHC$ die Unterlage vorstellen, von welcher der Doppelkegel während seiner Bewegung getragen wird, und zwar sollen die Geraden AB und AC die beiden scharfen Kanuten sein, mit deren einzelnen Punkten die Kegelflächen successiv in Berührung treten. Die drei Kanten AE, BG, CH denken wir uns vertikal, die beiden unteren EG und EH horizontal; und was die Länge dieser Kanten anbelangt, so wollen wir $EG=EH$ so gross denken, dass GH gleich der Axe des Doppelkegels wird. Nach der Voraussetzung werden die Kanten AB und AC von A an in die Höhe laufend unter einem gewissen Winkel gegen die Horizontalebene geneigt sein, und als Maass dieser Neigung soll uns im Folgenden der Winkel dienen, welchen eine dieser Kanten mit einer durch A aufwärts gezogenen Vertikallinie bildet, nämlich W. $JAB=ABG=r$. Im Uebrigen ergiebt sich aus diesen Bestimmungen von selbst, dass die Verbindungslinie der Punkte B und C horizontal liegen und ebenfalls der Axe des Doppelkegels gleich sein wird.

Auf diese Unterlage soll nun der aus zwei congruenten, gemeinen und von gleichartiger Materie erfüllten Kegeln zusammengesetzte Doppelkegel gelegt werden, entweder so, dass er mit einem in der Peripherie der gemeinschaftlichen Basis gelegenen Punkte sich auf den Vereinigungspunkt der Kanten AB und AC stützt, oder auch so wie ihn die Fig. 1. darstellt, nämlich dass jede Hälfte für sich in einem Punkte T resp. U auf den genannten Kanten ruht. Mag man aber die eine oder andere Lage als die anfängliche wählen, in jedem Falle haben wir als fundamentale Voraussetzung dieser Untersuchung anzunehmen, dass der gemeinschaftliche Grundkreis in diejenige vertikale Ebene falle, welche durch die Halbirungslinie des W. BAC hindurchgeht und welche wir in Zukunft der Kürze wegen die mittlere Vertikalebene nennen wollen. Und aus dieser Annahme in Verbindung mit dem, was über die Stellung der Unterlage festgesetzt worden ist, folgt sogleich, dass die Axe des Doppelkegels horizontal liegt und dass überhaupt auf beiden Seiten der mittleren Vertikalebene vollkommene Symmetrie Statt finden muss.

§. 2.

Man verbinde jetzt die beiden Berührungspunkte T und U durch eine Gerade, welche in W durch die Ebene des Grundkreises hindurchgeht, und ziehe von W eine Gerade WM nach dem Mittelpunkte des Grundkreises, so kommt es zunächst darauf an ob diese Gerade etwa vertikal steht, oder rückwärts geneigt ist. so dass sie gegen die durch A aufwärts gezogene Vertikallinie AJ convergirt, oder ob sie vorwärts geneigt ist, nämlich von AJ divergirt. In dem letzteren Falle wird die sogenannte berganlaufende Bewegung des Doppelkegels vor sich gehen, und zwar so, dass die im vorhergehenden §. für die ursprügliche Stellung angenommene Symmetrie auf beiden Seiten der mittleren Vertikalebene sich fortwährend erhält. Denn wegen der vorausgesetzten Homogeneität der beiden Hälften des Doppelkegels wird sein Schwerpunkt in den Mittelpunkt seines Grundkreises fallen, und sobald man daher in Gedanken die Berührungspunkte T und U mit M verbindet und sich die ganze Masse des Doppelkegels in M vereinigt vorstellt, so sind die Umstände in statischer Hinsicht dieselben, als wenn ein gleichschenkliges Dreieck TMU ohne eigene Schwere, jedoch in seiner Spitze M durch ein Gewicht beschwert, um seine horizontal gestellte Grundlinie TU als Umdrehungsaxe zu rotiren anfängt, und bei einer solchen Rotation muss die Linie MW offenbar in der mittleren Vertikalebene bleiben.

Die eben aufgestellte Bedingung für das Aufwärtsrollen des Doppelkegels kann aber noch auf eine andere und sich unmittelbar auf die gegebenen Grössenverhältnisse beziehende Art ausgedrückt werden. Da nämlich sowohl TU als auch die Axe PQ beide senkrecht auf der mittleren Vertikalebene stehen, so lässt sich durch diese beiden Geraden eine Ebene legen, welche die Peripherie des Grundkreises in irgend einem Punkt S durchschneiden wird, so dass MWS ein Halbmesser des Grundkreises ist. Die gedachte Ebene enthält nun zugleich die zwei mit der Unterlage in Berührung stehenden Kegelseiten PTS und QUS, und soll deshalb der B e r ü h r u n g s - A x e n s c h n i t t heissen. Da aber die Kante AT der Natur der Sache nach eine im Punkt T an die Kegelfläche gezogene Tangente ist, so wird die Ebene des $\Delta\ AST$ die der Kegelseite PS entsprechende tangirende Ebene sein und demgemäss auf dem Berührungs-Axenschnitt senkrecht stehen. Und da die mittlere Vertikalebene ASM gleichfalls auf dem Berührungs-Axenschnitt senkrecht steht, so folgt, dass AS im Punkte S senkrecht auf der Ebene des Berührungs-Axenschnitts stehen, dass also auch W. ASM ein Rechter sein muss, d. h. dass AS zugleich die Peripherie des Grundkreises in S tangirt. Die Bedingnug, dass MW vorwärts geneigt sei, bringt demnach als nothwendige Folge mit sich, d a s s d i e G e r a d e AS v o n A a n i n B e z i e h u n g a u f d e n H o r i z o n t a b w ä r t s l a u f e.

Dieses Verhältniss ist anschaulich gemacht bei der projektivischen Zeichnung in Fig. 2., in welcher die Punkte A, E, M, W, S die nämlichen sind wie in Fig. 1., während die Geraden Eg und AN die Projektionen der Kanten EG und AB auf die mittlere Vertikalebene und AD eine in derselben Ebene gezogene Horizon-

tallinie vorstellen. Wenn nämlich hier die Richtung des Halbmessers SM von der Vertikallinie AJ divergiren, der W. ASM aber ein Rechter sein soll, so muss augenscheinlich AS von A au abwärts laufen, nämlich W. $NAS > NAD$ sein. Und umgekehrt, so oft dies der Fall ist, wird die sogenannte bergaulaufende Bewegung des Doppelkegels vor sich gehen.

§. 3.

Bevor wir jedoch den analytischen Ausdruck für diese Bedingung zu entwickeln suchen, scheint es nöthig erst die Behauptung festzustellen, dass, wo sich auch immer der Doppelkegel während seiner fortrollenden Bewegung befinden mag, d. h. wie gross auch die Entfernungen $AT = AU$ sein mögen, stets die Richtung der Linie AS dieselbe bleibt, nämlich dass alle Punkte, wie S und S', in einer einzigen Geraden gelegen sind. Kraft (in der oben angeführten Abhandlung §. 8. S. 396. Z. 6.) nimmt zwar ohne Weiteres an, der Weg, welchen der Schwerpunkt M während der Bewegung des Doppelkegels beschreibt, sei eine gerade Linie, was mit unserer gegenwärtigen Behauptung ziemlich zusammenfällt, allein die Annahmen dieses Akademikers bei der vorliegenden Untersuchung waren etwas voreilig und, wie wir demnächst sehen werden, zum Theil irrig, und im gegenwärtigen Fall könnte man füglich fragen, warum denn nicht etwa der geometrische Ort der Schwerpunkte M, M' u. s. f. irgend eine in der mittleren Vertikalebene liegende Curve sein könnte. Dieser mögliche Zweifel scheint vielmehr erst durch folgende Betrachtung seine Erledigung zu finden. Wenn zwei congruente Kegelflächen P und P', deren Axen PM und $P'M'$ parallel laufen, von einer Geraden TT' berührt werden, und zwar so, dass die Berührungspunkte T, T' auf der nämlichen Seite einer durch die Axen gelegten Ebene liegen*), so müssen, wie man leicht einsehen wird, die Berührungs-Axenschnitte so wie die berührten Kegelseiten PT und $P'T'$ einander parallel sein. Hieraus folgt nun, dass während der rollenden Bewegung des Doppelkegels sämmtliche berührte Kegelseiten auf jeder Seite der mittleren Vertikalebene in einer Ebene ATS beziehungsweise AUS gelegen sind, und dass also der geometrische Ort der Punkte S, S' u. s. f. nichts Anderes ist, als die Durchschnittslinie dieser beiden

*) Wenn die gemeinschaftliche Tangente TT' zwischen beiden Kegeln hindurchgeht, so dass die Berührungspunkte sich auf verschiedenen Seiten einer durch die Axen hindurchgelegten Ebene befinden, so gilt dieser Satz nicht. Im andern Falle aber überzeugt man sich von seiner Richtigkeit, sobald man durch T eine Gerade TW parallel zur Axe und ausserdem die auf der tangirenden Ebene ATS senkrecht stehende und die Axe schneidende (in der Fig. 1. jedoch nicht gezeichnete) Normallinie Tx zieht, und ganz dieselben Constructionen am Punkte T' vornimmt. Mit Hülfe der Voraussetzungen ergiebt sich dann sogleich, dass an der von den Geraden TA, TW, Tx gebildeten dreiseitigen Ecke die drei ebenen Winkel gleich sind denen an der entsprechenden, aus $T'A, T'W'$, $T'x'$ gebildeten Ecke, und dass also, weil ATW und $AT'W'$ in einer Ebene liegen, die Ebenen $WTxP$ und $W'T'x'P'$ parallel sein müssen.

tangirenden Ebenen. — Und da sämmtliche Halbmesser SM, $S'M'$ u. s. f. auf dieser Geraden AS senkrecht stehen, so muss der Weg des Schwerpunkts allerdings eine mit AS parallele Gerade sein. Diese Gerade MM' muss übrigens verlängert in den Halbirungspunkt N der Linie BC auslaufen, denn weil wir in §. 1. BC gleich der Axe PQ gemacht haben, so ist die äusserste Grenze, bei welcher der Doppelkegel von den Kanten AB und AC unterstützt zu werden aufhört, dann erreicht, wenn die Scheitel P und Q sich in B resp. C befinden, und bei dieser Lage müsste der Schwerpunkt M in N anlangen. Freilich werden wir demnächst sehen, dass der Doppelkegel durch seine rollende Bewegung diese Grenze streng genommen niemals erreichen kann.

§. 4.

Es sei nun die Axe des Doppelkegels $PQ=2h$, der Durchmesser des Grundkreises $=2a$, der Winkel $PSQ=2\vartheta$, so dass $\frac{h}{a}=\operatorname{tang}\vartheta$ ist.

Ferner sei der Winkel zwischen den Kanten AB und AC gleich 2η und der Winkel, welchen eine durch A gezogene Vertikallinie AJ mit einer dieser Kanten bildet, nämlich $JAB=JAC=\Gamma$.

Mittelst der vier von einander unabhängigen, gegebenen Grössen h, a, η, Γ werden sich nun alle übrigen constanten Grössen bestimmen lassen.

Um zuvörderst den Neigungswinkel zwischen den Ebenen $ABGE$ und $ACHE$ zu bestimmen, welchen wir durch $2E$ bezeichnen wollen, und welcher zugleich die Horizontalprojection des W. BAC angiebt, hat man aus dem Dreieck GEH

$$2h=2EG\,.\sin E;$$

aber aus dem Dreieck BAC ergiebt sich

$$2h=2AB\,.\sin\eta;$$

folglich ist $\sin E=\frac{AB}{EG}\cdot\sin\eta$, d. h.

$$(1)\quad \sin E=\frac{\sin\eta}{\sin\Gamma}.$$

Um ferner die Richtung der Geraden ASZ zu finden, wobei wir in Betreff des Endpunkts Z annehmen wollen, dass $NZ\parallel MS$ ein von N auf AS gefalltes Perpendikel sei, so liefert uns das $\Delta\,ABN$ den Werth $AN=h\operatorname{cotg}\eta$, also erhalten wir aus dem $\Delta\,ANZ$, welches sich in seiner wahren Gestalt in Fig. 2. zeigt,

$$(2)\quad \sin NAZ=\frac{a}{h\operatorname{cotg}\eta}=\frac{\operatorname{tang}\eta}{\operatorname{tang}\vartheta}.$$

Die Winkel 2η und 2ϑ können zwar jeden beliebigen Werth zwischen den Grenzen 0 und π erhalten, so dass η und ϑ belie-

Digitized by Google

bige, jedoch spitze Winkel sind, und höchstens kann $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ sein, in so fern man die Untersuchung auf einen rollenden Cylinder auszudehnen beabsichtigt; in jedem Falle aber erfordert die Natur unserer Aufgabe, dass $\vartheta > \eta$ sei. Denn wenn wir unserer vorigen Bezeichnung gemäss unter $2E$ die Horizontalprojection des W. 2η verstehen, und uns auch den Doppelkegel auf eine durch A gelegte Horizontalebene projicirt denken, so leuchtet sogleich ein, dass $2\vartheta > 2E$ sein muss, denn sonst könnte der Doppelkegel gar nicht von den Kanten AB und AC getragen werden, er würde vielmehr, wenn man ihn so auf die Unterlage legen wollte, dass er mit der Peripherie seines Grundkreises durch A hindurchginge, sich um diesen Punkt A herumdrehen, so dass sein Schwerpunkt in der Ebene des mittleren Vertikalschnitts einen Kreisbogen um den Mittelpunkt A beschriebe, und würde auf diese Art zwischen den Kanten AB und AC geradezu hindurchfallen. Nun ist aber, wie man aus (1) ersieht, die Projection $2E$ grösser als der projicirte Winkel 2η und nur im Falle, wenn $\Gamma = \frac{1}{2}\pi$ ist, sind beide gleich, folglich muss jedenfalls $2\vartheta > 2\eta$ sein. Demnach ist in allen Fällen der Quotient $\frac{\tang \eta}{\tang \vartheta} < 1$ und wegen (2) W. $NAZ < \frac{1}{2}\pi$. Dass übrigens dieser Winkel gar nicht von Γ abhängt, ist sehr begreiflich, weil die Figur 1., nämlich die Unterlage sammt dem darauf gelegten Doppelkegel, bei A festgehalten und in den Punkten B und C erhoben oder herabgesenkt werden könnte, ohne dass sich der W. NAZ ändern würde.

§. 5.

Zunächst kommt es jetzt auf den Winkel NAD (Fig. 2.) an, welchen die Gerade AN mit der durch A in der mittleren Vertikalebene gezogenen Horizontallinie AD macht.

Durch Vergleichung der Fig. 2. mit Fig. 1. ersieht man aber, dass ND nichts Anderes ist, als die vertikale Erhebung des Punkts B über den Punkt A, folglich

$$ND = AB \cdot \cos\Gamma;$$

ferner ist

$$AN = AB \cdot \cos\eta,$$

folglich

$$(3)\quad \sin NAD = \frac{\cos\Gamma}{\cos\eta}.$$

Dieser Winkel ist natürlich unabhängig von ϑ. Am Schluss des §. 2. hatten wir aber gefunden, dass die vorwärts rollende Bewegung dann Statt finden müsse, und auch nur dann Statt finden könne, wenn W. $NAZ > NAD$ ist. Es kommt daher, den Formeln (2) und (3) zu Folge, darauf an, ob

$$\frac{\tang\eta}{\tang\vartheta} \gtrless \frac{\cos\Gamma}{\cos\eta},$$

d. h.

$$(4)\quad \sin\eta \gtreqless \operatorname{tang}\vartheta \cos\Gamma$$

ist. Je nachdem nämlich die gegebenen Winkel ϑ, η, Γ in einem solchen Verhältniss zu einander stehen, dass hier entweder das obere Zeichen, oder das mittlere oder das untere Realität hat, wird beziehungsweise der Doppelkegel sich vorwärts von A gegen N bewegen, oder im Gleichgewicht liegen bleiben, oder rückwärts gegen A hin rollen.

Da $\sin\eta$ übrigens, wie bereits im vorigen §. bemerkt worden, der Natur der Sache nach kleiner als $\sin\vartheta$, also $1 > \frac{\sin\eta}{\sin\vartheta}$ sein muss, so kann man wegen (4) auch sagen: Sobald der Doppelkegel von selbst vorwärts rollt, muss

$$(5)\quad 1 > \frac{\cos\Gamma}{\cos\vartheta},$$

d. h. ϑ **kleiner** als Γ sein, — welcher Satz jedoch nun nicht mehr umgekehrt werden kann. Den W. Γ setzen wir natürlich bei dieser Untersuchung als spitz, höchstens $= R$, voraus, weil, wenn Γ ein stumpfer Winkel wäre, von einer berganlaufenden Bewegung gar nicht mehr die Rede sein könnte.

Endlich bemerke man noch, dass je nachdem in (4) das obere, mittlere oder untere Verbindungszeichen gilt, auch

$$\frac{BN}{AB} \gtreqless \frac{h}{a} \cos\Gamma,$$

d. h.

$$a \gtreqless AB \,.\, \cos\Gamma$$

ist. Und weil $AB \,.\, \cos\Gamma$ die vertikale Erhöhung des Punkts B über dem Punkte A angiebt, so lässt sich die vorige Bedingung auch so aussprechen: Der Doppelkegel wird vorwärts oder rückwärts rollen oder stillstehen, je nachdem die vertikale Erhebung des Punkts B über den Punkt A, nämlich die Linie ND in Fig. 2., **kleiner** oder **grösser** oder **gleich** ist dem Halbmesser des Grundkreises. Noch bequemer freilich ersieht man dies Ergebniss aus der Beschaffenheit der rechtwinkligen Dreiecke ANZ und AND, welche die Hypotenuse gemeinschaftlich haben, und in denen also W. $NAZ \gtreqless NAD$ sein wird, je nachdem $\left.\begin{matrix} NZ \\ a \end{matrix}\right\} \gtreqless ND$ ist.

§. 6.

Wenn $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ wäre, nämlich wenn anstatt eines Doppelkegels ein **Cylinder** vom Durchmesser $2a$ auf die beiden Kanten der Unterlage gelegt würde, so hätte man $\sin\eta \operatorname{cotg}\vartheta = 0$, und es könnte also gar nicht, wie der Bedingung (4) zu Folge für eine aufsteigende Bewegung verlangt wird, $\sin\eta \operatorname{cotg}\vartheta > \cos\Gamma$ sein, sondern

es ist, wenn dabei Γ von $\frac{1}{2}\pi$ verschieden angenommen wird, $\sin\eta\cot\vartheta < \cos\Gamma$, d. h. ein Cylinder wird auf der Unterlage abwärts gegen A hin rollen, und nur für $\Gamma = \frac{1}{2}\pi$ ist $\sin\eta\cot\vartheta = \cos\Gamma = 0$, nämlich wenn die Kanten der Unterlage horizontal gestellt sind, so bleibt der Cylinder im Gleichgewicht auf denselben liegen.

Wenn man dagegen einen wirklichen Doppelkegel vor sich hat, wobei also $\vartheta < \frac{1}{2}\pi$ ist, so ersieht man aus (4), dass bei ungeändertem η durch Verkleinerung von Γ, d. h. durch steilere Erhebung der Kanten AB und AC, leicht die Möglichkeit der aufwärts rollenden Bewegung aufgehoben und der Zustand des Gleichgewichts herbeigeführt werden könne, weil nämlich, wie bereits in §. 4. bemerkt worden, $\frac{\sin\eta}{\tan\vartheta}$ jedenfalls <1 ist. Und ferner, sobald dieser Zustand des Gleichgewichts eingetreten ist, so wird bei unverändertem Γ und ϑ bloss durch Vergrösserung des W. 2η wieder die aufwärts rollende Bewegung veranlasst werden, welche Folgerungen man bekanntlich durch das Experiment leicht bestätigt.

Im Uebrigen könnte man für jede beliebige Grösse der gegebenen W. ϑ, Γ, η die Winkel NAZ und NAD nach (2) und (3) berechnen, und wenn dabei $NAZ > NAD$ ausfällt, so würde dem §. 3. zu Folge eine mit AZ im Abstande $MS = M'S' = a$ parallel gezogene Gerade MN den abwärts geneigten Weg darstellen, in welchem während der aufwärts rollenden Bewegung des Doppelkegels sein Schwerpunkt allmählig herabsinkt.

§. 7.

Auch lässt sich jetzt schon das statische Moment bestimmen, durch welches bei einer beliebigen Position des Doppelkegels seine vorwärts rotirende Bewegung verursacht wird. Ziehen wir nämlich (Fig. 2.) durch W und M die Vertikallinien Wr und Mo und durch M die Horizontallinie $M\alpha$ und setzen W. $DAZ = NAZ - NAD = \omega$ und die Masse des Doppelkegels $= 2P$, so ist auch W. $MWr = \omega$, also das statische Moment $= 2P.MW.\sin\omega$.

Hierbei kann man die veränderliche Grösse MW leicht durch die Variable AT (Fig. 1.) ausdrücken. Denn die ähnlichen Dreiecke WMN und NZA in Fig. 2. liefern sogleich die Proportion

$$\frac{MW}{NZ} = \frac{WN}{AN} = \frac{AN - AW}{AN},$$

und anstatt dieser kann man, wie aus Fig. 1. erkannt wird, setzen

$$\frac{MW}{a} = \frac{AB - AT}{AB};$$

also ist, wenn man für a und AB die Werthe $h\cot\vartheta$ und $\frac{h}{\sin\eta}$ benutzt,

$$6)\quad MW = (AB - AT)\frac{\sin\eta}{\tan\vartheta}.$$

Digitized by Google

Um aber den W. ω durch die gegebenen Grössen auszudrücken, könnte man zuvörderst aus (2) und (3) cos NAZ und cos NAD suchen und dann

$$\sin(NAZ-NAD) \text{ und } \cos(NAZ-NAD)$$

entwickeln Es ist jedoch für die Folge bequemer, statt des Winkels η seine Projection E einzuführen, dann wird nämlich wegen (1), (2), (3)

$$\sin\eta = \sin E \sin \Gamma,$$

$$\cos\eta = \sqrt{1-\sin E^2 \sin\Gamma^2},$$

$$(7)\quad \sin NAZ = \frac{\sin E \sin\Gamma \operatorname{cotg}\vartheta}{\sqrt{1-\sin E^2 \sin\Gamma^2}},\ \cos NAZ = \frac{\sqrt{\sin\vartheta^2 - \sin E^2 \sin\Gamma^2}}{\sin\vartheta\sqrt{1-\sin E^2\sin\Gamma^2}}$$

$$(8)\quad \sin NAD = \frac{\cos\Gamma}{\sqrt{1-\sin E^2 \sin\Gamma^2}},\ \cos NAD = \frac{\cos E \sin\Gamma}{\sqrt{1-\sin E^2 \sin\Gamma^2}}$$

und deshalb

$$(9)\quad \sin\omega = \frac{\tfrac{1}{2}\sin 2E\cos\vartheta\sin\Gamma^2 - \cos\Gamma\sqrt{\sin\vartheta^2-\sin E^2\sin\Gamma^2}}{\sin\vartheta(1-\sin E^2\sin\Gamma^2)},$$

$$\cos\omega = \frac{\sin\Gamma[\sin E\cos\Gamma\cos\vartheta + \cos E\sqrt{\sin\vartheta^2-\sin E^2\sin\Gamma^2}]}{\sin\vartheta(1-\sin E^2\sin\Gamma^2)}$$

oder auch, wenn man Zähler und Nenner dieser Ausdrücke durch $\sin\Gamma^2 \sin\vartheta$ dividirt, und die Quotienten $\frac{1}{\sin\Gamma^2}$ und $\frac{1}{\sin\vartheta^2}$ durch Cotangenten ausdrückt,

$$(10)\quad \sin\omega = \frac{\sin E\cos E\operatorname{cotg}\vartheta - \operatorname{cotg}\Gamma\sqrt{\cos E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2-\sin E^2\operatorname{cotg}\vartheta^2}}{\cos E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2}$$

$$\cos\omega = \frac{\sin E\operatorname{cotg}\Gamma\operatorname{cotg}\vartheta + \cos E\sqrt{\cos E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2-\sin E^2\operatorname{cotg}\vartheta^2}}{\cos E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2}$$

§. 8.

Wir haben im Vorhergehenden diejenige Stellung des Doppelkegels, wenn er gerade über den Vereinigungspunkt der beiden Kanten AB und AC gelegt wird, absichtlich noch nicht als die ursprüngliche bezeichnet, weil diese Stellung in der That eine etwas genauere Besprechung verdient. Bei dem ersten Anblick mag es nämlich scheinen, als wenn in dieser anfänglichen Stellung der Schwerpunkt des Doppelkegels sich vertikal über dem gedachten Vereinigungspunkte der Kanten befinden müsse und dass man nur, weil alsdann theoretisch betrachtet Gleichgewicht Statt finden würde, durch einen kleinen Druck u. dgl. ein wenig nachzuhelfen

Digitized by Google

brauchte, um sogleich die fortrollende Bewegung zur Erscheinung zu bringen. Diese Ansicht finden wir denn auch ausgesprochen in der angeführten Abhandlung von Kraft*) durch die Worte: Huic puncto concursus immineat verticaliter centrum gravitatis rotae aut centrum basium circularium conjunctarum quod sit D, — in Verbindung mit der schon früher angeführten Stelle**): Durante igitur hoc motu centrum gravitatis descripsit lineam DO. Bei einer sorgfältigeren Ueberlegung aber drängt sich die Frage auf, ob es nicht unter gewissen Umständen möglich sei, dass anfangs der Doppelkegel sich um den Punkt A herumdrehe, ohne mit der Peripherie seines Grundkreises diesen Vereinigungspunkt der Kanten und mit dem, aus der vertikalen Stellung in eine schräge Lage übergehenden Halbmesser JA die Ebene des mittleren Vertikalschnitts zu verlassen, und dass erst später, sobald diese Umdrehung wegen des Widerstands der Kanten AB und AC unmöglich gemacht würde, die fortrollende Bewegung einträte. Der Unterschied zwischen dieser fortrollenden Bewegung und derjenigen, welche ich so eben Umdrehung genannt habe, würde offenbar in der Anzahl der Berührungspunkte zwischen der Gesammtoberfläche des Doppelkegels und seiner Unterlage begründet sein. Denn während der blossen Umdrehung, wenn eine solche Statt findet, wird sich der Halbmesser AK (Fig. 2.) von der Vertikallinie AJ abwärts drehen, ohne dass der Doppelkegel von der Unterlage in irgend einem andern Punkt ausser A berührt würde; sobald dagegen der Winkel JAK sein Maximum erreicht hat, weil einer weiteren Umdrehung sich der Widerstand der Kanten AB und AC entgegenstellt, so wird in diesem Augenblick der Doppelkegel mit der Peripherie seines Grundkreises den Vereinigungspunkt beider Kanten verlassen und wird sofort, indem sich der Berührungspunkt A gewissermassen in zwei aus einander tretende Punkte zerspaltet, in diesen zwei Berührungspunkten auf den Kanten AB und AC gestützt sein.

§. 9.

Um diese etwas delikate Frage zu entscheiden, sei der Schwerpunkt des Doppelkegels der Ursprung rechtwinkliger Coordinaten, die Ordinaten Z mögen in der Richtung der horizontalliegenden Axe des Kegels, die Axen der X und Y aber beide in der Ebene des mittleren Vertikalschnitts, die erstere horizontal und positiv nach der Seite hin, nach welcher die Kanten der Unterlage in die Höhe laufen, die andere vertikal aufwärts angenommen werden.

Alsdann entspricht der Oberfläche des auf der positiven Seite der Z liegenden und jetzt allein zu betrachtenden einfachen Kegels P die Gleichung

$$x^2+y^2=\frac{(h-z)^2}{h^2}a^2.$$

---

*) l. c. §. 7. Der Punkt D hat daselbst die nämliche Bedeutung wie in unserer Fig. 1. der Punkt J.

**) l. c. §. 8. Dass die Kanten AB und AC daselbst horizontal vorausgesetzt werden, macht keinen Unterschied in der Sache.

Digitized by Google

Verlegen wir dagegen den Anfangspunkt der Coordinaten, ohne jedoch an ihrer Richtung etwas zu ändern, nach A, und bezeichnen die Coordinaten des Schwerpunkts nach den Richtungen der neuen X und Y durch ξ und v, so ist

$$(11)\quad h^2(x-\xi)^2+h^2(y-v)^2=a^2(h-z)^2.$$

Die durch den Vereinigungspunkt A gehende, auf der Seite der positiven Z gelegene Kante AB aber lässt sich als Durchschnitt zweier Ebenen betrachten, von denen die eine durch die Axe der Y geht, also vertikal steht und mit der Ebene der XY den Winkel E bildet, während die andere durch gegenwärtige Axe der Z geht und gegen die Coordinatenebene XZ unter dem Winkel NAD geneigt ist, dessen Sinus und Cosinus in §. 7. gleich $\frac{\cos\Gamma}{\sqrt{1-\sin E^2\sin\Gamma^2}}$ beziehungsweise $\frac{\cos E\sin\Gamma}{\sqrt{1-\sin E^2\sin\Gamma^2}}$ gefunden worden ist. Diese Kante wird also durch das System folgender beiden Gleichungen repräsentirt:

$$x\sin E-z\cos E=0,\quad x\cos\Gamma-y\cos E\sin\Gamma=0,$$

welche den beiden eben bezeichneten Ebenen entsprechen. Substituirt man die Werthe, welche sich hieraus für x und y ergeben, nämlich

$$(12)\quad x=z\operatorname{cotg}E,\quad y=\frac{z\operatorname{cotg}\Gamma}{\sin E},$$

in die Gleichung (11), so erhält man eine Gleichung, welche nur z enthält und in Beziehung auf diese Variable vom zweiten Grade ist, und durch deren Auflösung die Werthe dieser Coordinate für diejenigen beiden Punkte sich ergeben müssen, in denen die Kantenlinie AB im Allgemeinen, so lange die Richtung des von A nach dem Schwerpunkt des Doppelkegels gezogenen Halbmessers noch nicht näher bestimmt worden ist, durch die Kegelfläche P hindurchdringt. Bezeichnen wir aber zu gleicher Zeit denjenigen spitzen Winkel, auf dessen mögliche Existenz es ankommt, welchen nämlich der eben erwähnte Halbmesser mit dem in A vertikal stehenden Radius AJ bildet (etwa den Winkel JAK in Fig. 2.) mit ψ, so dass $\xi=a\sin\psi$ und $v=a\cos\psi$ ist; so erhält die gedachte Gleichung die Form

$$h^2(z\operatorname{cotg}E-a\sin\psi)^2+h^2\left(\frac{z\operatorname{cotg}\Gamma}{\sin E}-a\cos\psi\right)^2=a^2(h-z)^2,$$

d. h.

$$(h^2\cos E^2+h^2\operatorname{cotg}\Gamma^2-a^2\sin E^2)\,z^2$$
$$-2ha\,(h\sin E\cos E\sin\psi+h\operatorname{cotg}\Gamma\sin E\cos\psi-a\sin E^2)\,z=0.$$

Die eine Wurzel hiervon ist $z=0$, und dazu gehört wegen (12) auch $x=0$, $y=0$, durch welche Coordinatenwerthe nur, wie es die Natur der Sache verlangt, angegeben wird, dass die Kantenlinie mit der Kegelfläche den Punkt A gemeinschaftlich habe.

Digitized by Google

Nach Absonderung dieser ersten Wurzel wird aber die andere, wenn man zugleich alle Glieder der Gleichung durch h^2 dividirt und für $\frac{a}{h}$ den Werth cotg ϑ einführt,-

$$(13)\quad z=\frac{2a\sin E(\cos E\sin\psi+\operatorname{cotg}\Gamma\cos\psi-\operatorname{cotg}\vartheta\sin E)}{\cos E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2-\operatorname{cotg}\vartheta^2\sin E^2}.$$

Nun muss aber, wie bereits in §. 4. bemerkt worden, allemal $\operatorname{tang}\vartheta>\operatorname{tang}E$ sein, also

$$(14)\quad \cos E>\operatorname{cotg}\vartheta\sin E,$$

und deshalb ist der Nenner des für z gefundenen Ausdrucks (13), wie gross auch sonst die spitzen Winkel E, Γ, ϑ angenommen werden mögen, eine positive Grösse, woraus folgt, dass das Vorzeichen von z sich lediglich nach dem in Klammern eingeschlossenen Factor des Zählers richtet. Setzen wir daher

$$(15)\quad \cos E\sin\psi+\operatorname{cotg}\Gamma\cos\psi=\operatorname{cotg}\vartheta\sin E+\delta,$$

wo δ eine noch unbestimmte Grösse bezeichnen soll, so wird z zugleich mit dieser Grösse δ positiv oder negativ oder Null. Aus dieser letzten Gleichung erhalten wir aber, wenn wir anstatt $\operatorname{cotg}\vartheta\sin E+\delta$ der Kürze wegen μ schreiben und quadriren,

$$\operatorname{cotg}\Gamma^2\cos\psi^2-2\mu\operatorname{cotg}\Gamma\cos\psi+\mu^2=\cos E^2(1-\cos\psi^2),$$

also

$$\cos\psi=\frac{\mu\operatorname{cotg}\Gamma\pm\cos E\sqrt{\cos E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2-\mu^2}}{\cos E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2}.$$

Nun bemerke man, dass zwar die von dem Winkel ψ abhängige Lage des Doppelkegels so beschaffen sein kann, dass wenn man sich seine auf der Seite der positiven z gelegene Hälfte, nämlich die Kegelfläche P, welche wir hier allein in Betrachtung gezogen haben, über die gemeinschaftliche Basis beider Kegel hinaus erweitert und die gleichfalls auf die positive Seite der z fallende Kantenlinie AB über A hinaus verlängert denkt, diese Verlängerung in jene Fortsetzung der Kegelfläche eindringe und irgendwo auf der Seite der negativen z noch einen zweiten Durchschnittspunkt mit ihr gemein habe, dass es aber den Bedingungen unserer Aufgabe, nämlich der Undurchdringlichkeit der Kante AB widerstreiten würde, auf der Seite der positiven z einen solchen zweiten Durchschnittspunkt zu denken. Da also der in (13) für z erhaltene Werth entweder negativ ausfallen muss (in welchem Falle den Formeln (12) zu Folge auch die zugehörigen Coordinaten x und y negativ sind), oder auch sich auf Null reduciren kann, wodurch angezeigt sein würde, dass die Kantenlinie AB keine Sekante der Kegelfläche sei, sondern dieselbe im Punkte A tangire, und da das Vorzeichen von z, wie oben bemerkt, mit dem Vorzeichen von δ übereinstimmt; so darf auch in dem für $\cos\psi$ gefundenen Ausdruck δ nur als eine negative Zahl oder als Null be-

trachtet werden. Aus der Gleichung (15) aber ist ersichtlich, da die in dem linken Theil dieser Gleichung erscheinenden Winkel ψ, E, Γ alle als spitz und positiv angenommen sind, dass $\mu = \text{cotg}\,\vartheta \sin E + \delta$ eine positive Grösse, nämlich dass der numerische Werth von δ kleiner als $\text{cotg}\,\vartheta \sin E$ sein müsse, und hieraus folgt weiter, dass in dem für $\cos\psi$ gefundenen Werthe die Wurzelgrösse positiv zu nehmen sei. Denn nach (14) ist $\cos E > \text{cotg}\,\vartheta \sin E$, also auch, weil δ keine positive Grösse sein kann, $\cos E > \mu$. Demgemäss ist dann auch weiter

$$\sqrt{\text{cotg}\,\Gamma^2 + \cos E^2 - \mu^2} > \text{cotg}\,\Gamma;$$

also, wenn man diese beiden letzten Ungleichungen mit einander multiplicirt, um so mehr

$$\cos E \sqrt{\text{cotg}\,\Gamma^2 + \cos E^2 - \mu^2} > \mu\, \text{cotg}\,\Gamma.$$

Wollte man daher die Wurzelgrösse negativ nehmen, so würde $\cos\psi$ negativ ausfallen, also auf einen stumpfen Winkel ψ hinweisen, welches der hier in Frage stehende nicht sein kann.

Aus der Gleichung (15) erhält man nun weiter

$$\sin\psi = \frac{\mu - \text{cotg}\,\Gamma \cos\psi}{\cos E},$$

also durch Substitution des für $\cos\psi$ gefundenen Ausdrucks:

$$(16)\quad \sin\psi = \frac{\mu \cos E - \text{cotg}\,\Gamma . \sqrt{\text{cotg}\,\Gamma^2 + \cos E^2 - \mu^2}}{\cos E^2 + \text{cotg}\,\Gamma^2}.$$

Diese Formel lehrt, wenn $\psi = 0$ angenommen werden soll, für welche Annahme man den Zähler nur gleich Null zu setzen braucht, dass dann $\mu^2 = \text{cotg}\,\Gamma^2$, also weil μ nach dem oben Bemerkten eine positive Grösse sein muss, $\mu = \text{cotg}\,\Gamma$, folglich $\delta = \text{cotg}\,\Gamma - \text{cotg}\,\vartheta \sin E$ sei, während für diese Annahme sich aus (13) für den zweiten Durchschnittspunkt der Kantenlinie AB mit der Kegelfläche P der Coordinatenwerth

$$(17)\quad z = \frac{2a \sin E(\text{cotg}\,\Gamma - \text{cotg}\,\vartheta \sin E)}{\cos E^2 + \text{cotg}\,\Gamma^2 - \text{cotg}\,\vartheta^2 \sin E^2}$$

ergiebt. Damit dieser Werth nicht positiv ausfalle, darf $\text{cotg}\,\Gamma$ nicht grösser als $\text{cotg}\,\vartheta \sin E$ sein, und wir haben daher für die Möglichkeit den Doppelkegel überhaupt so zu legen, dass er mit einem Punkte der Peripherie seines Grundkreises den Vereinigungspunkt der beiden Kanten AB und AC berührt und sein Schwerpunkt sich vertikal über diesem Vereinigungspunkt befindet, die Bedingungen

$$\text{cotg}\,\vartheta \sin E > \text{cotg}\,\Gamma,$$

oder

$$\text{cotg}\,\vartheta \sin E = \text{cotg}\,\Gamma.$$

Digitized by Google

Diese beiden Fälle müssen aber wohl unterschieden und einzeln näher untersucht werden. Es kann nämlich $\sin\psi$ überhaupt nur alsdann einen von Null verschiedenen und positiven Werth erhalten, wenn die durch μ vorgestellte Summe $>\operatorname{cotg}\Gamma$ ist, wovon man sich sofort überzeugt, wenn man dem Zähler der Formel (16) die Gestalt giebt

$$\sqrt{\mu^2(\cos E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2)-\mu^2\operatorname{cotg}\Gamma^2}-\sqrt{\operatorname{cotg}\Gamma^2(\cos E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2)-\mu^2\operatorname{cotg}\Gamma^2}.$$

Da aber für jeden Werth von ψ immer $\mu=\operatorname{cotg}\vartheta\sin E+\delta$ ist, so liesse sich für ein solches Verhältniss der Constanten ϑ, E, Γ, wobei $\operatorname{cotg}\vartheta\sin E=\operatorname{cotg}\Gamma$ wird, die mit ψ gleichzeitig variirende Grösse μ nur dadurch grösser als $\operatorname{cotg}\Gamma$ machen, dass man der Grösse δ einen positiven Werth beilegte, was mit dem Umstande, dass z nothwendig entweder negativ oder gleich Null sein muss, nicht vereinbar ist. Wenn daher die Constanten ϑ, E, Γ wirklich in dem Verhältniss zu einander stehen, dass die Gleichung $\operatorname{cotg}\vartheta\sin E=\operatorname{cotg}\Gamma$ erfüllt wird, so kann man zwar dem Doppelkegel eine solche Lage anweisen, dass er auf dem Vereinigungspunkt der beiden unterstützenden Kanten ruht und sein Schwerpunkt sich in der von diesem Punkt aufwärts gezogenen Vertikallinie befindet, also $\psi=0$ ist, und die Gleichungen (17) und (12) zeigen, dass die beiden Kanten alsdann Tangenten der Kegelflächen sind; allein irgend eine Drehung desselben um einen positiven Winkel ψ wird unter diesen Umständen durch den Widerstand der Kanten unmöglich gemacht werden. Auch giebt durch Substitution des Werths $\operatorname{cotg}\vartheta=\frac{\operatorname{cotg}\Gamma}{\sin E}$ und des daraus folgenden

$$\sin\vartheta^2=\frac{\sin E^2}{\sin E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2}$$

die Formel (9), sobald man Zähler und Nenner derselben vorerst durch $\sin\vartheta$ dividirt, den Werth

$$\sin\omega=\frac{\cos E\sin\Gamma\cos\Gamma-\cos\Gamma\sqrt{1-(\sin E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2)\sin\Gamma^2}}{1-\sin E^2\sin\Gamma^2}$$

$$=\frac{\cos\Gamma\left[\cos E\sin\Gamma-\sqrt{1-(1-\cos E^2)\sin\Gamma^2-\cos\Gamma^2}\right]}{1-\sin E^2\sin\Gamma^2}$$

$$=0,$$

woraus hervorgeht, dass der Doppelkegel unter diesen Umständen, man mag ihn auf die Schenkel der Unterlage hinlegen in welchen Punkten man will, nicht im Stande ist von selbst weiter zu rollen.

Wenn dagegen $\operatorname{cotg}\vartheta\sin E>\operatorname{cotg}\Gamma$ ist, so bleibt auch $\mu=\operatorname{cotg}\vartheta\sin E+\delta$ grösser als $\operatorname{cotg}\Gamma$, so lange die negative Grösse δ dem numerischen Werthe nach die Differenz $\operatorname{cotg}\vartheta\sin E-\operatorname{cotg}\Gamma$ nicht überschreitet; und innerhalb dieses Grenzwerths und dem Werthe $\delta=0$ ist denn auch $\sin\psi$ von Null verschiedener, positiver und reeller Werthe fähig, — reeller Werthe aus dem Grunde,

weil wegen $\mu < \operatorname{cotg}\vartheta \sin E < \cos E$ (zu Folge (14)) die Wurzelgrösse in dem Ausdruck (16) niemals imaginär ausfallen kann. Nun zeigt aber diese Formel (16) auch, dass der W. ψ bei constanten Werthen von E und Γ desto grösser wird, je grösser μ ist; und weil, wenn μ wachsen soll, der numerische Werth von δ abnehmen muss, so erreicht der W. ψ sein Maximum, sobald man $\delta = 0$, also $\mu = \operatorname{cotg}\vartheta \sin E$ annimmt. Für dieses Maximum hat man daher den Werth

$$(18)\quad \sin\psi = \frac{\operatorname{cotg}\vartheta \sin E \cos E - \operatorname{cotg}\Gamma \sqrt{\operatorname{cotg}\Gamma^2 + \cos E^2 - \operatorname{cotg}\vartheta^2 \sin E^2}}{\cos E^2 + \operatorname{cotg}\Gamma^2}.$$

Dieser Werth ist aber mit dem in (10) für $\sin\omega$ gefundenen identisch, also das Maximum von $\psi = \omega$, nämlich W. $JAK = DAZ$ (Fig. 2), woraus folgt, dass der Radius KA alsdann senkrecht auf AZ steht. Wenn daher die Bedingung $\operatorname{cotg}\vartheta \sin E > \operatorname{cotg}\Gamma$ erfüllt ist und man alsdann den Doppelkegel so auf den Vereinigungspunkt der Kanten AB und AC legt, dass sein Schwerpunkt nur ein wenig aus der vertikalen Richtung AJ abweichend in die Winkelebene JAN fällt, so findet zunächst eine Umdrehung um den Berührungspunkt A Statt und zwar so lange, bis der Radius AK mit den Halbmessern MS, $M'S'$, u. s. f. gleiche Neigung gegen die Horizontallinie AD erhalten hat, d. h. bis die durch die Axe des Kegels und den Berührungspunkt A gelegte Ebene mit allen andern Berührungs-Axenschnitten PSM, $P'S'M'$ parallel geworden ist, — und dann erst beginnt die fortrollende Bewegung. In dem Augenblicke also, wenn der Doppelkegel aufhört mit der Peripherie seines Grundkreises den Punkt A zu berühren, ist seine Stellung ganz die nämliche, wie wir sie in den vorhergehenden §§. für einen beliebigen andern Zeitpunkt während seiner fortrollenden Bewegung haben kennen gelernt. Zugleich ergiebt sich aus diesen Betrachtungen, dass die von Kraft (l. c. §. 8.) angegebene Formel $\operatorname{tang} ANK = \operatorname{tang} NAZ = \frac{AK}{AN} = \frac{a}{h \operatorname{cotg}\eta} = \frac{\operatorname{tang}\eta}{\operatorname{tang}\vartheta}$ (weil er nämlich glaubte, das $\Delta\, ANK$ sei bei A rechtwinklig) falsch ist und heissen muss $\sin ANK = \sin NAZ = \frac{\operatorname{tang}\eta}{\operatorname{tang}\vartheta}$, wie wir sie in §. 2. aufgestellt haben.

§. 10.

Ish wende mich jetzt zur Betrachtung der auf der Kegeloberfläche liegenden Curve, in welcher alle in Fig. 1. mit T, T', u. s. f. bezeichneten, nach und nach mit der Kante AB in Berührung kommenden Punkte gelegen sind. Diese Curve kann man offenbar auch auf die Art entstehen lassen, dass man sich den Doppelkegel selbst als stillstehend vorstellt, aber die Kante AB dergestalt an seiner krummen Oberfläche rings herumführt, dass sie fortwährend die Kegelfläche tangirt und zugleich gegen die durch den jedesmaligen Berührungspunkt T gezogene Kegelseite PS unter einem constanten Winkel BTB geneigt bleibt, dessen trigonometrische

Digitized by Google

Tangente durch $\frac{AS}{ST}=\frac{AZ}{BZ}$ angegeben wird, weil nämlich alle Berührungs-Axenschnitte auf der Geraden AZ perpendikulär stehen (§. 2.). Nehmen wir jetzt in Fig. 3. den Punkt O in der Peripherie des Grundkreises als denjenigen Punkt an, von welchem die gedachte Schneckenlinie $OTKL$ ihren Anfang nimmt und welcher also ursprünglich mit dem Vereinigungspunkt der beiden Kanten der Unterlage in Berührung war, und T für einen beliebigen andern Punkt der Curve, ATb für die zugehörige Berührungslinie. Da jede solche Berührungslinie gegen die demselben Punkt entsprechende Kegelseite, oder wie man bei Rotationsflächen im Allgemeinen zu sprechen pflegt, gegen den Meridian PTS unter einem constanten Winkel geneigt ist, so ist die Curve selbst eine sogenannte Kegelloxodrome. Zieht man auch am Punkte S in der Ebene des Grundkreises an dessen Peripherie die Tangente SA, so liegt diese mit TA in einer Ebene und beide schneiden sich also in einem Punkte, welcher aus einem sogleich deutlich werdenden Grunde mit A bezeichnet worden ist. Es sei nun ferner Av die Projection der Tangente AT auf die Ebene des Grundkreises und OW die Projection der Loxodrome OT; so muss nach einem bekannten Satze Av zugleich die dem Punkte W entsprechende Tangente an die Curve OW sein. Nun ist aber auch in Fig. 1. und Fig. 2. die Gerade AW nichts anderes, als die Projection der berührenden Kantenlinie AT auf die Ebene des Grundkreises, folglich muss der in Fig. 3. mit AWS bezeichnete Winkel mit dem gleichnamigen in den beiden andern Figuren identisch, nämlich gleich $(90^\circ - NAZ)$ sein.

Sobald man aber jetzt, um die Curve OW auf Polarcoordinaten zu beziehen, den Pol in M und OM als Polaraxe annimmt, so ist $AWS = MWv$ der Winkel, welchen die in der Richtung des wachsenden Bogens gezogene Tangente mit dem nach dem Berührungspunkt gezogenen Radius Vector bildet, und da dieser Winkel gegenwärtig von dem veränderlichen Polarwinkel OMW unabhängig und stets gleich dem Complement des constanten und gegebenen W. NAZ sein soll, so folgt, nach der bekannten charakteristischen Eigenschaft der logarithmischen Spirallinien, dass die in der Ebene des Grundkreises liegende Curve OW eine logarithmische Spirale ist. Als Differenzialgleichung derselben zwischen den Variablen $OMW=\varphi$ und $MW=u$ haben wir sogleich

$$-\frac{ud\varphi}{du}=\operatorname{tang} MWv=\operatorname{cotg} NAZ,$$

und wenn wir der Kürze wegen $\operatorname{tang} NAZ=\varkappa$ setzen, so dass der Formel (2) in §. 4. zu Folge

$$(19)\quad \varkappa=\frac{\operatorname{tang}\eta}{\sqrt{\operatorname{tang}\vartheta^2-\operatorname{tang}\eta^2}}=\frac{\sin\eta\cos\vartheta}{\sqrt{\sin(\vartheta+\eta)\sin(\vartheta-\eta)}}$$

ist, so giebt die vorige Gleichung $\frac{du}{u}=-\varkappa d\varphi$, also

$$lu=-\varkappa\varphi+\text{const.}$$

Digitized by Google

Für $\varphi=0$ soll $u=a$ werden, also muss $const.=la$ sein, und die Gleichung der Curve ist

$$(20)\quad l\frac{u}{a}=-\varkappa\varphi \quad \text{oder} \quad u=ae^{-\varkappa\varphi}.$$

§. 11.

Als die nächste und sich einem Jeden unmittelbar aufdrängende Folgerung aus dem Umstande, dass die Projection der auf der Kegelfläche entstandenen Schneckenlinie eine logarithmische Spirale ist, dass also der Radius Vector u erst für $\varphi=\infty$ verschwindet, stellt sich nun das Resultat heraus, dass auch diese Schneckenlinie nicht bis in die Kegelspitze hinaufläuft, **dass also auch der Doppelkegel PQ erst nach unzählig vielen Umwälzungen theoretisch aufgefasst mit seinen Scheiteln P und Q auf den Kanten der Unterlage AB und AC aufliegen würde.** Von der Frage freilich, ob gegen das Ende der Bewegung hin durch die beschleunigte Geschwindigkeit ein Fortgleiten des Doppelkegels eintreten werde, müssen wir hierbei, bevor nicht die Grösse der Reibung näher in Untersuchung gezogen worden, noch absehen.

Obwohl aber eine solche Kegelloxodrome sich nur asymptotisch dem Scheitel des Kegels nähert, so ist man dennoch im Stande dieselbe vom Anfangspunkt O an gerechnet bis zum Scheitel hin vollständig zu **rectificiren**, so dass die auf einander folgenden einzelnen Windungen die Glieder einer geometrischen Progression darstellen, deren Summenausdruck sich gleich AB ergeben wird.

Bezeichnen wir nämlich das Differenzial des Bogens der Loxodrome am Punkte T durch ds und das entsprechende Differenzial ihrer Projection am Punkt W mit ds', so ist $ds=ds'.\sec WAT$. Nun muss aber, wenn wir die Veränderliche $z=WT$ in Fig. 3. als gleichgross mit der gleichnamigen Linie in Fig. 1. annehmen, auch SW in beiden Figuren gleich sein, woraus sofort, da auch die Winkel bei S und W in den $\Delta\Delta$ SAW übereinstimmen, die Congruenz dieser Dreiecke hervorgeht. Hieraus folgt weiter, dass auch AW in beiden Figuren einerlei Grösse haben müsse, dass also auch die $\Delta\Delta$ ATW die nämlichen sind, daher ist in Fig. 3. W. $WAT=\eta$, und $s=s'.\sec\eta$. Ferner haben wir, indem wir den W. OMW fortwährend durch φ bezeichnen,

$$ds'=\sqrt{u^2d\varphi^2+du^2}=-\sqrt{(u^2\frac{d\varphi^2}{du^2}+1)}\,du,$$

wo das Vorzeichen $(-)$ genommen werden musste, weil wenn s' zunehmen soll, du negativ ist. Und wenn wir hier für $\frac{d\varphi}{du}$ den aus (20) fliessenden Werth $-\frac{1}{a\varkappa e^{-\varkappa\varphi}}=-\frac{1}{\varkappa u}$ substituiren und integriren, so erhalten wir

$$s'=\text{const.}-u\sqrt{\frac{1}{\varkappa^2}+1},$$

Digitized by Google

oder weil dem Anfangswerthe $s'=0$ der Radius Vector $u=MO=a$ entspricht,

$$(21)\quad \begin{cases} s'=(a-u)\sqrt{\frac{1}{\varkappa^2}+1}, \\ s=(a-u)\sec\eta.\sqrt{\frac{1}{\varkappa^2}+1}. \end{cases}$$

Um diese Ausdrücke geometrisch anschaulich zu machen, brauchen wir nur zu bemerken, dass dem vorigen §. zu Folge $\frac{1}{\varkappa}=$ $\cotg NAZ=\tang AWS$, also $\sqrt{\frac{1}{\varkappa^2}+1}=\sec AWS=\operatorname{cosec} NAZ$ ist, denn dadurch haben wir sogleich

$$s'=SW.\sec AWS=AW$$

und

$$s=AW.\sec WAT=AT.$$

Dehnen wir die Gleichungen (21) so weit aus, bis $u=0$, nämlich $\varphi=\infty$ wird, und blicken dabei auf Fig. 1., so erhalten wir

$$(22)\quad \begin{cases} s'=a\operatorname{cosec} NAZ=\frac{NZ}{\sin NAZ}=AN=\frac{h}{\tang\eta} \\ \text{und} \\ s=AN.\sec\eta=\frac{AN}{\cos NAB}=AB=\frac{h}{\sin\eta} \end{cases}$$

wie vorauszusehen war.

Substituiren wir jedoch in dem bei (21) für s gefundenen Ausdrucke für u seinen Werth $ae^{-\varkappa\varphi}$ und für $a\sec\eta.\sqrt{\frac{1}{\varkappa^2}+1}$ den Werth $AB=\frac{h}{\sin\eta}$, so dass

$$(23)\quad s=\frac{h}{\sin\eta}(1-e^{-\varkappa\varphi})$$

wird; setzen darin allmählig $\varphi=2\pi$, 4π, 6π u. s. f. und subtrahiren jedesmal von dem späteren Resultate das Vorhergehende, so ergeben sich die Ausdrücke für die auf einander folgenden Windungen der Loxodrome, nämlich Länge der

ersten Windung $s_1=\frac{h}{\sin\eta}(1-e^{-2\varkappa\pi})$,

zweiten Windung $s_2=\frac{h}{\sin\eta}(1-e^{-2\varkappa\pi})e^{-2\varkappa\pi}=s_1.e^{-2\varkappa\pi}$,

Digitized by Google

dritten Windung $s_3 = \frac{h}{\sin\eta}(1 - e^{-2\varkappa\pi}) e^{-4\varkappa\pi} = s_1 (e^{-2\varkappa\pi})^2$,

u. s. f.,

überhaupt Länge der $(n+1)$ten Windung $s_n = s_1 (e^{-2\varkappa\pi})^n$,

so dass diese Windungen in geometrischer Progression abnehmen.

§. 12.

Auch die Breiten, oder wenn man lieber will, indem man sich die Axe des Kegels vertikal gestellt denkt, die Höhen der auf einander folgenden Windungen*) lassen sich leicht bestimmen, und auch diese nehmen in geometrischer Progression ab. Es ist nämlich überhaupt, wie man aus dem $\Delta\ STW$ in Fig. 3. sieht, $WT = z = (a-u)\tan\vartheta = a \tan\vartheta (1 - e^{-\varkappa\varphi}) = h(1 - e^{-\varkappa\varphi})$, oder wegen (23)

$$(24) \quad z = s . \sin\eta,$$

wie auch schon das $\Delta\ AWT$ lehrt, in welchem $AT = OT = s$ ist. Nennen wir nun denjenigen Werth von z, welcher dem Rotationswinkel $\varphi = 2\pi$ entspricht, die Höhe der ersten Windung, so ist diese

$$z_1 = h(1 - e^{-2\varkappa\pi}) = s_1 . \sin\eta,$$

und sofort ergeben sich hiernach für die Höhe der zweiten, dritten u. s. f. Windungen die Werthe

$$z_2 = z_1 . e^{-2\varkappa\pi},$$

$$z_3 = z_1 (e^{-2\varkappa\pi})^2$$

u. s. f.,

überhaupt

$$z_{n+1} = z_1 (e^{-2\varkappa\pi})^n.$$

§. 13.

Da in Fig. 3., wie so eben bewiesen worden, die Geraden AW und AT beziehungsweise gleiche Länge haben mit den Curven OW und OT, so kann das ebene Dreieck AWT durch Krümmung mit dem auf der logarithmischen Spiral-Cylinderfläche liegenden $\Delta\ OWT$ in Congruenz gebracht werden. Hieraus wird man vielleicht die Ansicht gewinnen, dass gleichzeitig mit dieser Krümmung des Dreiecks AWT auch das ebene Dreieck AST sich

*) Bestreicht man die Kanten der Unterlage AB und AC mit einer abfärbenden Substanz, z. B. mit Kreide, so werden, nachdem der Doppelkegel darüber hingerollt ist, diese Windungen deutlich sichtbar sein.

Digitized by Google

über das auf der Kegelfläche liegende Δ *OST* in völliger Congruenz ausbreite, und diese Ansicht, auf die Figur 1. übergetragen, würde, weil dann die Linie *AS* immer gleiche Länge mit dem abgerollten Bogen des Grundkreises hätte, zu dem weitern und wichtigen Schluss führen, dass jeder in der Peripherie des Grundkreises gelegene Punkt während der rotirenden Bewegung des Doppelkegels eine gemeine Cykloide beschriebe. So ist es aber nicht, und die obige Voraussetzung, dass die Gerade *AS* auf dem Kreisbogen *OS* hergekrümmt werden könne, würde irrig sein. Denn es ist dieser Kreisbogen $OS = a\varphi$, dagegen $AS = SW.\mathrm{tang}\, AWS = \frac{1}{k}(a - u) = a\left(\frac{1 - e^{-\varkappa\varphi}}{\varkappa}\right)$, und dieser letzte Ausdruck entwickelt giebt

$$AS = a\varphi - \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varkappa^2\varphi^2}{2!} - \frac{\varkappa^3\varphi^3}{3!} + \frac{\varkappa^4\varphi^4}{4!} - \dots\right],$$

welches keineswegs gleich $a\varphi$ ist.

Und was die Curve anbelangt, welche derjenige in der Peripherie des Grundkreises befindliche Punkt, der am Anfang der rollenden Bewegung mit dem Vereinigungspunkt der Kanten in Berührung war, während dieser Bewegung beschreibt, so sieht man leicht mit Beihülfe von Fig. 1. ein, dass, wenn *A* zum Ursprung rechtwinkliger Coordinaten und *ASZ* als Abscissenaxe angenommen wird, die Gleichung derselben das Resultat der Elimination des Winkels φ aus den beiden Gleichungen

$$y = MS - a\cos\varphi = a(1 - \cos\varphi),$$

$$x = AS - a\sin\varphi = \frac{a}{\varkappa}(1 - e^{-\varkappa\varphi}) - a\sin\varphi$$

sein werde. Diese Gleichung ist demnach

$$(25)\quad x = \frac{a}{\varkappa}\left[1 - e^{-\varkappa \arccos\frac{a-y}{a}}\right] - \sqrt{2ay - y^2}.$$

§. 14.

In allen diesen Gleichungen ist der Werth der Constante $\varkappa$ nach der Formel (19) aus den ursprünglich gegebenen Grössen zu berechnen, jedoch verdient noch besonders bemerkt zu werden die einfache Relation zwischen dieser Constante und der Tangente des unveränderlichen Winkels, unter welchem die Loxodrome von den Meridianen der Kegelfläche geschnitten wird. Die Fig. 1. liefert nämlich sofort die Werthe

$$\mathrm{tang}\, ATS = \frac{AZ}{BZ} \quad \text{und} \quad \varkappa = \mathrm{tang}\, NAZ = \frac{NZ}{AZ},$$

woraus folgt

$$(26)\quad \varkappa = \mathrm{cotg}\, ATS . \frac{NZ}{BZ} = \cos\vartheta . \mathrm{cotg}\, ATS.$$

§. 15.

Es mögte dem Gegenstand gegenwärtiger Abhandlung zu ferne liegend scheinen, auf andere Eigenschaften der Kegelloxodrome hier weiter einzugehen; überdies findet man in dem zweiten Bande dieses Archivs, Heft 2. Seite 127., eine Abhandlung von Grebe, worin der Verf. diese Curve mit der gemeinen Schraubenlinie (Cylinderloxodrome) zusammengehalten und mehrere interessante Sätze, wiewohl nur in Form von Resultaten und ohne Beweis, zuerst aufgestellt hat. Nur die eine, freilich auch schon von Grebe aufgefundene Eigenschaft, dass der Krümmungshalbmesser für jeden Punkt der Curve eine mit der Ebene des Grundkreises parallele Lage hat, glaube ich hier noch in Kürze nachweisen zu müssen, weil ich auf diesen Satz in dem zweitfolgenden Paragraphen einen andern Schluss zu stützen gedenke.

Nehmen wir daher den Radius MO in Fig. 3. als Axe der x und ein in M darauf errichtetes in der Ebene des Grundkreises liegendes Perpendikel als die Axe der y an, während wie bisher MP die Axe der z sein soll, so ist

$$x = u\cos\varphi = ae^{-\varkappa\varphi}\cos\varphi,$$

$$y = u\sin\varphi = ae^{-\varkappa\varphi}\sin\varphi;$$

und vermöge §. 12.

$$z = h\,(1 - e^{-\varkappa\varphi});$$

also

$$dx = -[a\varkappa e^{-\varkappa\varphi}\cos\varphi + ae^{-\varkappa\varphi}\sin\varphi]\,d\varphi = -(y + \varkappa x)\,d\varphi,$$

$$dy = -[a\varkappa e^{-\varkappa\varphi}\sin\varphi - ae^{-\varkappa\varphi}\cos\varphi]\,d\varphi = (x - \varkappa y)\,d\varphi,$$

$$dz = \varkappa he^{-\varkappa\varphi}\,d\varphi;$$

und

$$d^2x = -(dy + \varkappa dx)\,d\varphi = [2\varkappa y + (\varkappa^2 - 1)\,x]\,d\varphi^2,$$

$$d^2y = (dx - \varkappa dy)\,d\varphi = [-2\varkappa x + (\varkappa^2 - 1)\,y]\,d\varphi^2,$$

$$d^2z = -\varkappa^2 he^{-\varkappa\varphi}\,d\varphi^2.$$

Nun ist aber, wenn ξ, v, ζ die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises bedeuten, welcher dem Berührungspunkt x, y, z zukommt, und wenn man der Kürze wegen

$$R = dxd^2y - dyd^2x, \qquad S = dxd^2z - dzd^2x,$$

$$T = dzd^2y - dyd^2z$$

Digitized by Google

setzt, bekanntlich

$$z-\zeta=(Tdy-Sdx)\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{R^2+S^2+T^2},$$

und mittelst der vorigen Werthe erhält man im gegenwärtigen Fall

$$T=[-2\varkappa x+(\varkappa^2-1)y+\varkappa(x-\varkappa y)]\,\varkappa he^{-\varkappa\varphi}d\varphi^2=-(y+\varkappa x)\,\varkappa he^{-\varkappa\varphi}d\varphi^2,$$

$$S=[\varkappa(y+\varkappa x)-2\varkappa y-(\varkappa^2-1)x]\,\varkappa he^{-\varkappa\varphi}\,d\varphi^2=(x-\varkappa y)\,\varkappa he^{-\varkappa\varphi}\,d\varphi^2;$$

also

$$Tdy-Sdx=0,$$

folglich $\zeta=z$, was zu beweisen war.

§. 16.

Wir hätten nun endlich unser Augenmerk noch auf diejenigen veränderlichen, aber unter sich ähnlichen Ellipsen zu richten, welche eine durch die Kante der Unterlage AB oder AC gelegte vertikale Ebene, nämlich die Erweiterung des Trapezes $EABG$ resp. $EABH$ (Fig. 1.) auf der Fläche des rollenden Doppelkegels in einem beliebigen Augenblick seiner Bewegung hervorbringen wird. Da sowohl diese schneidende Ebene, als auch die Ebene des Grundkreises vertikal stehen, so liegt deren Durchschnittslinie vertikal, woraus sogleich nach den allerersten Sätzen über die Schnitte am Kegel folgt, dass die kleine Axe einer der eben gedachten Ellipsen gleichfalls vertikal, und ihre grosse Axe horizontal laufen muss. Unbegreiflich erscheint es daher, wie Kononoff in §. 3. seiner oben citirten Abhandlung von der Annahme ausgehen konnte, die grosse Axe wäre parallel mit der Kante AB und die kleine Axe, senkrecht auf der Kante AB, ginge durch den Berührungspunkt T; und da auf diese irrthümlich vorausgesetzten Verhältnisse die Entwickelung aller seiner Formeln wesentlich gestützt ist, so lässt sich über jene Arbeit leider kein anderes Urtheil fällen, als das in der Einleitung von mir ausgesprochene.

Man sieht übrigens ein, dass es nicht im geringsten mit Schwierigkeiten verknüpft sein kann, die Halbaxen einer solchen Ellipse als Functionen von der Variablen AT oder von $TW_1=z=AT\cos\eta$ oder von einer anderen mit AT proportional wachsenden Linie, und eben so auch die Coordinaten ihres Mittelpunkts darzustellen. Da aber die zu entwickelnden Formeln etwas weitläuftig ausfallen und kein besonderes Interesse in Anspruch zu nehmen geeignet sind, so erscheint es wohl zweckmässig, dabei nicht zu verweilen und ich begnüge mich daher nur den Werth der grossen Halbaxe und das unveränderliche Verhältniss beider Halbaxen herzusetzen, nämlich

$$(27)\qquad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\sqrt{\sin(\vartheta+E)\sin(\vartheta-E)}}{\sin\vartheta},$$

$$(28)\quad \alpha = \frac{(h-z)\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+E)\sin(\vartheta-E)}\left[\cos E\sin\vartheta - \cos\vartheta\sin E\sin\omega\right]$$

$$= \frac{(h-z)\cos\vartheta\cos\omega\sqrt{\sin\vartheta^2-\sin E^2\sin\Gamma^2}}{\sin\Gamma\sin(\vartheta+E)\sin(\vartheta-E)}$$

$$= \frac{(h-z)\cos\vartheta\cos\omega\sin\Gamma\sqrt{\sin(\vartheta+\eta)\sin(\vartheta-\eta)}}{\sin\vartheta^2\sin\Gamma^2-\sin\eta^2},$$

wobei $\cos\omega$ und $\sin\omega$ nach (9) oder (10) zu berechnen sein würden

§. 17.

Ausserdem bietet sich hierbei noch die Frage dar, ob vielleicht die Ebene einer solchen Ellipse zusammenfalle mit der dem Berührungspunkt T entsprechenden Krümmungsebene der im Vorhergehenden betrachteten Kegelloxodrome, welche letztere Ebene, gleichwie die Ellipsenebene, durch die tangirende Kante AB geht, — ob nämlich diese Krümmungsebene gleichfalls eine vertikale Lage habe. Die Antwort aber wird sein: nur dann fallen beide Ebenen für jeden beliebigen Berührungspunkt T zusammen, wenn $\Gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, d. h. wenn die Kanten AB und AC horizontal laufen. Dies Resultat lässt sich durch den Calcul mittelst der Gleichung der Krümmungsebene ziemlich leicht, noch leichter jedoch durch folgendes Räsonnement erhärten. Wenn die durch den Berührungspunkt gelegte Krümmungsebene mit der durch die berührte Kante AB gelegten Vertikalebene identisch ist, so müssen auch der Krümmungshalbmesser der Kegelloxodrome und der Krümmungshalbmesser der Ellipse der Richtung nach zusammenfallen, weil beide auf der tangirenden Kante senkrecht stehen müssen. Und umgekehrt, wenn diese Krümmungshalbmesser gleiche Richtung haben, so sind jene Ebenen identisch. Nun fallen aber diese zwei Krümmungshalbmesser nur dann zusammen, wenn $\Gamma = \frac{\pi}{2}$ ist. Denn man denke sich durch den Berührungspunkt eine Ebene, welche wir der Kürze wegen M nennen wollen, perpendikulär auf die Kante AB gelegt, ferner ebenfalls durch den Punkt T eine Ebene N parallel zu der vertikalen Grundfläche des Doppelkegels, und bezeichne endlich die schon gedachte, durch die Kante AB gelegte vertikale Ebene $ABGE$ durch Q. Der Krümmungshalbmesser der Loxodrome liegt dann nicht allein in der Ebene M, sondern muss zufolge der in §. 15. bewiesenen Eigenschaft dieser Curve auch in der Ebene N liegen, fällt also in die Durchschnittslinie von M und N. Eben so muss die Richtung des Krümmungshalbmessers der Ellipse in den Durchschnitt der Ebenen M und Q fallen. Wenn nun $\Gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, so ist ausser N und Q auch M vertikal, und dann fallen also die beiden Durchschnittslinien von M und N einerseits, und von M mit Q andererseits als Durchschnittslinien dreier vertikaler, durch den nämlichen Punkt gelegter Ebenen wirklich

Digitized by Google

zusammen. Wenn dagegen $\Gamma<\frac{\pi}{2}$ ist, so ist M nicht vertikal, also kann dann weder die eine noch die andere der eben gedachten Durchschnittslinien vertikal sein. Beide können aber nun auch nicht zusammen fallen, weil ja sonst die Durchschnittslinie der Ebenen N und Q gleichfalls mit ihnen zusammenfallen müsste, während doch diese dritte Durchschnittslinie offenbar in allen Fällen vertikal laufen muss.

XXXVIII.

Ueber die Projection einer geraden Linie auf einer Ebene, auf einer Fläche überhaupt, und auf der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids insbesondere.

Von

dem Herausgeber.

I.

Projection einer geraden Linie auf einer Ebene.

§. 1.

In Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz seien

$$1)\quad y=ax+a_1,\quad z=bx+b_1$$

die Gleichungen der gegebenen geraden Linie, und

$$2)\quad Ax+By+Cz+D=0$$

sei die Gleichung der gegebenen Ebene.

Die Gleichung der projicirenden Ebene, deren Durchschnitts-

linie mit der gegebenen Ebene die gesuchte Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene ist, sei ferner

$$3)\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Da diese Ebene auf der gegebenen Ebene senkrecht steht, so hat man nach den Principien der analytischen Geometrie die Gleichung

$$AA_1+BB_1+CC_1=0,$$

und weil die gegebene gerade Linie ganz in der projicirenden Ebene liegt, so ist für jedes x

$$(A_1+aB_1+bC_1)x+a_1B_1+b_1C_1+D_1=0,$$

woraus sich die beiden Gleichungen

$$A_1+aB_1+bC_1=0,\quad a_1B_1+b_1C_1+D_1=0$$

ergeben, so dass man also nun zwischen den vier unbekannten Grössen A_1, B_1, C_1, D_1 die drei folgenden Gleichungen hat:

$$4)\quad \begin{cases} AA_1+BB_1+CC_1=0, \\ A_1+aB_1+bC_1=0, \\ a_1B_1+b_1C_1+D_1=0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man aber sogleich

$$(Ab-C)A_1+(Bb-Ca)B_1=0,$$
$$(Aa-B)A_1-(Bb-Ca)C_1=0,$$
$$a_1B_1+b_1C_1+D_1=0;$$

und sieht hieraus, dass dieselben erfüllt werden, wenn man

$$5)\quad \begin{cases} A_1=Bb-Ca, \\ B_1=-(Ab-C), \\ C_1=Aa-B, \\ D_1=a_1(Ab-C)-b_1(Aa-B) \end{cases}$$

oder

$$6)\quad \begin{cases} A_1=Bb-Ca, \\ B_1=-(Ab-C), \\ C_1=Aa-B, \\ D_1=-A(ab_1-ba_1)+Bb_1-Ca_1 \end{cases}$$

setzt. Folglich ist nach dem Obigen

$$7)\quad \left.\begin{array}{l}(Bb-Ca)x\\ -(Ab-C)y\\ +(Aa-B)z\\ -A(ab_1-ba_1)+Bb_1-Ca_1\end{array}\right\}=0$$

die Gleichung der projicirenden Ebene, und man muss nun, um die Gleichungen der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene zu finden, die Gleichungen der Durchschnittslinie der projicirenden Ebene mit der gegebenen Ebene entwickeln. Die Gleichungen dieser Durchschnittslinie sind aber nach dem Obigen unmittelbar

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}(Bb-Ca)x-(Ab-C)y+(Aa-B)z\\ -A(ab_1-ba_1)+Bb_1-Ca_1\end{array}\right\}=0;$$

und durch Elimination von z und y aus diesen beiden Gleichungen erhält man ohne Schwierigkeit als Gleichungen der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene die beiden folgenden Gleichungen:

$$8)\quad \left.\begin{array}{r}\{A(Aa-B)-C(Bb-Ca)\}x\\ +\{B(Aa-B)+C(Ab-C)\}y\\ +D(Aa-B)+C\{A(ab_1-ba_1)-Bb_1+Ca_1\}\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\{A(Ab-C)+B(Bb-Ca)\}x\\ +\{C(Ab-C)+B(Aa-B)\}z\\ +D(Ab-C)-B\{A(ab_1-ba_1)-Bb_1+Ca_1\}\end{array}\right\}=0;$$

oder, wie man hieraus leicht findet:

$$9)\quad \left.\begin{array}{l}\{(A^2+B^2+C^2)a-(A+Ba+Cb)B\}x\\ -\{A^2+B^2+C^2-(A+Ba+Cb)A\}y\\ +(Aa-B)(Cb_1+D)-(Ab-C)Ca_1\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(A^2+B^2+C^2)b-(A+Ba+Cb)C\}x\\ -\{A^2+B^2+C^2-(A+Ba+Cb)A\}z\\ +(Ab-C)(Ba_1+D)-(Aa-B)Bb_1\end{array}\right\}=0.$$

§. 2.

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der gegebenen geraden Linie, und α, β, γ die von dem einen der

Digitized by Google

beiden Theile dieser geraden Linie, in welche dieselbe durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ getheilt wird, mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel; so sind die Gleichungen der gegebenen geraden Linie bekanntlich

$$10)\quad \frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma},$$

und man hat also im Obigen

$$a=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\quad b=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha};$$

$$a_1=y_1-\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}x_1,\quad b_1=z_1-\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}x_1$$

zu setzen, wodurch man für die Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene leicht die drei folgenden Gleichungen erhält:

$$11)\quad \left.\begin{array}{c}\{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B\}x\\ -\{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A\}y\\ +\{(B\cos\gamma-C\cos\beta)x_1+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)y_1+(A\cos\beta-B\cos\alpha)z_1\}C\\ +(A\cos\beta-B\cos\alpha)D\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{c}\{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C\}y\\ -\{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B\}z\\ +\{(B\cos\gamma-C\cos\beta)x_1+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)y_1+(A\cos\beta-B\cos\alpha)z_1\}A\\ +(B\cos\gamma-C\cos\beta)D\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{c}\{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A\}z\\ -\{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C\}x\\ +\{(B\cos\gamma-C\cos\beta)x_1+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)y_1+(A\cos\beta-B\cos\alpha)z_1\}B\\ +(C\cos\alpha-A\cos\gamma)D\end{array}\right\}=0.$$

Wenn die gegebene gerade Linie die gegebene Ebene in einem Punkte schneidet, so kann man den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ in diesen Punkt legen, und da dann der Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ auch in der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene liegt, so werden die Gleichungen 11) erfüllt, wenn man in denselben für x, y, z respective x_1, y_1, z_1 setzt. Zieht man aber die durch diese Substitution hervorgehenden Gleichungen von den Gleichungen 11) ab, so erhält man als Gleichungen der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene die folgenden Gleichungen:

Digitized by Google

$$12)\quad \frac{x-x_1}{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A}$$
$$=\frac{y-y_1}{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B}$$
$$=\frac{z-z_1}{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C},$$

wobei man noch zu bemerken hat, dass natürlich

$$13)\quad Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

ist.

Bezeichnet man durch φ, ψ, χ die 180° nicht übersteigenden Winkel, die einer der beiden Theile, in welche die Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene durch den Punkt $(x_1y_1z_1)$ getheilt wird, mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst; so sind bekanntlich

$$14)\quad \frac{x-x_1}{\cos\varphi}=\frac{y-y_1}{\cos\psi}=\frac{z-z_1}{\cos\chi}$$

die Gleichungen der Projection der gegebenen Linie auf der gegebenen Ebene, und aus diesen und den Gleichungen 12) erhält man daher leicht durch Division:

$$\frac{\cos\varphi}{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A}$$
$$=\frac{\cos\psi}{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B}$$
$$=\frac{\cos\chi}{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C},$$

oder, wenn man die Nenner dieser drei Brüche der Kürze wegen respective durch F, G, H bezeichnet:

$$\frac{\cos\varphi}{F}=\frac{\cos\psi}{G}=\frac{\cos\chi}{H}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1$$

ist, so ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$15)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \pm \dfrac{F}{\sqrt{F^2+G^2+H^2}}, \\ \cos\psi = \pm \dfrac{G}{\sqrt{F^2+G^2+H^2}}, \\ \cos\chi = \pm \dfrac{H}{\sqrt{F^2+G^2+H^2}}. \end{cases}$$

Nun ist aber, wenn man der Kürze wegen

$$16)\quad K^2 = A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2$$
$$= A^2\sin\alpha^2+B^2\sin\beta^2+C^2\sin\gamma^2$$
$$-2(AB\cos\alpha\cos\beta+BC\cos\beta\cos\gamma+CA\cos\gamma\cos\alpha)$$
$$=(A\cos\beta-B\cos\alpha)^2$$
$$+(B\cos\gamma-C\cos\beta)^2$$
$$+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)^2$$

setzt, wo K eine positive Grösse bezeichnen soll, wie man leicht findet:

$$17)\quad F^2+G^2+H^2=(A^2+B^2+C^2)K^2,$$

und folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$18)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \pm \dfrac{F}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\psi = \pm \dfrac{G}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\chi = \pm \dfrac{H}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \end{cases}$$

oder, wenn man für F, G, H ihre aus dem Obigen bekannten Werthe setzt:

$$19)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \pm \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\psi = \pm \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\chi = \pm \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \end{cases}$$

immer mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander.

Digitized by Google

§. 3

Bezeichnen wir jetzt jeden der beiden 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der Theil der gegebenen geraden Linie, dem die Winkel α, β, γ entsprechen, mit den beiden Theilen ihrer Projection auf der gegebenen Ebene einschliesst, im Allgemeinen durch ω; so ist bekanntlich

$$20)\quad \cos\omega = \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi,$$

und folglich nach den Gleichungen 19), weil bekanntlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist, wie man leicht findet:

$$21)\quad \cos\omega = \pm\frac{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

d. i. nach 16)

$$22)\quad \cos\omega = \pm\frac{K}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Weil nun bekanntlich K eine positive Grösse ist, so sieht man, dass man in allen obigen Formeln für den Theil der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene, welcher mit dem Theile der gegebenen geraden Linie, dem die Winkel α, β, γ entsprechen, einen 90° nicht übersteigenden Winkel einschliesst, die obern Zeichen, dagegen für den Theil der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebnen Ebene, welcher mit dem Theile der gegebenen geraden Linie, dem die Winkel α, β, γ entsprechen, einen 90° übersteigenden Winkel einschliesst, die untern Zeichen nehmen muss.

Bezeichnen wir daher jetzt den 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel des Theils der gegebenen geraden Linie, welchem die Winkel α, β, γ entsprechen, gegen die gegebene Ebene durch i, so ist für den Theil der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene, welcher mit dem Theile der gegebenen geraden Linie, dem die Winkel α, β, γ entsprechen, den Winkel i einschliesst, nach dem Obigen:

$$23)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\psi = \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\chi = \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \end{cases}$$

Digitized by Google

und ausserdem hat man nach 22) die Formel

$$24)\quad \cos i = \frac{K}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

oder

$$25)\quad \cos i = \sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}},$$

woraus sich unmittelbar die Gleichung

$$26)\quad \sin i = \pm\frac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ergiebt, in welcher man, da $\sin i$ immer positiv ist, das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem die Grösse

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma$$

positiv oder negativ ist.

Bezeichnet man die Neigungswinkel der gegebenen Ebene gegen die Ebenen der xy, xz, yz durch $\varkappa$, λ, μ; so ist bekanntlich

$$27)\quad \begin{cases} \cos\varkappa^2 = \dfrac{C^2}{A^2+B^2+C^2}, \\ \cos\lambda^2 = \dfrac{B^2}{A^2+B^2+C^2}, \\ \cos\mu^2 = \dfrac{A^2}{A^2+B^2+C^2}; \end{cases}$$

und nach dem Obigen ist folglich, wie man nach gehöriger Substitution dieser Ausdrücke mittelst der Formeln 23) und 24) ohne Schwierigkeit findet:

$$28)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha}{\cos i} - \dfrac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{A\cos i}\cos\mu^2, \\ \cos\psi = \dfrac{\cos\beta}{\cos i} - \dfrac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{B\cos i}\cos\lambda^2, \\ \cos\chi = \dfrac{\cos\gamma}{\cos i} - \dfrac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{C\cos i}\cos\varkappa^2; \end{cases}$$

woraus sich, weil nach 27)

$$\cos\varkappa^2+\cos\lambda^2+\cos\mu^2=1$$

ist, auch leicht die Gleichung

$$29)\quad A\cos\varphi+B\cos\psi+C\cos\chi=0$$

ergiebt.

Digitized by Google

Die Winkel φ, ψ, χ entsprechen immer dem Theile der Projection der gegebenen Linie auf der gegebenen Ebene, welcher mit dem durch die Winkel α, β, γ bestimmten Theile der gegebenen geraden Linie den 90° nicht übersteigenden Winkel i einschliesst.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes in dem durch die Winkel α, β, γ bestimmten Theile der gegebenen geraden Linie, dessen Entfernung von dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ wir durch ϱ bezeichnen wollen, sind

$$x_1+\varrho\cos\alpha,\ y_1+\varrho\cos\beta,\ z_1+\varrho\cos\gamma;$$

und die Gleichungen einer jeden durch diesen Punkt gelegten geraden Linie sind folglich

$$y-y_1-\varrho\cos\beta=M(x-x_1-\varrho\cos\alpha),$$

$$z-z_1-\varrho\cos\gamma=N(x-x_1-\varrho\cos\alpha).$$

Soll diese gerade Linie auf der gegebenen Ebene, deren Gleichung

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

ist, senkrecht stehen, so muss nach den Principien der analytischen Geometrie

$$B=AM,\ C=AN,$$

also

$$M=\frac{B}{A},\quad N=\frac{C}{A}$$

sein, und die Gleichungen der durch den durch die Coordinaten

$$x_1+\varrho\cos\alpha,\ y_1+\varrho\cos\beta,\ z_1+\varrho\cos\gamma$$

bestimmten Punkt gelegten, auf der gegebenen Ebene senkrecht stehenden geraden Linie sind folglich

$$y-y_1-\varrho\cos\beta=\frac{B}{A}(x-x_1-\varrho\cos\alpha),$$

$$z-z_1-\varrho\cos\gamma=\frac{C}{A}(x-x_1-\varrho\cos\alpha);$$

oder

$$\frac{x-x_1-\varrho\cos\alpha}{A}=\frac{y-y_1-\varrho\cos\beta}{B}=\frac{z-z_1-\varrho\cos\gamma}{C}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieses Perpendikels mit der gegebenen Ebene durch X, Y, Z; so haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$\frac{X-x_1-\varrho\cos\alpha}{A}=\frac{Y-y_1-\varrho\cos\beta}{B}=\frac{Z-z_1-\varrho\cos\gamma}{C},$$

$$A(X-x_1)+B(Y-y_1)+C(Z-z_1)=0;$$

aus denen man leicht durch gewöhnliche Elimination

$$30)\quad\left\{\begin{aligned}X&=x_1+\varrho\cos\alpha-\frac{\varrho A(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2},\\ Y&=y_1+\varrho\cos\beta-\frac{\varrho B(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2},\\ Z&=z_1+\varrho\cos\gamma-\frac{\varrho C(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2};\end{aligned}\right.$$

oder

$$31)\quad\left\{\begin{aligned}X&=x_1-\varrho\,\frac{B(A\cos\beta-B\cos\alpha)+C(A\cos\gamma-C\cos\alpha)}{A^2+B^2+C^2},\\ Y&=y_1-\varrho\,\frac{C(B\cos\gamma-C\cos\beta)+A(B\cos\alpha-A\cos\beta)}{A^2+B^2+C^2},\\ Z&=z_1-\varrho\,\frac{A(C\cos\alpha-A\cos\gamma)+B(C\cos\beta-B\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2},\end{aligned}\right.$$

erhält.

Ist nun erstens C positiv, so ist wegen der dritten der Gleichungen 30) die Grösse

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma$$

positiv oder negativ, jenachdem $z_1+\varrho\cos\gamma$ grösser oder kleiner als Z ist. Wenn dagegen zweitens C negativ ist, so ist wegen der in Rede stehenden Gleichung die Grösse

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma$$

positiv odor negativ, je nachdem $z_1+\varrho\cos\gamma$ kleiner oder grösser als Z ist.

Betrachtet man von jetzt an in dem Falle, wenn

C positiv

ist, i als positiv oder negativ, jenachdem die dritten Coordinaten aller Punkte in dem durch die Winkel α, β, γ bestimmten Theile der gegebenen geraden Linie grösser oder kleiner als die dritten Coordinaten der Fusspunkte der von diesen Punkten auf die gegebene Ebene gefällten Perpendikel sind; in dem Falle dagegen, wenn

C negativ

ist, i als positiv oder negativ, jenachdem die dritten Coordinaten aller Punkte in dem durch die Winkel α, β, γ bestimmten Theile der gegebenen geraden Linie kleiner oder grösser als die dritten Coordinaten der Fusspunkte der von diesen Punkten auf die gegebene Ebene gefällten Perpendikel sind; so kann man der Gleichung 26) zufolge offenbar in völliger Allgemeinheit

$$32)\quad \sin i=\frac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

setzen.

Betrachten wir die oben durch $\varkappa$, λ, μ bezeichneten Winkel, ohne weiter ihre geometrische Bedeutung zu berücksichtigen, von jetzt an gewissermassen als blosse Hülfswinkel, so können wir

$$33)\quad \begin{cases} \cos\varkappa=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\lambda=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\mu=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{cases}$$

setzen, und erhalten nun leicht mittelst der Formeln 32) und 33)

$$34)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin i}{\cos\varkappa}=\dfrac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{C}, \\ \dfrac{\sin i}{\cos\lambda}=\dfrac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{B}, \\ \dfrac{\sin i}{\cos\mu}=\dfrac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{A}. \end{cases}$$

Mittelst dieser Ausdrücke und der Formeln 28) erhält man aber auf der Stelle

$$35)\quad \begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{\cos\alpha-\sin i\cos\mu}{\cos i}, \\ \cos\psi=\dfrac{\cos\beta-\sin i\cos\lambda}{\cos i}, \\ \cos\chi=\dfrac{\cos\gamma-\sin i\cos\varkappa}{\cos i}. \end{cases}$$

Nach dem Obigen ist bekanntlich

$$36)\quad \cos i=\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\cos\psi+\cos\gamma\cos\chi,$$

Digitized by Google

und diese Gleichung, in Verbindung mit den Formeln 35) und der bekannten Gleichung

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$

führt leicht zu der Gleichung

$$37)\quad \sin i=\cos\alpha\cos\mu+\cos\beta\cos\lambda+\cos\alpha\cos\varkappa.$$

II.

Projection einer geraden Linie auf einer Fläche überhaupt.

§. 4.

Unter der Projection einer geraden Linie auf einer beliebigen Fläche werden wir im Folgenden, um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, immer die Gesammtheit aller derjenigen Punkte dieser Fläche verstehen, welche auf derselben eine solche Lage haben, dass die in ihnen auf die Fläche errichteten Normalen die gegebene gerade Linie schneiden.

Dies vorausgesetzt, seien nun

$$38)\quad \frac{x-f}{\cos\alpha}=\frac{y-g}{\cos\beta}=\frac{z-h}{\cos\gamma}$$

die Gleichungen einer geraden Linie im Raume, wo bekanntlich f, g, h die Coordinaten eines beliebigen Punkts in dieser geraden Linie, und α, β, γ die 180° nicht übersteigenden Winkel sind, die der eine der beiden Theile, in welche die gerade Linie durch den Punkt (fgh) getheilt wird, mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst. Ferner sei

$$39)\quad u=F(x,y,z)=0$$

die Gleichung einer beliebigen krummen Fläche, und $(x_1y_1z_1)$ sei ein beliebiger Punkt auf derselben; so sind, wenn wir der Kürze wegen

$$40)\quad u_1=F(x_1,y_1,z_1)$$

setzen, und alle im Folgenden vorkommenden Differentialquotienten partielle Differentialquotienten bezeichnen, nach den Principien der analytischen Geometrie

$$41)\quad \frac{x-x_1}{\frac{du_1}{dx_1}}=\frac{y-y_1}{\frac{du_1}{dy_1}}=\frac{z-z_1}{\frac{du_1}{dz_1}}$$

die Gleichungen der Normale der durch die Gleichung 39) charakterisirten krummen Fläche in dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$. Soll nun diese Normale die gegebene gerade Linie schneiden, d. h. soll $(x_1 y_1 z_1)$ ein Punkt der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen krummen Fläche sein, so müssen die Gleichungen 38) und 41) durch dieselben x, y, z erfüllt werden, und man wird also die Bedingungsgleichung, dass die beiden in Rede stehenden Linien sich schneiden, erhalten, wenn man aus den vier Gleichungen 38) und 41) die drei Grössen x, y, z eliminirt.

Es ist aber

$$y-g=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-f),$$

$$z-h=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x-f)$$

und

$$y-y_1=\frac{\frac{du_1}{dy_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}(x-x_1),$$

$$z-z_1=\frac{\frac{du_1}{dz_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}(x-x_1);$$

also durch Subtraction der dritten von der ersten und der vierten von der zweiten Gleichung:

$$y_1-g=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-f)-\frac{\frac{du_1}{dy_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}(x-x_1),$$

$$z_1-h=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x-f)-\frac{\frac{du_1}{dz_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}(x-x_1);$$

oder

$$y_1-g=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-f)-\frac{\frac{du_1}{dy_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}\{x-f-(x_1-f)\},$$

$$z_1-h=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x-f)-\frac{\frac{du_1}{dz_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}\{x-f-(x_1-f)\};$$

Digitized by Google

woraus leicht

$$(x-f)(\frac{du_1}{dy_1}\cos\alpha-\frac{du_1}{dx_1}\cos\beta)$$
$$=\{(x_1-f)\frac{du_1}{dy_1}-(y_1-g)\frac{du_1}{dx_1}\}\cos\alpha,$$

$$(x-f)(\frac{du_1}{dz_1}\cos\alpha-\frac{du_1}{dx_1}\cos\gamma)$$
$$=\{(x_1-f)\frac{du_1}{dz_1}-(z_1-h)\frac{du_1}{dx_1}\}\cos\alpha;$$

und hieraus ferner durch Division und nach gehöriger Reduction

$$0=(x_1-f)(\frac{du_1}{dz_1}\cos\beta-\frac{du_1}{dy_1}\cos\gamma)$$
$$+(y_1-g)(\frac{du_1}{dx_1}\cos\gamma-\frac{du_1}{dz_1}\cos\alpha)$$
$$+(z_1-h)(\frac{du_1}{dy_1}\cos\alpha-\frac{du_1}{dx_1}\cos\beta)$$

oder

$$0=\{(y_1-g)\frac{du_1}{dz_1}-(z_1-h)\frac{du_1}{dy_1}\}\cos\alpha$$
$$+\{(z_1-h)\frac{du_1}{dx_1}-(x_1-f)\frac{du_1}{dz_1}\}\cos\beta$$
$$+\{(x_1-f)\frac{du_1}{dy_1}-(y_1-g)\frac{du_1}{dx_1}\}\cos\gamma$$

erhalten wird. Wenn man nun statt x_1, y_1, z_1 nur x, y, z setzt; so erhellet aus allem Vorhergehenden auf der Stelle, dass die Gleichungen der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der durch die Gleichung 39) charakterisirten Fläche die folgenden sind:

$$42)\quad u=F(x,y,z)=0,$$

$$0=(x-f)(\frac{du}{dz}\cos\beta-\frac{du}{dy}\cos\gamma)$$
$$+(y-g)(\frac{du}{dx}\cos\gamma-\frac{du}{dz}\cos\alpha)$$
$$+(z-h)(\frac{du}{dy}\cos\alpha-\frac{du}{dx}\cos\beta)$$

oder

$$43)\quad u=F(x,y,z)=0,$$

$$0=\{(y-g)\frac{du}{dz}-(z-h)\frac{du}{dy}\}\cos\alpha$$
$$+\{(z-h)\frac{du}{dx}-(x-f)\frac{du}{dz}\}\cos\beta$$
$$+\{(x-f)\frac{du}{dy}-(y-g)\frac{du}{dx}\}\cos\gamma.$$

III.

Projection einer geraden Linie auf der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids.

§. 5.

Indem wir zuerst nur in der Kürze das elliptische Sphäroid im Allgemeinen betrachten, nachher aber ausführlichere Betrachtungen über das elliptische Rotationssphäroid insbesondere anstellen werden, sei überhaupt

$$44)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

die Gleichung der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids, so ist im Vorhergehenden

$$u=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1,$$

und folglich

$$\frac{du}{dx}=\frac{2x}{a^2},\ \frac{du}{dy}=\frac{2y}{b^2},\ \frac{du}{dz}=\frac{2z}{c^2}$$

zu setzen. Also sind nach 42) oder 43)

$$45)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

$$\left.\begin{array}{l}(x-f)(\frac{z}{c^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\gamma)\\+(y-g)(\frac{x}{a^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\alpha)\\+(z-h)(\frac{y}{b^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\beta)\end{array}\right\}=0$$

oder

$$46)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

$$\left.\begin{array}{r}\{(y-g)\frac{z}{c^2}-(z-h)\frac{y}{b^2}\}\cos\alpha\\ +\{(z-h)\frac{x}{a^2}-(x-f)\frac{z}{c^2}\}\cos\beta\\ +\{(x-f)\frac{y}{b^2}-(y-g)\frac{x}{a^2}\}\cos\gamma\end{array}\right\}=0;$$

oder auch

$$47)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

$$\left.\begin{array}{r}\{(z-h)\cos\beta-(y-g)\cos\gamma\}\frac{x}{a^2}\\ +\{(x-f)\cos\gamma-(z-h)\cos\alpha\}\frac{y}{b^2}\\ +\{(y-g)\cos\alpha-(x-f)\cos\beta\}\frac{z}{c^2}\end{array}\right\}=0$$

die Gleichungen der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der durch die Gleichung 44) charakterisirten Oberfläche eines beliebigen elliptischen Sphäroids.

Für die Kugel ist $a=b=c$, und die Gleichungen der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Kugelfläche sind also nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet:

$$48)\quad x^2+y^2+z^2=a^2,$$

$$\left.\begin{array}{r}(h\cos\beta-g\cos\gamma)x\\ +(f\cos\gamma-h\cos\alpha)y\\ +(g\cos\alpha-f\cos\beta)z\end{array}\right\}=0;$$

wo aus der zweiten Gleichung erhellet, dass die in Rede stehende Projection ganz in einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene liegt; und zugleich überzeugt man sich auf der Stelle, dass diese Ebene die durch den Mittelpunkt der Kugel und die gegebene gerade Linie gelegte Ebene ist, was auch Alles der Natur der Sache ganz gemäss und aus den ersten Elementen der Stereometrie bekannt ist.

Digitized by Google

§. 6.

Um die Gleichungen der Berührungslinie der Projection einer geraden Linie auf der Oberfläche eines beliebigen Ellipsoids in einem gegebenen Punkte derselben zu finden, wollen wir der Kürze wegen, ausser wie vorher

$$u=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1,$$

auch noch

$$\begin{aligned} v=&\left\{(y-g)\frac{z}{c^2}-(z-h)\frac{y}{b^2}\right\}\cos\alpha \\ &+\left\{(z-h)\frac{x}{a^2}-(x-f)\frac{z}{c^2}\right\}\cos\beta \\ &+\left\{(x-f)\frac{x}{b^2}-(y-g)\frac{x}{a^2}\right\}\cos\gamma \end{aligned}$$

setzen; so ist

$$\frac{du}{dx}=\frac{2x}{a^2},\ \frac{du}{dy}=\frac{2y}{b^2},\ \frac{du}{dz}=\frac{2z}{c^2}$$

und, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx}=&\left\{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)z-\frac{h}{a^2}\right\}\cos\beta \\ &-\left\{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)y-\frac{g}{a^2}\right\}\cos\gamma, \\ \frac{dv}{dy}=&\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x-\frac{f}{b^2}\right\}\cos\gamma \\ &-\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z-\frac{h}{b^2}\right\}\cos\alpha, \\ \frac{dv}{dz}=&\left\{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)y-\frac{g}{c^2}\right\}\cos\alpha \\ &-\left\{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)x-\frac{f}{c^2}\right\}\cos\beta. \end{aligned}$$

Nach den Principien der Differentialrechnung hat man nun bekanntlich zur Bestimmung der Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx}$$

die beiden Gleichungen:

Digitized by Google

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0;$$

und erhält aus denselben mit Hülfe der vorher für

$$\frac{du}{dx},\frac{du}{dy},\frac{du}{dz} \text{ und } \frac{dv}{dx},\frac{dv}{dy},\frac{dv}{dz}$$

gefundenen Ausdrücke, wenn der Kürze wegen

$$A=\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z-\frac{h}{b^2}\right\}\cos\alpha$$
$$-\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x-\frac{f}{b^2}\right\}\cos\gamma,$$

$$B=\left\{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)x-\frac{f}{c^2}\right\}\cos\beta$$
$$-\left\{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)y-\frac{g}{c^2}\right\}\cos\alpha,$$

$$C=\left\{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)y-\frac{g}{a^2}\right\}\cos\gamma$$
$$-\left\{\left(\frac{1}{a^2}\ \ \frac{1}{c^2}\right)z-\frac{h}{a^2}\right\}\cos\beta$$

gesetzt wird, für die beiden in Rede stehenden Differentialquotienten leicht die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\frac{x}{a^2}-C\frac{z}{c^2}}{A\frac{z}{c^2}-B\frac{y}{b^2}},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{C\frac{y}{b^2}-A\frac{x}{a^2}}{A\frac{z}{c^2}-B\frac{y}{b^2}}.$$

Sind nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Projection der gegebenen geraden Linie auf der Oberfläche des Ellipsoids, so sind nach den Principien der höheren Geometrie, wenn der Kürze wegen

$$49)\quad A_1=\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z_1-\frac{h}{b^2}\right\}\cos\alpha$$
$$-\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x_1-\frac{f}{b^2}\right\}\cos\gamma,$$

$$B_1=\left\{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)x_1-\frac{f}{c^2}\right\}\cos\beta$$
$$-\left\{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)y_1-\frac{g}{c^2}\right\}\cos\alpha.$$

$$C_1 = \left\{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)y_1-\frac{g}{a^2}\right\}\cos\gamma$$
$$-\left\{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)z_1-\frac{h}{a^2}\right\}\cos\beta$$

gesetzt wird,

$$50)\quad \left\{\begin{aligned} y-y_1&=\frac{B_1\frac{x_1}{a^2}-C_1\frac{z_1}{c^2}}{A_1\frac{z_1}{c^2}-B_1\frac{y_1}{b^2}}(x-x_1),\\ z-z_1&=\frac{C_1\frac{y_1}{b^2}-A_1\frac{x_1}{a^2}}{A_1\frac{z_1}{c^2}-B_1\frac{y_1}{b^2}}(x-x_1)\end{aligned}\right.$$

oder

$$51)\quad \frac{x-x_1}{A_1\frac{z_1}{c^2}-B_1\frac{y_1}{b^2}}=\frac{y-y_1}{B_1\frac{x_1}{a^2}-C_1\frac{z_1}{c^2}}=\frac{z-z_1}{C_1\frac{y_1}{b^2}-A_1\frac{x_1}{a^2}}$$

die Gleichungen der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gehenden Berührenden der Projection der gegebenen geraden Linie auf der Oberfläche des Ellipsoids.

§. 7.

Ohne die vorhergehenden allgemeinen Untersuchungen, welche an sich interessant, für meinen nächsten Zweck für jetzt jedoch von geringerer Bedeutung sind, weiter auszuführen, will ich mich nun sogleich zu der Betrachtung der Projection einer geraden Linie auf der Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre zweite Axe entstandenen elliptischen Sphäroids wenden.

Weil bekanntlich

$$52)\quad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

die Gleichung der Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse, deren erste und zweite Halbaxe a und b sind, um ihre zweite Axe entstandenen elliptischen Sphäroids, welches wir in der Kürze ein Rotationsellipsoid nennen wollen, ist; so sind nach 46)

$$53)\quad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

$$\left.\begin{aligned} &\left\{(y-g)\frac{z}{b^2}-(z-h)\frac{y}{a^2}\right\}\cos\alpha\\ +&\left\{(z-h)\frac{x}{a^2}-(x-f)\frac{z}{b^2}\right\}\cos\beta\\ +&\left\{(x-f)\frac{y}{a^2}-(y-g)\frac{x}{a^2}\right\}\cos\gamma\end{aligned}\right\}=0$$

oder, wie hieraus mittelst einer einfachen Verwandlung der zweiten Gleichung leicht folgt:

$$54)\quad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{\{g\cos\gamma+(z-h)\cos\beta\}x-\{f\cos\gamma+(z-h)\cos\alpha\}y}{\{(x-f)\cos\beta-(y-g)\cos\alpha\}z}=\frac{a^2}{b^2}$$

die Gleichungen der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der durch die Gleichung 52) charakterisirten Oberfläche des Rotationsellipsoids.

Bestimmen wir aus der zweiten der beiden vorhergehenden Gleichungen z, so erhalten wir

$$55)\quad z=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{(h\cos\beta-g\cos\gamma)\,x+(f\cos\gamma-h\cos\alpha)\,y}{g\cos\alpha-f\cos\beta+\frac{a^2-b^2}{a^2}(x\cos\beta-y\cos\alpha)},$$

und folglich, wenn wir

$$56)\quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},\ 1-e^2=\frac{b^2}{a^2}$$

setzen:

$$56)\quad z=-(1-e^2)\frac{(h\cos\beta-g\cos\gamma)x+(f\cos\gamma-h\cos\alpha)y}{g\cos\alpha-f\cos\beta+e^2(x\cos\beta-y\cos\alpha)}.$$

Führen wir nun diesen Ausdruck von z in die erste der Gleichungen 54) ein, so erhalten wir zwischen x und y die folgende Gleichung:

$$57)\quad (1-e^2)\{(h\cos\beta-g\cos\gamma)x+(f\cos\gamma-h\cos\alpha)y\}^2$$
$$=(a^2-x^2-y^2)\{g\cos\alpha-f\cos\beta+e^2(x\cos\beta-y\cos\alpha)\}^2$$

§. 8.

Setzen wir jetzt, was wegen der ersten der Gleichungen 54) offenbar verstattet ist:

$$58)\quad \begin{cases} x=a\cos\Theta\cos\Omega, \\ y=a\sin\Theta\cos\Omega, \\ z=b\sin\Omega \end{cases}$$

und führen diese Ausdrücke von x, y, z in die Gleichung 56) ein, so erhalten wir nach einigen leichten Verwandlungen die Gleichung:

$$59)\quad (g\cos\alpha-f\cos\beta)\tang\Omega$$
$$=\{ae^2\cos\alpha\sin\Omega-(f\cos\gamma-h\cos\alpha)\sqrt{1-e^2}\}\sin\Theta$$
$$-\{ae^2\cos\beta\sin\Omega-(g\cos\gamma-h\cos\beta)\sqrt{1-e^2}\}\cos\Theta,$$

Digitized by Google

welche die Gleichung der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids zwischen Θ und Ω ist. Setzt man

$$60)\quad \begin{cases} R\cos\Phi = ae^2\cos\alpha\sin\Omega - (f\cos\gamma - h\cos\alpha)\sqrt{1-e^2}, \\ R\sin\Phi = ae^2\cos\beta\sin\Omega - (g\cos\gamma - h\cos\beta)\sqrt{1-e^2}; \end{cases}$$

so wird die vorhergehende Gleichung

$$61)\quad (g\cos\alpha - f\cos\beta)\tang\Omega = R\sin(\Theta - \Phi).$$

Auch ist, wie man mittelst der beiden Gleichungen 60) leicht findet:

$$g\cos\alpha - f\cos\beta = -\frac{R(\cos\alpha\sin\Phi - \cos\beta\cos\Phi)}{\cos\gamma\sqrt{1-e^2}},$$

und daher, wenn man dies in die Gleichung 61) einführt, nach einigen leichten Verwandlungen:

$$62)\quad \tang\Omega = -\frac{\cos\gamma\sin(\Theta-\Phi)\sqrt{1-e^2}}{\cos\alpha\sin\Phi - \cos\beta\cos\Phi},$$

oder auch

$$63)\quad \tang\Phi = \frac{\cos\beta - \cos\gamma\sin\Theta\cot\Omega\sqrt{1-e^2}}{\cos\alpha - \cos\gamma\cos\Theta\cot\Omega\sqrt{1-e^2}}.$$

§. 9.

Zunächst wollen wir nun den Differentialquotienten

$$\frac{d\Theta}{d\Omega}$$

entwickeln. Differentiiren wir zu dem Ende die Gleichung 61), so erhalten wir:

$$R\cos(\Theta-\Phi)\left(\frac{d\Theta}{d\Omega} - \frac{d\Phi}{d\Omega}\right) + \sin(\Theta-\Phi)\frac{dR}{d\Omega}$$
$$= (g\cos\alpha - f\cos\beta)\sec\Omega^2.$$

Durch Differentiation der beiden Gleichungen 60) ergiebt sich aber

$$\cos\Phi\frac{dR}{d\Omega} - R\sin\Phi\frac{d\Phi}{d\Omega} = ae^2\cos\alpha\cos\Omega,$$

$$\sin\Phi\frac{dR}{d\Omega} + R\cos\Phi\frac{d\Phi}{d\Omega} = ae^2\cos\beta\cos\Omega;$$

und hieraus ferner mittelst gewöhnlicher Elimination:

$$\frac{dR}{d\Omega}=ae^2(\cos\alpha\cos\Phi+\cos\beta\sin\Phi)\cos\Omega,$$

$$R\frac{d\Phi}{d\Omega}=-ae^2(\cos\alpha\sin\Phi-\cos\beta\cos\Phi)\cos\Omega.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die oben zwischen den Differentialquotienten

$$\frac{d\Theta}{d\Omega},\ \frac{d\Phi}{d\Omega},\ \frac{dR}{d\Omega}$$

gefundene Gleichung erhält man aber

$$\begin{gathered}R\cos(\Theta-\Phi)\frac{d\Theta}{d\Omega}\\ +ae^2\left\{\begin{array}{l}\sin(\Theta-\Phi)(\cos\alpha\cos\Phi+\cos\beta\sin\Phi)\\ +\cos(\Theta-\Phi)(\cos\alpha\sin\Phi-\cos\beta\cos\Phi)\end{array}\right\}\cos\Omega\\ =(g\cos\alpha-f\cos\beta)\sec\Omega^2\end{gathered}$$

oder

$$\begin{gathered}R\cos(\Theta-\Phi)\frac{d\Theta}{d\Omega}\\ +ae^2\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha(\sin(\Theta-\Phi)\cos\Phi+\cos(\Theta-\Phi)\sin\Phi)\\ -\cos\beta(\cos(\Theta-\Phi)\cos\Phi-\sin(\Theta-\Phi)\sin\Phi)\end{array}\right\}\cos\Omega\\ =(g\cos\alpha-f\cos\beta)\sec\Omega^2,\end{gathered}$$

d. i.

$$\begin{gathered}R\cos(\Theta-\Phi)\frac{d\Theta}{d\Omega}\\ +ae^2(\cos\alpha\sin\Theta-\cos\beta\cos\Theta)\cos\Omega\\ =(g\cos\alpha-f\cos\beta)\sec\Omega^2;\end{gathered}$$

also, wie man nach einigen leichten Verwandlungen findet:

$$64)\quad \frac{d\Theta}{d\Omega}=\frac{(g-ae^2\sin\Theta\cos\Omega^3)\cos\alpha-(f-ae^2\cos\Theta\cos\Omega^3)\cos\beta}{R\cos(\Theta-\Phi)\cos\Omega^2}$$

Setzt man

$$65)\quad \left\{\begin{array}{l}R^{(1)}\cos\Phi^{(1)}=\left(\frac{g}{\sin\Theta\cos\Omega^3}-ae^2\right)\cos\alpha,\\ R^{(1)}\sin\Phi^{(1)}=\left(\frac{f}{\cos\Theta\cos\Omega^3}-ae^2\right)\cos\beta;\end{array}\right.$$

so wird, wie man leicht findet:

$$66)\quad \frac{d\Theta}{d\Omega}=\cos\Omega\,\frac{R^{(1)}\sin(\Theta-\Phi^{(1)})}{R\cos(\Theta-\Phi)}.$$

Digitized by Google

§. 10.

Um nun ferner auch den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2\Theta}{d\Omega^2}$$

zu entwickeln, wollen wir zuerst die beiden Gleichungen 65) differentiiren. Dadurch erhalten wir

$$\cos\Phi^{(1)}\frac{dR^{(1)}}{d\Omega}-R^{(1)}\sin\Phi^{(1)}\frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}$$

$$=\frac{3g\cos\alpha\tang\Omega\,(1-\frac{1}{3}\cot\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\sin\Theta\cos\Omega^3},$$

$$\sin\Phi^{(1)}\frac{dR^{(1)}}{d\Omega}+R^{(1)}\cos\Phi^{(1)}\frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}$$

$$=\frac{3f\cos\beta\tang\Omega\,(1+\frac{1}{3}\tang\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\cos\Theta\cos\Omega^3};$$

und hieraus

$$\frac{dR^{(1)}}{d\Omega}=\frac{3g\cos\alpha\tang\Omega\,(1-\frac{1}{3}\cot\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\sin\Theta\cos\Omega^3}\cos\Phi^{(1)}$$

$$+\frac{3f\cos\beta\tang\Omega\,(1+\frac{1}{3}\tang\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\cos\Theta\cos\Omega^3}\sin\Phi^{(1)},$$

$$R^{(1)}\frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}=-\frac{3g\cos\alpha\tang\Omega\,(1-\frac{1}{3}\cot\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\sin\Theta\cos\Omega^3}\sin\Phi^{(1)}$$

$$+\frac{3f\cos\beta\tang\Omega\,(1+\frac{1}{3}\tang\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\cos\Theta\cos\Omega^3}\cos\Phi^{(1)}.$$

Setzt man nun

67) $$\left\{\begin{aligned}R^{(2)}\cos\Phi^{(2)}&=\frac{g\cos\alpha\,(1-\frac{1}{3}\cot\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\sin\Theta},\\R^{(2)}\sin\Phi^{(2)}&=\frac{f\cos\beta\,(1+\frac{1}{3}\tang\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\cos\Theta};\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

so wird

$$68)\quad \begin{cases} \dfrac{dR^{(1)}}{d\Omega}=3R^{(2)}\dfrac{\operatorname{tang}\Omega}{\cos\Omega^2}\cos(\Phi^{(2)}-\Phi^{(1)}), \\ R^{(1)}\dfrac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}=3R^{(2)}\dfrac{\operatorname{tang}\Omega}{\cos\Omega^2}\sin(\Phi^{(2)}-\Phi^{(1)}); \end{cases}$$

und folglich auch

$$69)\quad \frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}=\frac{\operatorname{tang}(\varphi^{(2)}-\varphi^{(1)})}{R^{(1)}}\cdot\frac{dR^{(1)}}{d\Omega},$$

oder auch

$$70)\quad \frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}=\operatorname{tang}(\varphi^{(2)}-\Phi^{(1)})\,.\,\frac{dlR^{(1)}}{d\Omega},$$

wo l wie gewöhnlich den natürlichen Logarithmus bezeichnet.

Differentiirt man nun die aus 66) sich ergebende Gleichung

$$R\cos(\Theta-\varphi)\frac{d\Theta}{d\Omega}=R^{(1)}\sin(\Theta-\varphi^{(1)})\cos\Omega,$$

so erhält man

$$71)\quad R\cos(\Theta-\varphi)\frac{d^2\Theta}{d\Omega^2}$$

$$=-R^{(1)}\sin\Omega\sin(\Theta-\varphi^{(1)})$$

$$+\left\{\sin(\Theta-\varphi^{(1)})\frac{dR^{(1)}}{d\Omega}+R^{(1)}\cos(\Theta-\varphi^{(1)})\left(\frac{d\Theta}{d\Omega}-\frac{d\varphi^{(1)}}{d\Omega}\right)\right\}\cos\Omega$$

$$-\left\{\cos(\Theta-\varphi)\frac{dR}{d\Omega}-R\sin(\Theta-\varphi)\left(\frac{d\Theta}{d\Omega}-\frac{d\varphi}{d\Omega}\right)\right\}\frac{d\Theta}{d\Omega},$$

also nach 66)

$$72)\quad R^2\cos(\theta-\varphi)^2\frac{d^2\theta}{d\Omega^2}$$

$$=-RR^{(1)}\sin\Omega\cos(\theta-\varphi)\sin(\theta-\varphi^{(1)})$$

$$+R\cos\Omega\cos(\theta-\varphi)\{\sin(\theta-\varphi^{(1)})\frac{dR^{(1)}}{d\Omega}+R^{(1)}\cos(\theta-\varphi^{(1)})(\frac{d\theta}{d\Omega}-\frac{d\varphi^{(1)}}{d\Omega})\}$$

$$-R^{(1)}\cos\Omega\sin(\theta-\varphi^{(1)})\{\cos(\theta-\varphi)\frac{dR}{d\Omega}-R\sin(\theta-\varphi)(\frac{d\theta}{d\Omega}-\frac{d\varphi}{d\Omega})\}.$$

Setzt man noch

$$73)\quad \begin{cases} R^{(2)}\cos\varphi^{(2)}=ae^2\cos\alpha\cos\Omega, \\ R^{(2)}\sin\varphi^{(2)}=ae^2\cos\beta\cos\Omega; \end{cases}$$

so ist, wie aus dem Obigen leicht erhellet:

Digitized by Google

$$74)\quad \begin{cases} \dfrac{dR}{d\Omega} = R^{(2)} \cos(\Phi^{(2)} - \Phi), \\ R\dfrac{d\Phi}{d\Omega} = R^{(2)} \sin(\Phi^{(2)} - \Phi); \end{cases}$$

also

$$75)\quad \frac{d\Phi}{d\Omega} = \frac{\operatorname{tang}(\Phi^{(2)} - \Phi)}{R} \cdot \frac{dR}{d\Omega}$$

Führt man nun diesen Ausdruck von $\frac{d\Phi}{d\Omega}$ und den Ausdruck von $\frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}$ aus 69) in die Gleichung 72) ein, so erhält man nach einigen leichten goniometrischen Reductionen:

$$76)\quad R^2 \cos(\Theta - \Phi)^2 \frac{d^2\Theta}{d\Omega^2}$$

$$= - RR^{(1)} \sin\Omega \cos(\Theta - \Phi) \sin(\Theta - \Phi^{(1)})$$

$$+ RR^{(1)} \cos\Omega \cos(\Phi - \Phi^{(1)}) \frac{d\Theta}{d\Omega}$$

$$- R^{(1)} \cos\Omega \frac{\sin(\Theta - \Phi^{(1)}) \cos(\Theta - \Phi^{(2)})}{\cos(\Phi - \Phi^{(2)})} \cdot \frac{dR}{d\Omega}$$

$$+ R\cos\Omega \frac{\cos(\Theta - \Phi) \sin(\Theta - \Phi^{(2)})}{\cos(\Phi^{(1)} - \Phi^{(2)})} \cdot \frac{dR^{(1)}}{d\Omega},$$

mittelst welcher Formel der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2\Theta}{d\Omega^2}$$

ohne grosse Schwierigkeit berechnet werden kann, wenn man nur erst mittelst der oben entwickelten Formeln die Differentialquotienten

$$\frac{d\Theta}{d\Omega},\quad \frac{dR}{d\Omega},\quad \frac{dR^{(1)}}{d\Omega}$$

berechnet hat.

§. 11.

Die Gleichungen der dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids entsprechenden Berührenden dieser Projection sind bekanntlich

$$77)\quad \begin{cases} y - y_1 = \dfrac{dy_1}{dx_1}(x - x_1), \\ z - z_1 = \dfrac{dz_1}{dx_1}(x - x_1). \end{cases}$$

Setzen wir nun auf ähnliche Art wie im Vorhergehenden

$$78)\quad \begin{cases} x_1 = a\cos\theta_1\cos\Omega_1, \\ y_1 = a\sin\theta_1\cos\Omega_1, \\ z_1 = b\sin\Omega_1; \end{cases}$$

so ist, wie man durch Differentiation leicht findet:

$$79)\quad \begin{cases} dx_1 = -a(\sin\theta_1\cos\Omega_1 d\theta_1 + \cos\theta_1\sin\Omega_1 d\Omega_1), \\ dy_1 = a(\cos\theta_1\cos\Omega_1 d\theta_1 - \sin\theta_1\sin\Omega_1 d\Omega_1), \\ dz_1 = b\cos\Omega_1 d\Omega_1; \end{cases}$$

und folglich

$$80)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{\sin\theta_1\sin\Omega_1 - \cos\theta_1\cos\Omega_1\dfrac{d\theta_1}{d\Omega_1}}{\cos\theta_1\sin\Omega_1 + \sin\theta_1\cos\Omega_1\dfrac{d\theta_1}{d\Omega_1}}, \\ \dfrac{dz_1}{dx_1} = -\dfrac{\cos\Omega_1\sqrt{1-e^2}}{\cos\theta_1\sin\Omega_1 + \sin\theta_1\cos\Omega_1\dfrac{d\theta_1}{d\Omega_1}}; \end{cases}$$

oder

$$81)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx_1} = \tang\theta_1 \cdot \dfrac{1 - \cot\theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\theta_1}{d\Omega_1}}{1 + \tang\theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\theta_1}{d\Omega_1}}, \\ \dfrac{dz_1}{dx_1} = -\dfrac{\cot\Omega_1}{\cos\theta_1} \cdot \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{1 + \tang\theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\theta_1}{d\Omega_1}}. \end{cases}$$

Also sind nach dem Obigen

$$82)\quad \begin{cases} y - y_1 = \tang\theta_1 \cdot \dfrac{1 - \cot\theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\theta_1}{d\Omega_1}}{1 + \tang\theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\theta_1}{d\Omega_1}}(x - x_1), \\ z - z_1 = -\dfrac{\cot\Omega_1}{\cos\theta_1} \cdot \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{1 + \tang\theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\theta_1}{d\Omega_1}}(x - x_1) \end{cases}$$

die Gleichungen der dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids entsprechenden Berührenden dieser Projection.

Bezeichnet man die 180° nicht übersteigenden Winkel, die der eine der beiden Theile, in welche die in Rede stehende Berührende

durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ getheilt wird, mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den primitiven paralleler Axen einschliesst, durch φ_1, ψ_1, χ_1; so ist bekanntlich

$$\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{dy_1}{dx_1},\quad \frac{\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{dz_1}{dx_1};$$

und folglich, wie man mit Hülfe der Gleichung

$$\cos\varphi_1^2+\cos\psi_1^2+\cos\chi_1^2=1$$

leicht findet, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$83)\quad\left\{\begin{aligned}\cos\varphi_1&=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2}},\\ \cos\psi_1&=\pm\frac{\frac{dy_1}{dx_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2}},\\ \cos\chi_1&=\pm\frac{\frac{dz_1}{dx_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2}}.\end{aligned}\right.$$

Nun findet man aber mit Hülfe der Gleichungen 80) leicht

$$84)\quad \sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1^2\,(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1})(1-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1})}}{\cos\Theta_1\sin\Omega_1+\sin\Theta_1\cos\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}\,{}^{*)}.$$

Also ist nach dem Obigen:

---

*) Statt

$$e^2(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1})(1-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1})$$

kann man hier und im Folgenden überall auch

$$(e+\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1})(e-\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1})$$

setzen.

Digitized by Google

$$85)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \pm\frac{\cos\theta_1\sin\Omega_1+\sin\theta_1\cos\Omega_1\dfrac{d\theta_1}{d\Omega_1}}{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1^2(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\theta_1}{d\Omega_1})(1-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\theta_1}{d\Omega_1})}},\\ \cos\psi_1 &= \pm\frac{\sin\theta_1\sin\Omega_1-\cos\theta_1\cos\Omega_1\dfrac{d\theta_1}{d\Omega_1}}{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1^2(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\theta_1}{d\Omega_1})(1-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\theta_1}{d\Omega_1})}},\\ \cos\chi_1 &= \mp\frac{\cos\Omega_1\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1^2(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\theta_1}{d\Omega_1})(1-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\theta_1}{d\Omega_1})}}; \end{aligned}\right.$$

wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen.
Setzt man

$$86)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}P_1 &= \cot\Omega_1\frac{d\theta_1}{d\Omega_1},\\ \sin Q_1 &= e\cos\Omega_1\sqrt{(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\theta_1}{d\Omega_1})(1-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\theta_1}{d\Omega_1})}; \end{aligned}\right.$$

so ist, immer mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$87)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \pm\frac{\sin\Omega_1\cos(\theta_1-P_1)}{\cos P_1\cos Q_1},\\ \cos\psi_1 &= \pm\frac{\sin\Omega_1\sin(\theta_1-P_1)}{\cos P_1\cos Q_1},\\ \cos\chi_1 &= \mp\frac{\cos\Omega_1\sqrt{(1+e)(1-e)}}{\cos Q_1}. \end{aligned}\right.$$

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, wenn ds das allgemeine Differential des Bogens der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids bezeichnet, auch leicht die Formel:

$$88)\quad ds^2=a^2\{\cos\Omega^2 d\theta^2+(1-e^2\cos\Omega^2)\,d\Omega^2\}$$

oder

$$89)\quad ds^2=a^2\,d\Omega^2\{1-e^2\cos\Omega^2+\cos\Omega^2\,(\frac{d\theta}{d\Omega})^2\}.$$

§. 12.

Die Gleichung der Ebene des dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechenden Meridians ist

$$y_1x-x_1y=0,$$

Digitized by Google

d. i. nach 78)

$$x\sin\Theta_1 - y\cos\Theta_1 = 0,$$

und die Gleichungen des in Rede stehenden Meridians sind folglich:

$$90)\quad \begin{cases} x\sin\Theta_1 - y\cos\Theta_1 = 0, \\ \dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} - 1 = 0; \end{cases}$$

oder, wie man leicht findet:

$$91)\quad \begin{cases} x\sin\Theta_1 - y\cos\Theta_1 = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2\cos{\Theta_1}^2} + \dfrac{z^2}{b^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Folglich sind die Gleichungen der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gehenden Berührenden dieses Meridians:

$$92)\quad \begin{cases} y - y_1 = \quad (x - x_1)\operatorname{tang}\Theta_1, \\ z - z_1 = -(x - x_1)\dfrac{b^2 x_1}{a^2 z_1 \cos{\Theta_1}^2}; \end{cases}$$

oder nach 78):

$$93)\quad \begin{cases} y - y_1 = \quad (x - x_1)\operatorname{tang}\Theta_1, \\ z - z_1 = -(x - x_1)\dfrac{\cot\Omega_1}{\cos\Theta_1}\sqrt{1-e^2}. \end{cases}$$

Bezeichnet man die 180° nicht übersteigenden Winkel, die der eine der beiden Theile, in welche die in Rede stehende Berührende durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ getheilt wird, mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den primitiven paralleler Axen einschliesst, durch $\varphi^{(1)}, \psi^{(1)}, \chi^{(1)}$; so ist

$$\frac{\cos\psi^{(1)}}{\cos\varphi^{(1)}} = \operatorname{tang}\Theta_1, \quad \frac{\cos\chi^{(1)}}{\cos\varphi^{(1)}} = -\frac{\cot\Omega_1}{\cos\Theta_1}\sqrt{1-e^2};$$

und folglich

$$94)\quad \begin{cases} \cos\varphi^{(1)} = \pm\dfrac{\cos\Theta_1}{\sqrt{1+(1-e^2)\cot{\Omega_1}^2}}, \\ \cos\psi^{(1)} = \pm\dfrac{\sin\Theta_1}{\sqrt{1+(1-e^2)\cot{\Omega_1}^2}}, \\ \cos\chi^{(1)} = \mp\dfrac{\cot\Omega_1\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1+(1-e^2)\cot{\Omega_1}^2}}; \end{cases}$$

mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

Bezeichnet man einen jeden der 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gelegten Berührenden des diesem Punkte entsprechenden Meridians und der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids mit einander einschliessen, durch Γ_1; so ist bekanntlich in den vorher eingeführten Bezeichnungen:

$$\cos\Gamma_1 = \cos\varphi_1 \cos\varphi^{(1)} + \cos\psi_1 \cos\psi^{(1)} + \cos\chi_1 \cos\chi^{(1)},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$95)\ \cos\Gamma_1 = \pm\sqrt{\frac{1-e^2\cos\Omega_1{}^2}{1-e^2\cos\Omega_1{}^2\left(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)\left(-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)}},$$

woraus sich ferner sogleich ergiebt:

$$96)\ \sin\Gamma_1 = \pm\frac{\cos\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1{}^2\left(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)\left(1-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)}},$$

in welcher letzteren Formel, da $\sin\Gamma_1$ immer positiv ist, das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem

$$\cos\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}$$

eine positive oder eine negative Grösse ist.

Aus den beiden vorhergehenden Gleichungen ergiebt sich aber auch auf der Stelle

$$97)\quad \tang\Gamma_1 = \pm\frac{\cos\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1{}^2}},$$

oder, wenn man

$$98)\quad \sin U_1 = e\cos\Omega_1$$

setzt:

$$99)\ \tang\Gamma_1 = \pm\frac{\cos\Omega_1}{\cos U_1}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}.$$

§. 13.

Wir wollen nun auch den dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids entsprechenden Krümmungshalbmesser r_1 dieser Projection zu bestimmen suchen, indem wir als bekannt voraussetzen, dass nach den Principien der höheren Geometrie, wenn der Kürze wegen

$$100)\quad T_1^2 = \left(\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2} - \frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2} - \frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2} - \frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2}\right)^2,$$

wo T_1 eine positive Grösse bezeichnen soll, gesetzt wird:

$$101)\quad r_1 = \frac{\left(\frac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^3}{T_1}$$

ist, wo die Bedeutung des Symbols s_1 leicht von selbst erhellen wird. Weil nun nach 79)

$$\frac{dx_1}{d\Omega_1} = -a\left(\cos\Theta_1\sin\Omega_1 + \sin\Theta_1\cos\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right),$$

$$\frac{dy_1}{d\Omega_1} = -a\left(\sin\Theta_1\sin\Omega_1 - \cos\Theta_1\cos\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right),$$

$$\frac{dz_1}{d\Omega_1} = a\sqrt{1-e^2}\,.\cos\Omega_1$$

ist, so ist, wie man durch fernere Differentiation leicht findet:

$$\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2} = -a\left\{\begin{array}{c}\cos\Theta_1\cos\Omega_1 - 2\sin\Theta_1\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\\ +\cos\Theta_1\cos\Omega_1\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2 + \sin\Theta_1\cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2}\end{array}\right\},$$

$$\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2} = -a\left\{\begin{array}{c}\sin\Theta_1\cos\Omega_1 + 2\cos\Theta_1\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\\ +\sin\Theta_1\cos\Omega_1\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2 - \cos\Theta_1\cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2}\end{array}\right\},$$

$$\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2} = -a\sqrt{1-e^2}\,.\sin\Omega_1;$$

und hieraus erhält man ferner nach einigen keine Schwierigkeit darbietenden Reductionen:

$$\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2} - \frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}$$

$$= a^2\left\{\frac{d\Theta_1}{d\Omega}\left(1+\cos\Omega_1^2\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)\right) + \sin\Omega_1\left(\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1} - \cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2}\right)\right\},$$

Digitized by Google

$$\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2}-\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}$$

$$=a^2\sqrt{1-e^2}.\left\{\begin{array}{c}\cos\Theta_1(1+\cos\Omega_1^2\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2)\\ -\sin\Theta_1\cos\Omega_1(\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}-\cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2})\end{array}\right\},$$

$$\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2}-\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2}$$

$$=a^2\sqrt{1-e^2}.\left\{\begin{array}{c}\sin\Theta_1(1+\cos\Omega_1^2\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2)\\ +\cos\Theta_1\cos\Omega_1(\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}-\cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2})\end{array}\right\}.$$

Setzt man aber der Kürze wegen

$$102)\quad\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\sin E_1=1+\cos\Omega_1^2\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2,\\ \varrho_1\cos E_1=\cos\Omega_1(\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}-\cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2});\end{array}\right.$$

so wird, wie man leicht findet:

$$\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2}-\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}$$

$$=\varrho_1 a^2(\cos E_1\tang\Omega_1+\sin E_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}),$$

$$\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2}-\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}=\varrho_1 a^2\sqrt{1-e^2}.\sin(E_1-\Theta_1),$$

$$\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2}-\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2}=\varrho_1 a^2\sqrt{1-e^2}.\cos(E_1-\Theta_1);$$

und folglich

$$103)\quad T_1=\varrho_1 a^2\sqrt{1-e^2+(\cos E_1\tang\Omega_1+\sin E_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega})^2}.$$

Weil nun nach 89)

$$\left(\frac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^2=a^2\{1-e^2\cos\Omega_1^2+\cos\Omega_1^2\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2\},$$

oder nach Einführung der Hülfsgrössen ϱ_1 und E_1:

$$\left(\frac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^2=a^2(\varrho_1 \sin E_1-e^2\cos\Omega^2{}_1)$$

ist, so ist nach 101):

$$104)\quad r_1=\frac{a(\varrho_1\sin E_1-e^2\cos\Omega_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho_1\sqrt{1-e^2+(\cos E_1\tang\Omega_1+\sin E_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1})^2}}.$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts durch ξ_1, η_1, ζ_1; so ist bekanntlich, wenn der Kürze wegen

$$X_1=\left(\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1{}^2}-\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1{}^2}\right)\frac{dy_1}{d\Omega_1}$$
$$+\left(\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1{}^2}-\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1{}^2}\right)\frac{dz_1}{d\Omega_1},$$

$$Y_1=\left(\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1{}^2}-\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1{}^2}\right)\frac{dx_1}{d\Omega_1}$$
$$+\left(\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1{}^2}-\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1{}^2}\right)\frac{dz_1}{d\Omega_1},$$

$$Z_1=\left(\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1{}^2}-\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1{}^2}\right)\frac{dx_1}{d\Omega_1}$$
$$+\left(\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1{}^2}-\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1{}^2}\right)\frac{dy_1}{d\Omega_1};$$

oder, wie man nach gehöriger Entwickelung mittelst des Obigen leicht findet:

$$105)\quad X_1=\varrho_1 a^3\left\{\begin{array}{c}\sin(E_1-\Theta_1)\cos\Omega_1\\ -\cos E_1\sin\Theta_1\sin\Omega_1\tang\Omega_1\\ +\cos(E_1+\Theta_1)\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\\ +\sin E_1\cos\Theta_1\cos\Omega_1\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2\end{array}\right\}$$
$$-\varrho_1 a^3e^2\sin(E_1-\Theta_1)\cos\Omega_1,$$

$$Y_1=\varrho_1 a^3\left\{\begin{array}{c}\cos(E_1-\Theta_1)\cos\Omega_1\\ +\cos E_1\cos\Theta_1\sin\Omega_1\tang\Omega_1\\ +\sin(E_1+\Theta_1)\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\\ +\sin E_1\sin\Theta_1\cos\Omega_1\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2\end{array}\right\},$$
$$-\varrho_1 a^3e^2\cos(E_1-\Theta_1)\cos\Omega_1$$

Digitized by Google

$$Z_1 = \varrho_1 a^3 \sqrt{1-e^2}.(\sin E_1 \sin \Omega_1 - \cos E_1 \cos \Omega_1 \frac{d\Theta_1}{d\Omega_1})$$

$$= a^3 \sqrt{1-e^2}.(\sin\Omega_1 + \cos\Omega_1{}^3 \frac{d\Theta_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1{}^2})$$

gesetzt wird:

$$106)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi_1 = x_1 - \dfrac{\left(\dfrac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^2}{T_1{}^2} X_1, \\ \eta_1 = y_1 - \dfrac{\left(\dfrac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^2}{T_1{}^2} Y_1, \\ \zeta_1 = z_1 - \dfrac{\left(\dfrac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^2}{T_1{}^2} Z_1. \end{array}\right.$$

Ich will jetzt diese Untersuchungen nicht weiter ausdehnen, behalte mir aber vor, in einem späteren Aufsatze auf einige Anwendungen zurück zu kommen, welche sich von denselben machen lassen, wozu die im Vorhergehenden mitgetheilten Entwickelungen völlig genügen.

XXXIX.

Ist $\int \frac{dx}{x} = lx + \text{const.}$, oder $= \frac{1}{2} l(x^2) + \text{const.}$?

Von

dem Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Diese Frage lässt sich auf folgende Weise beantworten. Setzt man in einem Integrale wie

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

$x=\frac{z}{m}$, wo z eine neue Veränderliche, m eine constante Grösse ist, so wird $dx=\frac{dz}{m}$; wenn ferner $x=a$ und $x=b$ geworden ist, hat z die Werthe ma und mb angenommen. Daher ist jetzt

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{ma}^{mb} f\left(\frac{z}{m}\right)\frac{dz}{m} \ldots\ldots \quad (1)$$

oder, weil es in einem bestimmten Integrale ganz gleichgültig ist, mit welchem Buchstaben die Veränderliche der Integration bezeichnet wird,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{ma}^{mb} f\left(\frac{x}{m}\right)\frac{dx}{m}.$$

Aus diesem Satze ergiebt sich z. B. für $a=0$, $b=u$, $m=-1$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

$$\int_0^u \frac{dx}{x}=\int_0^{-u}\frac{(-1)}{x}\cdot\frac{dx}{-1}=\int_0^{-u}\frac{dx}{x} \ldots\ldots \quad (2)$$

Setzen wir nun

$$\int\frac{dx}{x}=\varphi(x)+\text{const.}, \ldots\ldots \quad (3)$$

so ist

$$\int_0^u \frac{dx}{x}=\varphi(u)-\varphi(0),$$

$$\int_0^{-u}\frac{dx}{x}=\varphi(-u)-\varphi(0);$$

und vermöge der Gleichung (2)

$$\varphi(u)=\varphi(-u) \ldots\ldots \quad (4)$$

Man hat aber eine doppelte Wahl; entweder $\varphi(x)=lx$, oder $\varphi(x)=\frac{1}{2}l(x^2)$; indem aus beiden folgt $d\varphi(x)=\frac{dx}{x}$, wie es nach (3) sein muss. Gleichwohl sind die Functionen lx und $\frac{1}{2}l(x^2)$ sehr von einander verschieden; die erstere wird nämlich für negative Werthe der Veränderlichen imaginär, während die zweite für ne-

Digitized by Google

gative x die nämlichen Werthe giebt, wie für gleich grosse positive x. In der That ist

$$\text{für } \varphi(x) = lx,\ \varphi(-x) = lx + l(-1) = lx \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}$$

oder

$$\varphi(-u) = lu \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1},$$

dagegen für $\varphi(x) = \frac{1}{2}l(x^2), \varphi(-x) = \frac{1}{2}l(\overline{-x}^2) = \frac{1}{2}(lx^2)$

oder

$$\varphi(-u) = \varphi(u).$$

Da nun aber nach No. (4) $\varphi(-u) = \varphi(+u)$ sein soll, so kann man $\varphi(x)$ nicht $= lx$ setzen, sondern muss durchaus $\varphi(x) = \frac{1}{2}l(x^2)$ nehmen. Es ist daher nach No. (3)

$$\int \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}l(x^2) + \text{const. und \textbf{nicht}} = lx + \text{const.}$$

Weiss man im Voraus, dass x keine negativen Werthe annehmen wird, so kann man auch die zweite Form nehmen, weil beide Formen für positive x identisch sind; dagegen würde es total falsch sein, sich dies auch bei negativen x erlauben zu wollen. Welchen Unterschied dies macht, sieht man z. B. an dem Integrale

$$\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x},$$

dessen Werth nach dem Obigen $= \frac{1}{2}l(3^2) - \frac{1}{2}l(2^2) = \frac{1}{2}l\frac{9}{4} = \frac{3}{2}$ ist, während er bei gewöhnlicher Schreibweise $l(3) - l(-2)$, also imaginär sein müsste.

XI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Professor Dr. F. Stegmann an der Universität zu Marburg.

I) Es sei über dem Durchmesser AB ein Halbkreis $AuMwB$ beschrieben und in einem beliebigen Punkt P zwischen A und B des Perpendikel PM auf den Durchmesser gesetzt, welches in M den Halbkreis schneidet. Wenn man nun auf der Verlängerung dieses Perpendikels über M hinaus einen beliebigen Punkt S annimmt und die zwei Sehnen AM, BM nebst den zwei Sekanten AS, BS zieht, welche letztere in den Punkten u, w die Peripherie des Halbkreises durchschneiden, so wird Bogen $Mu \underset{<}{=} Mw$ sein, je nachdem $AP \overset{>}{\underset{<}{=}} BP$ angenommen worden ist.

II) Wenn man in einem Kreis eine beliebige Sehne AC zieht und an deren Endpunkten die Tangenten AM und BM construirt, deren Durchschnittspunkt M sei; wenn man alsdann von dem einen Endpunkt C der Sehne AC eine zweite Sehne gleich der Hälfte der ersten, nämlich $CB = \frac{1}{2}AC$ in die Peripherie trägt und von deren Endpunkt B aus die Sekante BM zieht, deren zweiter Durchschnittspunkt mit der Peripherie U heisse; so wird U der Halbirungspunkt des Bogens $AUCB$, nämlich $AU = BU$ sein.

Es sind zwar zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich die Sehne $CB = \frac{1}{2}AC$ von C aus entweder in den grösseren oder in den kleineren der beiden von der Sehne AC gebildeten Kreisabschnitte eingetragen wird, für beide Fälle lässt sich jedoch der Beweiss mit ganz denselben Worten führen.

III) Wenn man in einer gleichseitigen Hyperbel von den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers AB die Verbindungssehnen AM und BM nach einem beliebig auf der Hyperbel angenommenen Punkt M zieht, und von diesem Punkt M zugleich Perpendikel auf die Asymptoten fällt; so wird das eine dieser Perpendikel den Winkel AMB, das andere aber den durch die Verlängerung von AM oder BM entstandenen Nebenwinkel von AMB halbiren.

Lehrsatz aus der Differenzialrechnung.

Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Setzt man

$${}^np_0=1,\ {}^np_r=(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r)n_r,$$

wo n_r den $r$ten Binomialkoëfficienten des Exponenten n bezeichnet, so ist

$$d^n(e^{-\frac{1}{x}}):dx^n$$

$$=\left[\frac{{}^np_0}{x^{2n}}-\frac{{}^np_1}{x^{2n-1}}+\frac{{}^np_2}{x^{2n-}}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{{}^np^{n+1}}{x^{n+1}}\right]e^{-\frac{1}{x}}.$$

So ist z. B. für $n=4$

$$d^4(e^{-\frac{1}{x}}):dx^4=\left[\frac{1}{x^8}-\frac{12}{x^7}+\frac{36}{x^6}-\frac{24}{x^5}\right]e^{-\frac{1}{x}}.$$

Wie lässt sich dies allgemein beweisen?

Herr Anton Ritman zu Wien hat mir für das Archiv die folgende Aufgabe mitgetheilt.

Man denke sich einen Kegel mit kreisförmiger Grundfläche und lege durch dessen Axe eine auf seiner Grundfläche senkrecht stehende Ebene, deren Durchschnitt mit dem Kegel der sogenannte Axentriangel ist. Lässt man jetzt um einen beliebigen, aber gegebenen Punkt in der einen der beiden in der Kegelfläche liegenden Seiten dieses Axentriangels eine Ebene sich so bewegen, dass dieselbe immer auf der Ebene des Axentriangels senkrecht steht, so ist der Durchschnitt mit der Kegelfläche bekanntlich jederzeit ein Kegelschnitt, und man kann nun fragen, welches die geometrischen Oerter der Brennpunkte aller dieser Kegelschnitte sind. G.

Die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \text{ und } (x-z)(y-z)=z^2$$

sind immer identisch.

XLI.

Miscellen.

Herr A. J. H. Vincent (professeur au collége Saint-Louis) hat die Berechnung der Zahl π auf eine Rechnungsregel gebracht, welche sich zwar sehr leicht aus ganz bekannten Sätzen ergiebt, aber dessenungeachtet bemerkenswerth ist und bei'm Elementarunterrichte berücksichtigt zu werden verdient, weshalb ich dieselbe im Folgenden mittheilen werde.

Bezeichnen wir die Flächenräume des in und um einen Kreis, dessen Halbmesser r sein mag, beschriebenen

$$n\text{ecks},\ 2n\text{ecks},\ 4n\text{ecks},\ 8n\text{ecks},\ 16n\text{ecks},\ \ldots.$$

respective durch

$$F_n,\ F_{2n},\ F_{4n},\ F_{8n},\ F_{16n},\ \ldots.$$

und

$$\mathfrak{F}_n,\ \mathfrak{F}_{2n},\ \mathfrak{F}_{4n},\ \mathfrak{F}_{8n},\ \mathfrak{F}_{16n},\ \ldots.;$$

so ist nach einem sehr bekannten Satze

$$F_{2n}=\sqrt{F_n\mathfrak{F}_n} \text{ und } \mathfrak{F}_{2n}=\frac{2F_n\mathfrak{F}_n}{F_n+F_{2n}};$$

also

$$\frac{1}{F_{2n}}=\sqrt{\frac{1}{F_n}\cdot\frac{1}{\mathfrak{F}_n}} \text{ und } \frac{1}{\mathfrak{F}_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_n}+\frac{F_{2n}}{F_n\mathfrak{F}_n}\right),$$

d. i.

$$\frac{1}{F_{2n}}=\sqrt{\frac{1}{F_n}\cdot\frac{1}{\mathfrak{F}_n}} \text{ und } \frac{1}{\mathfrak{F}_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_n}+\frac{1}{F_{2n}}\right).$$

Weil nun $r^2\pi$ der Flächeninhalt des Kreises ist, so sind, wenn man $r=1$ setzt, offenbar jede zwei einander benachbarte Glieder der Reihe:

$$\frac{1}{F_n}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{F}_n},$$

$$\frac{1}{F_{2n}}=\sqrt{\frac{1}{F_n}\cdot\frac{1}{\mathfrak{F}_n}}.$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{\mathfrak{F}_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_{n}}+\frac{1}{F_{2n}}\right),$$

$$\frac{1}{F_{4n}}=\sqrt{\frac{1}{F_{2n}}\cdot\frac{1}{\mathfrak{F}_{2n}}}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{F}_{4n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_{2n}}+\frac{1}{F_{4n}}\right),$$

u. s. w.

zwei Gränzen, zwischen denen der Bruch $\frac{1}{\pi}$ liegt. Wie aber die Glieder der vorhergehenden Reihe nach und nach aus einander gebildet werden, fällt auf der Stelle in die Augen, indem man nämlich vom dritten Gliede an jedes Glied erhält, wenn man zwischen den beiden unmittelbar vorhergehenden Gliedern abwechselnd die mittlere geometrische Proportionale und die mittlere arithmetische Proportionale nimmt.

Setzen wir jetzt $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$, so ist der Flächeninhalt des Kreises $\frac{\pi}{2}$, und die Flächenräume des in und um den Kreis beschriebenen regulären Vierecks sind respective 1 und 2, so dass also $F_4=1$ und $\mathfrak{F}_4=2$ ist. Bildet man nun aus 1 und $\frac{1}{2}$ nach und nach eine Reihe, in welcher vom dritten Gliede an jedes Glied abwechselnd die mittlere geometrische und die mittlere arithmetische Proportionale zwischen den beiden unmittelbar vorhergehenden Gliedern ist, so sind nach dem Vorhergehenden jede zwei einander benachbarte Glieder dieser Reihe zwei Gränzen, zwischen denen $\frac{2}{\pi}$ liegt. Weil aber $\frac{1}{2}$ die mittlere arithmetische Proportionale zwischen 0 und 1 ist, und 0 und 1 offenbar auch zwei Gränzen von $\frac{2}{\pi}$ sind, so kann man die Regel zur Berechnung dieser Grösse auch auf folgende Art aussprechen:

Wenn man aus 0 und 1 nach und nach eine Reihe bildet, in welcher vom dritten Gliede an jedes Glied abwechselnd die mittlere arithmetische Proportionale und die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden unmittelbar vorhergehenden Gliedern ist, so liefern jede zwei einander benachbarte Glieder dieser Reihe zwei Gränzen, zwischen denen der Bruch $\frac{2}{\pi}$ enthalten ist.

Dies ist die von Herrn Vincent gegebene Rechnungsregel.

G.

Bemerkung zu einer Stelle im Archiv Theil V. S. 220.

Von Herrn F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Es ist dort der Satz aufgestellt: „Wenn die Sinus der Winkel eines ebenen Dreiecks eine arithmetische Progression bilden, so bilden auch jederzeit die Cotangenten der halben Winkel dieses Dreiecks eine arithmetische Progression."

Herr Director Nizze hatte die Güte, mir einen Versuch über die Beweisführung dieses Satzes vorzulegen, und war zu einem Resultat gekommen, welches ihn veranlasste, starken Zweifel an der Richtigkeit der Behauptung zu hegen. Ich erlaube mir dieserhalb, meine eigene Entwickelung mitzutheilen, aus welcher sich ergiebt, dass der obige Satz allerdings nicht unter den gemachten Voraussetzungen richtig ist, vielmehr noch eine neue Annahme hinzukommen muss, die sich auf folgende Weise ergiebt.

Aus $2\sin\beta=\sin\alpha+\sin\gamma$ folgt, wenn man die halben Winkel einführt, $2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta=\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)$, oder da (wegen $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$) $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)=\cos\frac{1}{2}\beta$ ist,

$$1.\quad \sin\tfrac{1}{2}\beta=\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma).$$

Ferner haben wir

$$\cotg\tfrac{1}{2}\alpha+\cotg\tfrac{1}{2}\gamma=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma},\ \text{oder}$$

$$2.\quad \cos\tfrac{1}{2}\beta=\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma(\cotg\tfrac{1}{2}\alpha+\cotg\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Dividirt man nun 2. durch 1., so entsteht, nachdem mit 2 multiplicirt worden,

$$3.\quad 2\cotg\tfrac{1}{2}\beta=\frac{4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}(\cotg\tfrac{1}{2}\alpha+\cotg\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Dies ist die richtige Gleichung. Soll sie in die im Archiv aufgestellte übergehen, so muss zwischen den Winkeln α und γ noch die durch die Gleichung

$$\frac{4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}=1$$

ausgedrückte Abhängigkeit Statt finden. Statt dieser kann man setzen

$$4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma=\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma+\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\text{also } 3\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma=\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$

oder

$$4.\quad 3=\cotg\tfrac{1}{2}\alpha\cotg\tfrac{1}{2}\gamma.$$

In dem Annuaire de l'Académie Royale des sciences et belles lettres de Bruxelles. Dixième année. Bruxelles. 1844. p. 129. erzählt Herr Quetelet in seiner interessanten Notice sur Alexis Bouvard gelegentlich folgenden Vorfall, welcher Herrn Arago in seiner Eigenschaft als Offizier der Nationalgarde in den Tagen der französischen Revolution passirte.

Pendant ces émeutes M. Arago a couru plus d'un danger. Je tiens de lui-même que, sur un des ponts de Paris et dans un instant d'exaspération populaire contre la garde nationale, il faillit être jeté dans la Seine et ne dut son salut qu'à une plaisanterie. Des gens du peuple le soulevaient déjà pour le lancer par-dessus le parapet, lorsque il leur dit avec une admirable présence d'esprit: Hé bien! hé bien! Que faites-vous donc? Mais je ne sais pas nager! moi! Ces mots désarmèrent les furieux, et l'on finit par rire.

Der berühmte Optiker Robert-Aglaé Cauchoix ist am 8ten Februar 1845 zu Deuil bei Montmorency, wohin er sich seiner durch viele und grosse Arbeiten geschwächten Gesundheit wegen zurückgezogen hatte, gestorben. Er war am 24sten April 1776 zu Cormeilles-en-Parisis geboren, und widmete sich im Jahre 1792 dem Stande eines Optikers. Seine letzten grossen Arbeiten waren zwei grosse Fernröhre, das eine mit einem eilfzölligen, das andere mit einem dreizehnzölligen Objectiv, von denen das erste die Universität Cambridge, das zweite die Sternwarte von Armagh in Irland besitzt.

Sitzung der mathematisch-physikalischen Klasse der Akademie der Wissenschaften zu München vom 14ten December 1844.

Herr Akademiker v. Steinheil zeigt der Klasse ein von ihm erfundenes kleines Instrument vor, Passagen-Prisma genannt, welches auf Reisen zu Orts- und Zeitbestimmungen, so wie zur Regulirung des Ganges der Uhren mit Vortheil benutzt werden kann. Es ist dieses Instrument nur 2 Loth schwer und 1 Cubikzoll gross. Einfachheit in der Construction und Transportabilität, so wie bedeutende Sicherheit und Präcision der damit anzustellenden Beobachtungen, empfehlen es der Aufmerksamkeit der Klasse.

Preisaufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Paris für 1846.

Les géomètres auxquels on doit les beaux développements, que la théorie des fonctions elliptiques a reçus dans ces derniers temps, ont aussi ouvert la route pour l'étude de nouvelles transcendantes d'ordre supérieur, dont les plus simples (nommées par M. Jacobi fonctions abéliennes de première classe) sont les fonctions de deux variables à quatre périodes distinctes. Néanmoins cette étude présente des difficultés nombreuses, et, quoique des travaux récents aient un peu étendu le cercle de nos connaissances sur cet objet, on est encore aujourd'hui bien loin du degré de per-

Digitized by Google

fection que nous offre la théorie des fonctions elliptiques. Pour encourager les efforts des géomètres dans cette matière à la fois très importante et très délicate, l'Académie la propose comme sujet du grand prix de mathématiques à decerner en 1846. La question peut être enoncée en ces termes:

Perfectionner dans quelque point essentiel la théorie des fonctions abéliennes, ou, plus généralement, des transcendantes qui résultent de la consideration des intégrales de quantités algébriques.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de 3000 francs. Les mémoires devront être arrivés au secrétariat de l'Institut avant le 1er Octobre 1846. Ce terme est de rigueur. Les noms des auteurs seront contenus dans un billet cacheté qui ne sera ouvert que si la pièce est couronnée. La commission, qui avait été chargée de proposer le sujet du prix était composée de MM. Arago, Binet, Poinsot, Cauchy et Liouville, rapporteur.

Herleitung des Differentialquotienten $\frac{d.x^n}{dx}=nx^{n-1}$, ohne Unterscheidung der Art des reellen Exponenten n.

Von dem Herrn Professor Dr. Matzka zu Tarnow in Galizien.

Der Differentialquotient $\frac{d.x^n}{dx}$, da er vermöge seiner Bedeutung $=\lim\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$ für $\lim \Delta x=0$ ist, muss im Allgemeinen eine gewisse Function von x und n sein, die wir vorläufig durch $\varphi(x,n)$ darstellen und zu bestimmen unternehmen wollen. Zu diesem Zwecke verwandeln wir in

$$\frac{d.x^n}{dx}=\lim\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\varphi(x,n),\ \lim \Delta x=0$$

den beliebigen (positiven oder negativen, ganzen, gebrochenen oder irrationalen, jedoch immer) reellen Exponenten n in sein $p$faches, pn, indem wir p irgend eine absolute ganze Zahl vorstellen lassen; und setzen für einen Augenblick zur Abkürzung $x+\Delta x=\xi$. Dadurch erhalten wir, immer für $\lim \Delta x=0$,

$$\varphi(x,pn)=\lim\frac{\xi^{pn}-x^{pn}}{\Delta x}=\lim\frac{(\xi^n)^p-(x^n)^p}{\Delta x},$$

daher, weil p absolut ganz ist,

$$=\lim\frac{\xi^n-x^n}{\Delta x}[\xi^{n(p-1)}+\xi^{n(p-2)}x^n+\xi^{n(p-3)}x^{2n}+\ldots+\xi^n x^{n(p-2)}+x^{n(p-1)}]$$

$$=\varphi(x,n)[px^{n(p-1)}]=p\frac{x^{np}}{x^n}\ \varphi(x,n),$$

und hieraus

$$\frac{\varphi(x,pn)}{x^{pn}}=p.\frac{\varphi(x,n)}{x^n}.$$

Sehen wir nun den Quotienten $\frac{\varphi(x,n)}{xn}$, in so fern wir darin bloss auf die Veränderlichkeit von n Acht haben, als eine Function von n an, die wir mit $\psi(n)$ andeuten; so haben wir gefunden

$$\psi(pn)=p\,.\,\psi(n).$$

Die Function $\psi(n)$ hängt daher von dem Exponenten n so ab, dass, wenn dieser sich vervielfacht, auch sie eben so vielmal vervielfacht wird; mithin ist diese Function dem Exponenten direct proportionirt. *)

Noch einfacher erweist man diese Proportionalität wie folgt. Lässt man in der Gleichung

$$\frac{d\,.\,x^n}{dx}=\varphi(x,n)$$

den Exponenten n um die beliebige Zahl p wachsen, so folgt

$$\varphi(x,n+p)=\frac{d\,.\,x^{n+p}}{dx}=\frac{d(x^n\,.\,x^p)}{dx}$$

$$=x^p\frac{d\,.\,x^n}{dx}+x^n\frac{d\,.\,x^p}{dx}$$

$$=x^p\,\varphi(x,n)+x^n\,\varphi(x,p);$$

daher, wenn man durch x^n und x^p nach einander theilt,

$$\frac{\varphi(x,n+p)}{x^{n+p}}=\frac{\varphi(x,n)}{x^n}+\frac{\varphi(x,p)}{x^p}.$$

Setzt man nun wie vorher $\frac{\varphi(x,n)}{x^n}=\psi(n)$, so erhält man

$$\psi(n+p)=\psi(n)+\psi(p).$$

Die Function $\psi(n)$ hängt demnach mit dem Exponenten n so zusammen, dass zur Summe jeder zwei solcher Exponenten die Summe der ihnen angehörigen Functionen gehört; mithin ist die Function dem Exponenten direct proportional. **)

Solche Proportionalität drückt man aber bekanntlich am einfachsten dadurch aus, dass man die Function gleich stellt dem Producte aus dem, zum Werthe 1 der Veränderlichen gehörigen, Werthe der Function in die Veränderliche selbst; daher ist

$$\psi(n)=\psi(1)\,.\,n.$$

Nun ist $\psi(1)=\frac{\varphi(x,1)}{x^1}$ und $\varphi(x,1)=\frac{dx}{dx}=\lim\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1$,

folglich $\psi(1)=\frac{1}{x}$ und $\psi(n)=\frac{\varphi(x,n)}{x^n}=\frac{n}{x}$.

Hieraus erscheint nun die geforderte Function $\varphi(x,n)=nx^{n-1}$, und sofort ist $\frac{d\,.\,x^n}{dx}=nx^{n-1}$.

---

*) Knar, Anfangsgründe der Arithmetik. Grätz 1829. §. 529.

**) Knar, ebendaselbst, §. 528.

Digitized by Google

XLII.

Ueber die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre.

Von

Herrn Hermann Grassmann,
Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Vorerinnerung des Herausgebers.

Ich hatte Herrn H. Grassmann aufgefordert, die eigentliche Tendenz seiner kürzlich herausgegebenen Schrift: Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin, dargestellt und durch Anwendungen erläutert von Hermann Grassmann. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Leipzig. 1844., in einem besondern Aufsatze den Lesern des Archivs mit möglichster Kürze und Deutlichkeit vor die Augen zu führen, welchem Wunsche Derselbe im Folgenden zu entsprechen die Güte gehabt hat. Die Neuheit des Gegenstandes lässt mich hoffen, dass Herr Grassmann dadurch vorzüglich denjenigen Lesern des Archivs, welche dem Studium des ganzen Werks eine hinreichende Zeit zu widmen nicht im Stande sind, einen angenehmen Dienst geleistet haben wird, und zugleich glaubte ich auf diese Weise am besten das Meinige zu der jedenfalls zu wünschenden weiteren Bekanntwerdung der Schrift und der in ihr vorgetragenen Lehren beizutragen. Möchten daher die Leser des Archivs dem folgenden Aufsatze ihre Aufmerksamkeit nicht versagen!

Zugleich soll diese Darstellung die Stelle einer ausführlichern Anzeige der Schrift in dem Literarischen Berichte vertreten. G.

I. Tendenz der Ausdehnungslehre als solcher.

1. Meine Ausdehnungslehre bildet die abstrakte Grundlage der Raumlehre (Geometrie), d. h. sie ist die von allen räumlichen Anschauungen gelöste, rein mathematische Wissenschaft, deren specielle Anwendung auf den Raum die Raumlehre ist.

Die Raumlehre, da sie auf etwas in der Natur gegebenes, nämlich den Raum, zurückgeht, ist kein Zweig der reinen Mathe-

Digitized by Google

matik, sondern eine Anwendung derselben auf die Natur; aber nicht eine blosse Anwendung der Algebra, auch dann nicht, wenn die algebraische Grösse, wie in der Funktionenlehre, als stetig veränderlich betrachtet wird; denn es fehlt der Algebra der der Raumlehre eigenthümliche Begriff der verschiedenen Dimensionen. Daher ist ein Zweig der Mathematik nothwendig, welcher in den Begriff der stetig veränderlichen Grösse zugleich den Begriff von Verschiedenheiten aufnimmt, welche den Dimensionen des Raumes entsprechen, und dieser Zweig ist meine Ausdehnungslehre.

2. Doch sind die Sätze der Ausdehnungslehre nicht etwa blosse Uebertragungen geometrischer Sätze in die abstrakte Sprache, sondern haben eine viel allgemeinere Bedeutung; denn während die Raumlehre gebunden bleibt an die drei Dimensionen des Raumes, so bleibt die abstrakte Wissenschaft von diesen Schranken frei.

In der Raumlehre können durch die Bewegung von Punkten Linien, durch die der Linien Flächen, durch die der Flächen Körperräume erzeugt werden, aber weiter kann die Raumlehre nicht fortschreiten. Hingegen stellt man sich vor, dass an die Stelle des Punktes und der Bewegung abstrakte, vom Raume unabhängige Begriffe eingeführt werden (s. unten no. 4—6), so verschwinden diese Schranken.

3. Dadurch geschieht es nun, dass die Sätze der Raumlehre eine Tendenz zur Allgemeinheit haben, die in ihr vermöge ihrer Beschränkung auf drei Dimensionen keine Befriedigung findet, sondern erst in der Ausdehnungslehre zur Ruhe kommt.

Zwei Beispiele mögen dies erläutern. 1) Zwei gerade Linien derselben Ebene schneiden sich in Einem Punkte, ebenso eine Ebene und eine Gerade, zwei Ebenen in Einer geraden Linie, vorausgesetzt, dass die Geraden, oder die Ebene und die Gerade, oder die Ebenen nicht zusammenfallen, und die Durchschnitte im Unendlichen mitgerechnet werden. Werden der Punkt, die Gerade, die Ebene, der Körperraum beziehlich als Gebiete erster, zweiter, dritter, vierter Stufe aufgefasst, so liegt darin der allgemeine Satz angedeutet, dass ein Gebiet von $a$ter und eins von $b$ter Stufe, wenn sie in einem Gebiete von $c$ter Stufe, aber auch in keinem Gebiete von niederer Stufe vereinigt sind, ein Gebiet $(a+b-c)$ter Stufe gemeinschaftlich haben; aber die Raumlehre kann diesen Satz nur für c gleich oder kleiner als 4 zur Anschauung bringen. 2) Der Flächenraum eines Dreiecks ist die Hälfte von dem eines Parellelogramms, dessen Seiten mit zwei Seiten des Dreiecks gleich lang und parallel sind, der Körperraum des Tetraeders $\frac{1}{6}$ von dem des Spathes (Parallelepipedums), dessen Kanten mit 3 in einem Punkte zusammentreffenden Kanten des Tetraeders gleich lang und parallel sind. Darin scheint der Satz angedeutet: der Raum, welcher zwischen n Punkten liegt, die in einem Gebiete $n$ter Stufe (und in keinem Gebiete von niederer Stufe) vereinigt sind, ist $\frac{1}{1.2.3\ldots n}$ von dem Raume eines Gebildes (einer Figur, eines Körpers), dessen Begränzungslinien

(Seiten, Kanten) den von einem der n Punkte zu den übrigen gezogenen geraden Linien gleich und parallel sind. Aber auch dieser Satz kommt hier nicht in seiner Allgemeinheit heraus. — Hingegen in der Ausdehnungslehre treten in diesen beiden, und in allen andern Fällen, die ganz allgemeinen Sätze vollkommen hervor. So nimmt also überall die Raumlehre einen Anlauf zur Allgemeinheit, stösst sich aber, ohne diese Allgemeinheit erreichen, zu können, an den ihr durch den Raum gesteckten Schranken, welche nur die abstrakte Wissenschaft der Ausdehnungslehre zu durchbrechen vermag.

4. Das der Linie entsprechende Gebilde der Ausdehnungslehre ist die Gesammtheit der Elemente, in die ein seinen Zustand stetig änderndes Element übergeht.

Die Linie kann als Gesammtheit der Punkte betrachtet werden, in die ein seinen Ort stetig ändernder Punkt übergeht. Substituiren wir hier dem Punkte allgemeiner irgend ein Ding, welches einer stetigen Aenderung irgend eines Zustandes, den es hat, fähig ist, und abstrahiren nun von allem anderweitigen Inhalte des Dinges und aller Besonderheit dieses seines Zustandes, und nennen das von allem anderweitigen Inhalte abstrahirte Ding das Element, so gelangen wir zu dem aufgestellten Begriffe.

5. Wenn hierbei das Element seinen Zustand stets auf gleiche Weise ändert, so dass, wenn aus einem Elemente a des Gebildes durch Eine solche Aenderung ein anderes Element b desselben hervorgeht, dann durch eine gleiche Aenderung aus b ein neues Element c desselben Gebildes hervorgeht, so entsteht das der *geraden* Linie entsprechende Gebilde, das Gebiet zweiter Stufe.

Die gerade Linie wird von dem Punkte konstruirt, wenn dieser seinen Ort stets nach derselben Richtung hin ändert; substituiren wir daher der Richtung die Art und Weise der Aenderung, so geht der aufgestellte Begriff hervor*).

6. Wenn man alle Elemente eines Gebietes $n$ter Stufe einer und derselben Aenderungsweise unterwirft, welche zu neuen (in jenem Gebiete nicht enthaltenen) Elementen führt, so heisst die Gesammtheit der durch diese Aenderungsweise und die entgegengesetzte erzeugbaren Elemente ein Gebiet $(n+1)$ter Stufe; das Gebiet dritter Stufe entspricht der Ebene, das vierter dem ganzen Raume.

Wenn die Punkte einer geraden Linie sich alle nach einer und derselben Richtung bewegen, die zu neuen (in jener Geraden nicht enthaltenen) Punkten führt, so ist die Gesammtheit der durch diese Bewegung und die entgegengesetzte erzeugbaren Punkte die Ebene; und wenn man ebenso mit den Punkten der

*) Soll die gerade Linie und das ihr entsprechende Gebilde nach beiden Seiten unendlich sein, so muss der Punkt (das Element) auch nach der entgegengesetzten Richtung (Änderungsweise) fortschreiten, was wir hier der Einfachheit wegen übergangen haben.

Digitized by Google

Ebene verfährt, so erhält man den ganzen Raum. Substituirt man hier den räumlichen Begriffen die vorher angegebenen abstrakten und hält den Fortgang von einer Stufe zur nächst höheren allgemein fest, so ergiebt sich der obige Begriff.

II. Tendenz der in meiner Ausdehnungslehre angewandten Rechnungsmethode an der Geometrie erläutert.

7. In meiner Ausdehnungslehre tritt eine eigenthümliche Rechnungsmethode hervor, welche auf die Raumlehre übertragen von unerschöpflicher Fruchtbarkeit ist, und hier (in der Raumlehre) darin besteht, dass räumliche Gebilde (Punkte, Linien u. s. w.) unmittelbar der Rechnung unterworfen werden.

Zum Beispiel wird die durch zwei Punkte geführte Gerade ihrer Grösse und Lage nach als Verknüpfung jener Punkte und zwar als eine eigenthümliche Art der Multiplikation aufgefasst (s. unten no. 15.), ebenso das zwischen 3 Punkten liegende Dreieck seinem Flächenraum und der Lage seiner Ebene nach als Produkt dreier Punkte, so dass dies Produkt null ist, wenn der Flächenraum jenes Dreiecks es ist d. h. die 3 Punkte in gerader Linie liegen; ferner der Durchschnittspunkt zweier gerader Linien in einem unten (no. 22. und Aufg. 18.) näher zu bezeichnenden Sinne als Produkt dieser Linien.

8. Die Tendenz dieser Rechnungsmethode für die Geometrie ist, die synthetische und analytische Methode zu vereinigen, d. h. die Vorzüge einer jeden auf den Boden der andern zu verpflanzen, indem jeder Konstruktion eine einfache analytishe Operation zur Seite gestellt wird und umgekehrt.

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel. Bekanntlich beschreibt eine Ecke γ eines veränderlichen Dreiecks, dessen beide andere Ecken α, β sich in festen geraden Linien A und B bewegen, und dessen Seiten durch 3 feste Punkte a, b, c gehen, einen Kegelschnitt. Sind a, b, c die festen Punkte, durch welche beziehlich die den Ecken α, β, γ gegenüberliegenden Seiten gehen, so sieht man, dass (s. no. 7.) $\gamma a B$ die Ecke β, $\gamma a B c A$ die Ecke α darstellt, und da die Punkte α, b, γ in einer geraden Linie liegen, also ihr Produkt null ist (no. 7.), so hat man die Gleichung

$$\gamma a B c A b \gamma = 0$$

als Gleichung eines von γ beschriebenen Kegelschnittes. Man sieht, dass diese Gleichung in Bezug auf γ vom zweiten Grade ist, und man wird schon hierin ein auf alle algebraischen Kurven gehendes wichtiges Gesetz ahnen.

III. Einfachste Rechnungsregeln für die neue Analyse.

Die Verknüpfungen, die in diesem Theile der Ausdehnungslehre vorkommen, sind Addition, Subtraktion, kombinatorische Multiplikation, kombinatorische Division.

Digitized by Google

9. **Für alle Arten der Addition und Subtraktion gilt das gewöhnliche Rechnungsverfahren.**

10. **Für alle Multiplikations- und Divisionsweisen gilt das Gesetz: Statt ein Aggregat von Gliedern mit einem zeichenlosen Ausdrucke auf irgend eine Weise zu multipliciren oder zu dividiren, kann man ohne Aenderung des letzten Ergebnisses die einzelnen Glieder mit diesem Ausdrucke auf dieselbe Weise*) multipliciren oder dividiren, und die einzelnen Produkte oder Quotienten so zu einem Aggregate verknüpfen, dass man einem jeden das Zeichen desjenigen Gliedes vorsetzt, durch dessen Multiplikation oder Division es entstanden ist; ein Zahlfaktor kann überdies, wenn er irgend einem Faktor des Produktes zugeordnet ist, auch jedem andern oder auch dem Produkte zugeordnet werden; endlich $\frac{A}{A}$ ist allemal 1, wenn A nicht null ist.**

11. **Ein Produkt $a.b.c.\ldots$ nenne ich ein kombinatorisches, wenn ausser dem Gesetze no. 10. für dasselbe noch das Gesetz gilt, dass, wenn von den einzelnen Faktoren a, b, c,.... zwei aufeinanderfolgende vertauscht werden, das Produkt entgegengesetzten Werth annimmt; und zwar nenne ich a, b, c,.... und deren Summen oder Differenzen dann Faktoren erster Ordnung.**

Hiernach ist also z. B. $a.b.c.d = -a.c.b.d$.

12. **Wenn in einem kombinatorischen Produkte zwei Faktoren erster Ordnung einander gleich sind, so ist das Produkt null.**

Z. B. $a.b.b.d = 0$ (wie sich auch sogleich ergiebt, wenn man in dem Beispiel zu no. 11. b und c gleich setzt). Folgende Aufgaben mögen zur Erläuterung dieser Multiplikationsweise dienen:

Aufg. 1. Das kombinatorische Produkt $(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3).(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3).(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3)$ zu entwickeln, wenn α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3; γ_1, γ_2, γ_3 Zahlgrössen; e_1, e_2, e_3 aber kombinatorische Faktoren erster Ordnung bezeichnen. Man erhält durch Anwendung der Rechnungsregeln (9—12) schliesslich den Ausdruck

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3)e_1.e_2.e_3.$$

Aufg. 2. Drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten durch die Regeln der kombinatorischen Multiplikation zu lösen (§. 45.).

Die drei Gleichungen seien

$$1 \;..\; \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2, \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3. \end{cases}$$

---

*) Dieser Ausdruck bezieht sich nicht nur auf die Verknüpfungsweise im Allgemeinen, sondern auch auf die Stellung des Faktors in dem Produkte.

Man multiplicire die 3 Gleichungen beziehlich mit 3 kombinatorischen Faktoren erster Ordnung e_1, e_2, e_3, deren Produkt nicht null ist, addire sie, und setze

$$2\ldots\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3=a,\\ \beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\beta_3 e_3=b,\\ \gamma_1 e_1+\gamma_2 e_2+\gamma_3 e_3=c,\\ \delta_1 e_1+\delta_2 e_2+\delta_3 e_3=d;\end{array}\right.$$

so erhält man die Gleichung

$$3\ \ldots\ xa+yb+zc=d.$$

Multiplicirt man diese Gleichung kombinatorisch mit $b.c$, so erhält man, weil $b.b.c$ und $c.b.c$ nach no. 12. null sind, die Gleichung

$$x.a.b.c=d.b.c,\text{ also } x=\frac{d.b.c}{a.b.c},$$

und auf ähnliche Weise findet man y und z, und erhält

$$4\ldots.\ x=\frac{d.b.c}{a.b.c},\ y=\frac{a.d.c}{a.b.c},\ z=\frac{a.b.d}{a.b.c}.$$

Diese Ausdrücke (in welchen die Gesetze der kombinatorischen Multiplikation kein Heben der einzelnen kombinatorischen Faktoren gestatten) sind äusserst bequem für die Analyse. Will man die Unbekannten in der gewöhnlichen Form ausgedrückt erhalten, so hat man nur aus Gleichung 2. zu substituiren, nach Aufg. 1. zu entwickeln und $e_1.e_2$ nach no. 11. im Zähler und Nenner zu heben; z. B. findet man

$$5\ldots.\ x=\frac{\delta_1\beta_2\gamma_3-\delta_1\beta_3\gamma_2+\delta_3\beta_1\gamma_2-\delta_3\beta_2\gamma_1+\delta_2\beta_3\gamma_1-\delta_2\beta_1\gamma_3}{\alpha_1\beta_2\gamma_3-\alpha_1\beta_3\gamma_2+\alpha_3\beta_1\gamma_2-\alpha_3\beta_2\gamma_1+\alpha_2\beta_3\gamma_1-\alpha_2\beta_1\gamma_3}.$$

Man sieht, wie dies Verfahren nicht nur überhaupt für n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten anwendbar ist, sondern wie man auch bei einiger Geläufigkeit hiernach sogleich das Endresultat hinschreiben kann, sobald die n Gleichungen gegeben sind.

IV. Anschauliche Begriffe der verschiedenen Grössen und Verknüpfungsweisen in der Geometrie.

13. **Die räumlichen Grössen erster Stufe sind einfache oder vielfache Punkte, und gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung.** (§ 13. — § 20.)

Sind A und B Punkte, so bezeichne ich die g. L. von A nach B, so fern an ihr zugleich Länge und Richtung, aber auch nichts weiter, festgehalten wird, mit $B-A$; ich sage also, dass $B-A$ dann und nur dann gleich B_1-A_1 sei, wenn die geraden Linien

Digitized by Google

von A nach B und von A_1 nach B_1 gleiche Länge und Richtung haben.

14. Die räumlichen Grössen $n$ter Stufe entstehen durch kombinatorische Multiplikation von n Grössen erster Stufe, welche als Faktoren erster Ordnung angenommen werden.

In diesem Falle, wenn nämlich die Faktoren erster Ordnung zugleich Grössen erster Stufe sind, nenne ich die Multiplikation eine äussere.

15. Sind A, B, C, D Punkte, so bedeutet (§ 106—115)

1) $A.B$ die Linie, welche A und B zu Gränzpunkten hat, aufgefasst als bestimmter Theil der durch A und B bestimmten unendlichen geraden Linie.

2) $A.B.C$ das Dreieck, dessen Ecken A, B, C sind, aufgefasst als bestimmter Theil der durch A, B, C bestimmten unendlichen Ebene.

3) $A.B.C.D$ das Tetraeder, dessen Ecken A, B, C, D sind, aufgefasst als bestimmter Theil des unendlichen Körperraumes.

D. h. wir setzen $A.B = A_1.B_1$, wenn beide Produkte gleiche und gleichbezeichnete*) Theile derselben geraden Linie vorstellen; ferner

$$A.B.C = A_1.B_1.C_1,$$

wenn beide Dreiecke gleiche und gleich bezeichnete Theile derselben Ebene sind; endlich

$$A.B.C.D = A_1.B_1.C_1.D_1,$$

wenn beide Tetraeder gleichen und gleichbezeichneten Inhalt haben.

16. Sind a, b, c Linien von bestimmter Länge und Richtung, so bedeutet (§ 28—36)

1) $a.b$ das Parallelogramm, dessen Seiten gleich und parallel a und b sind, und zwar aufgefasst als Flächenraum von bestimmter Grösse und Ebenen-Richtung**).

2) $a.b.c$ das Spath (Parallelepipedum), dessen Kanten gleich und parallel a, b, c sind, und zwar aufgefasst als Körperraum von bestimmter Grösse.

D. h. wir setzen

$$a.b = a_1.b_1,$$

wenn die Parallelogramme, welche durch diese Produkte dargestellt sind, in parallelen Ebenen liegen, und gleichen und gleichbezeichneten Flächenraum haben;

$$a.b.c = a_1.b_1.c_1,$$

*) Gleichbezeichnet nenne ich zwei Grössen, welche entweder beide positiven, oder beide negativen Werth haben.

**) Von zwei parallelen Ebenen sage ich, dass sie gleiche Ebenen-Richtnng haben.

Digitized by Google

wenn die durch diese Producte dargestellten Spathe gleichen und gleichbezeichneten Inhalt haben.

17. Die Seite (rechte oder linke), nach welcher die Konstruction einer räumlichen Grösse erfolgt, bestimmt ihren positiven oder negativen Werth, nämlich

1) Zwei Theile derselben Linie, $A.B$ und $A_1.B_1$, setzen wir als gleichbezeichnet, wenn B von A aus nach derselben Seite liegt, wie B_1 von A_1 aus.

2) Zwei Theile derselben Ebene, $A.B.C$ und $A_1.B_1.C_1$, setzen wir als gleichbezeichnet, wenn C von $A.B$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie C_1 von $A_1.B_1$ aus, oder deutlicher, wenn dem, der in A stehend nach B sieht, C nach derselben Seite hin liegt, wie C_1 dem liegt, der in A_1 stehend nach B_1 sieht.

3) Zwei Körpertheile $A.B.C.D$ und $A_1.B_1.C_1.D_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn D von $A.B.C$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie D_1 von $A_1.B_1.C_1$ aus; oder deutlicher, wenn einer menschlichen Figur, die den Kopf nach A, die Füsse nach B, das Auge nach C hin gerichtet hat, der Punkt D nach derselben Seite liegt, wie D_1 einer Figur, die den Kopf nach A_1, die Füsse nach B_1, das Auge nach C_1 hin gerichtet hat.

4) Zwei parallele Flächenräume $a.b$ und $a_1.b_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn die Richtung b von der Richtung a aus nach derselben Seite liegt, wie b_1 von a_1 aus.

5) Zwei Körperräume $a.b.c$ und $a_1.b_1.c_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn die Richtung c von $a.b$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie c_1 von $a_1.b_1$ aus, d. h. wenn einer menschlichen Figur, welcher die Richtung a von den Füssen zum Kopfe geht, und deren Augen in der Richtung b_1 vorwärts sehen, die Richtung c nach derselben Seite liegt, wie die Richtung c_1 einer Figur u. s. w.

18. Es giebt sieben Gattungen räumlicher Grössen, in vier Stufen vertheilt:

I. St.	1) Einfache oder vielfache Punkte. 2) Gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung.
II. St.	3) Bestimmte Theile bestimmter unendlicher gerader Linien. 4) Ebene Flächenräume von bestimmter Grösse und Ebenen-Richtung.
III. St.	5) Bestimmte Theile bestimmter unendlicher Ebenen. 6) Bestimmte Körperräume.
IV. St.	7) Bestimmte Körperräume.

Hier kommen die Körperräume zweimal vor, theils als Grössen dritter Stufe, theils als Grössen vierter Stufe, je nachdem sie als Produkte dreier g. L. von bestimmter Richtung und Länge, oder als Produkte von 4 Punkten aufgefasst werden.

19. Gleichbezeichnete Theile eines und desselben Ganzen geben als Summe einen ebenso bezeichneten

Theil desselben Ganzen, welcher so gross ist, als jene beiden zusammengenommen. (§. 8.).

Z. B. $A.B$ und $A_1.B_1$ geben, wenn sie gleichgerichtete Theile derselben unendlichen g. L. sind, zur Summe einen eben so gerichteten Theil derselben Linie, welcher so gross ist, als jene beiden Theile zusammengenommen.

20. Je zwei Grössen derselben Stufe, aber auch nur solche, können addirt werden; der Begriff für die Addition solcher Grössen lässt sich allemal bestimmen, wenn man die vorhergegebene Bezeichnung dieser Grössen festhält, und die Rechnungsregeln aus III. anwendet.

Aufg. 3. Zwei Punkte A und B zu addiren.

Setzt man $A+B=2S$, so erhält man $B-A=2(S-A)$, d. h. S ist die Mitte zwischen A und B. Also die Summe zweier Punkte ist die doppelt genommene Mitte zwischen beiden.

Aufg. 4. Zwei vielfache Punkte αA und βB zu addiren, wenn die Coefficienten α und β positiv sind, d. h. den Punkt S zu finden, welcher der Gleichung

$$\alpha A+\beta B=(\alpha+\beta)S$$

genügt. (§. 94—98).

Soll dieser Gleichung genügt werden, so muss

$$\beta(B-A)=(\alpha+\beta)(S-A)$$

sein, und umgekehrt erhält man aus der letzten die erstere. Aus der letzten folgt aber die Konstruktion: Man nimmt von der Linie AB von A aus den Theil $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ (oder von B aus den Theil $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$), so ist der Endpunkt dieses Theiles der Punkt S. — Also „die Summe zweier vielfachen Punkte mit positiven Koefficienten ist ein mit der Summe der Koefficienten multiplicirter Punkt, welcher in der geraden Linie zwischen beiden Punkten so liegt, dass seine Entfernungen von diesen beiden Punkten sich umgekehrt verhalten, wie die zu diesen Punkten gehörigen Koefficienten*).“

Aufg. 5. Einen Punkt A und eine ger. Linie von bestimmter Länge und Richtung $C-B$ zu addiren.

Man konstruire eine ger. Linie von A aus, welche mit $C-B$ gleich lang und gleich gerichtet ist; diese sei $D-A$, so ist D die gesuchte Summe; denn da $C-B=D-A$ ist, so ist

$$A+(C-B)=A+(D-A)=D.$$

Also „die Summe eines Punktes A und einer geraden Linie von bestimmter Länge und Richtung ist der Endpunkt dieser Linie, wenn A ihr Anfangspunkt ist.“

*) Man sieht, dass dieser Punkt der Schwerpunkt ist, wenn die Koefficienten Gewichte vorstellen.

Digitized by Google

Aufg. 6. Einen vielfachen Punkt αA und eine g. L. von bestimmter Länge und Richtung $C-B$ zu addiren

Man konstruire eine g. L. von A aus, welche mit $C-B$ gleiche Richtung hat, aber nur $\frac{1}{\alpha}$ so lang ist; diese sei $D-A$, so ist αD die gesuchte Summe. Denn da

$$C-B=\alpha(D-A) \text{ ist, so ist}$$
$$\alpha A+(C-B)=\alpha A+\alpha(D-A)=\alpha D.$$

Aufg. 7. Zwei ger. Linien von bestimmter Länge und Richtung $B-A$ und $D-C$ zu addiren.

Man mache $E-B=D-C$, so ist

$$(B-A)+(D-C)=(B-A)+(E-B)=E-A.$$

Also „zwei Linien von bestimmter Länge und Richtung addirt man, indem man, ohne die Länge und Richtung zu verändern, auf den Endpunkt der einen den Anfangspunkt der andern legt, dann ist die g. L. vom Anfangspunkte der ersten zum Endpunkte der letzten die gesuchte Summe."

Aufg. 8. n ger. Linien von bestimmter Länge und Richtung zu addiren.

Die wiederholte Anwendung der Auflösung von Aufg. 7. führt sogleich zu der Lösung dieser Aufgabe, nämlich „n ger. Linien von bestimmter Länge und Richtung addirt man, indem man die einzelnen Linien, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, nach der Reihe stetig d. h. so an einander legt, dass, wo die eine aufhört, die nächstfolgende anfängt; dann ist die g. L. vom Anfangspunkte der ersten zum Endpunkte der letzten die gesuchte Summe."

Aufg. 9. Die Summe von n Punkten A_1, A_2.....A_n zu finden, d. h. den Punkt S zu finden, welcher der Gleichung

$$A_1+A_2+\ldots.A_n=nS$$

genügt.

Subtrahirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung nR, wo R ein beliebiger Punkt ist, so erhält man

$$(A_1-R)+(A_2-R)+\ldots.(A_n-R)=n(S-R).$$

Und da aus dieser Gleichung wieder die erstere sich ableiten lässt, so folgt: „Um n Punkte zu addiren, zieht man von einem beliebigen Punkte R die g. L. nach den n Punkten, legt sie, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig an einander und zwar so, dass der Anfangspunkt der ersten auf R fällt, verbindet R mit dem Endpunkte der letzten durch eine g. L. und theilt diese Verbindungslinie in n gleiche Theile, so ist der erste Theilpunkt von R aus der Punkt S, dessen $n$faches die gesuchte Summe ist.

Aufg. 10. Beliebig viele vielfache Punkte αA, βB,.... zu addiren, wenn die Summe der Koefficienten $\alpha+\beta+\ldots.$ nicht null ist.

Setzt man

$$\alpha A+\beta B+\ldots.=(\alpha+\beta+\ldots.)S,$$

und subtrahirt auf beiden Seiten $(\alpha+\beta\ldots.)R$, wo R ein beliebiger Punkt ist, so erhält man

$$\alpha(A-R)+\beta(B-R)+\ldots.=(\alpha+\beta+\ldots)(S-R).$$

Also da auch hieraus wieder die erste Gleichung sich ableiten lässt, so folgt „die Summe von beliebig vielen vielfachen Punkten $\alpha A, \beta B\ldots.$, deren Koefficienten-Summe nicht null ist, findet man, indem man von irgend einem Punkte R aus die Linien nach A legt, diese dann beziehlich mit $\alpha, \beta, \ldots.$ multiplicirt*), die so gewonnenen Linien, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig an einander legt, so dass der Anfangspunkt der ersten in R fällt, dann R mit dem Endpunkte der letzten verbindet und von der Verbindungslinie von R aus den Theil $\frac{1}{\alpha+\beta+\ldots}$ nimmt, so ist der mit $(\alpha+\beta\ldots.)$ multiplicirte Endpunkt dieses Theiles die gesuchte Summe."

Aufg. 11. Die Summe von vielfachen Punkten αA, $\beta B,\ldots.$ zu finden wenn $\alpha+\beta+\ldots.=0$ ist.

Man subtrahire von $\alpha A+\beta B+\ldots.$ den Ausdruck $(\alpha+\beta+\ldots)R$, so wird, da diese subtrahirte Grösse null ist, der Werth der Summe nicht geändert, also ist

$$\alpha A+\beta B+\ldots.=\alpha(A-R)+\beta(B-R)+\ldots.$$

Also „die Summe von vielfachen Punkten, deren Koefficientensumme null ist, ist eine g. L. von bestimmter Länge und Richtung, die man dadurch findet, dass man von einem beliebigen Punkte R die g. L. nach den gegebenen Punkten zieht, diese mit den diesen Punkten zugehörigen Koefficienten multiplicirt, und die Produkte addirt."

Aufg. 12. Zwei Theile $A.B$ und $C.D$ von Linien, die sich in E schneiden, zu addiren.

Man mache $E.F$ gleich $A.B$ und $E.G$ gleich $C.D$, so ist $A.B+C.D=E.F+E.G=E.(F+G)=2E.S$, wenn S die Mitte von F und G ist (vergl. Aufg. 3). Also „zwei Theile von Linien, welche sich schneiden, addirt man, indem man diesen Theilen den Durchschnittspunkt als Anfangspunkt giebt; dann ist die doppelte g. L. vom Durchschnittspunkte zu der Mitte der beiden Endpunkte die gesuchte Summe**)."

Aufg. 13. Zwei parallele Linientheile $A.B$ und $C.D$ zu addiren, wenn beide nicht gleichlang und zugleich entgegengesetzt gerichtet sind.

Wenn $A.B$ und $C.D$ parallel sind, so muss $D-C$ gleich $\alpha(B-A)$ sein, wo α irgend eine positive oder negative Zahl ist.

*) Durch solche Multiplikation mit einer Zahlgrösse α ändert sich, wie man leicht sieht, wenn α positiv ist, die Richtung nicht, während die Länge im Verhältniss $1:\alpha$ sich ändert; und ist α negativ, so wird die Richtung die entgegengesetzte.

**) Diese ist zugleich die Diagonale des Parallelogramms, welches jene Linientheile zu Seiten hat, woraus man sieht, dass die Summe der Linientheile die zusammengesetzte Kraft ist, wenn die Linientheile Kräfte vorstellen.

Digitized by Google

Da nun $A.B$ gleich $A.(B-A)$ ist, weil $A.A$ nach no. 12. null ist, so hat man

$$A.B+C.D=A.(B-A)+C.(D-C)$$
$$=A.(B-A)+\alpha C.(B-A)$$
$$=(A+\alpha C)(B-A).$$

Ist die Summe $A+\alpha C$ gleich $(1+\alpha)S$ (vergl. Aufg. 4.), so wird der letzte Ausdruck

$$=S.(1+\alpha)(B-A)=S.(B-A+D-C),$$

worin eine einfache Konstruktion jener Summe liegt.

Aufg. 14. Zwei gleich lange und entgegengesetzt gerichtete Linientheile $A.B$ und $C.D$ zu addiren.

Liegen beide in derselben g. L., so ist die Summe null. Ist dies nicht der Fall, so ist, weil $D-C=-(B-A)$ ist,

$$A.B+C.D=A.(B-A)+C.(D-C)$$
$$=A.(B-A)-C.(B-A)$$
$$=(A-C).(B-A).$$

Dann ist die Summe also ein Flächenraum von bestimmter Grösse und Ebenen-Richtung*).

Aufg. 15. Zwei Flächenräume von bestimmter Grösse und Ebenenrichtung $a.b$ und $c.d$ zu addiren.

Sind die Ebenen parallel, so können sie schon nach no. 19. addirt werden, sind sie es nicht, so werden beide Ebenen eine Richtung gemeinschaftlich haben. Es sei e eine g. L., welche diese Richtung hat, und $a.b$ gleich $e.f$, $c.d$ gleich $e.g$, so ist

$$a.b+c.d=e.f+e.g.$$

Aufg. 16. Zwei Theile $A.B.C$ und $D.E.F$ bestimmter Ebenen, die nicht parallel sind, zu addiren.

Sind die Ebenen nicht parallel, so werden sie sich schneiden. Es sei $G.H$ ein Theil der Durchschnittslinie, und es sei $A.B.C$ gleich $G.H.J$, $D.E.F$ gleich $G.H.K$, so ist

$$A.B.C+D.E.F=G.H.J+G.H.K$$
$$=G.H.(J+K)=2G.H.S,$$

wenn S die Mitte zwischen J und K ist. Also „Zwei Theile nicht paralleler Ebenen addirt man, indem man sie als Dreiecke darstellt, deren gemeinschaftliche Grundseite in dem Durchschnitt beider Ebenen liegt; dann ist das Doppelte des Dreiecks,

*) Wie die Summe zweier Linientheile, die nicht in derselben Ebene liegen, zu behandeln sei, kann ich hier nicht ausführen (vergl. Ausdehnungsl. §. 51. u. §. 122.).

Digitized by Google

was dieselbe Grundseite hat, und dessen Spitze die Mitte ist zwischen den Spitzen jener Dreiecke, die gesuchte Summe.

Aufg. 17. Zwei Theile $A.B.C$ und $D.E.F$ paralleler Ebenen zu addiren.

Sind die Ebenen parallel, so muss $(E-D).(F-D)$ gleich $\alpha(B-A).(C-A)$ gesetzt werden können, wo α eine Zahlgrösse ist. Dann ist

$$A.B.C+D.E.F=A.(B-A).(C-A)+D.(E-D).(F-D)\,{}^{*)}$$
$$=(A+\alpha D).(B-A).(C-A)$$
$$=S.(1+\alpha).(B-A).(C-A),$$

wenn $(1+\alpha)S$ die Summe von $A+\alpha D$ ist. Der letzte Ausdruck ist

$$=S[(B-A).(C-A)+(E-D).(F-D)],$$

worin wieder eine einfache Konstruktion liegt. Ist jedoch $\alpha=-1$, d. h. sind beide Flächenräume gleich gross, aber entgegengesetzt bezeichnet, so ist $A+\alpha D$ eine g. L. von bestimmter Richtung und Länge (Aufg. 11.); ist diese gleich $H-G$, so ist

$$A.B.C+D.E.F=(H-G).(B-A).(C-A),$$

also die Summe dann ein Körperraum.

Aufg. 18. Einen Theil $A.B.C$ einer bestimmten Ebene und einen Körperraum $(D-A).(B-A).(C-A)$ zu addiren.

$$A.B.C+(D-A).(B-A).(C-A)$$
$$=A.(B-A).(C-A)+(D-A).(B-A).(C-A)$$
$$=D.(B-A)+(C-A),$$

woraus der Begriff dieser Addition leicht hervorgeht.

21. Ein kombinatorisches Produkt, dessen Faktoren erster Ordnung Grössen $(n-1)$ter Stufe sind, welche aber alle in einem und demselben Gebiete $n$ter Stufe liegen, nenne ich ein eingewandtes Produkt, und zwar ein auf jenes Gebiet bezügliches,

z. B. ein kombinatorisches Produkt von Linientheilen in der Ebene, oder von Ebenentheilen im Raume.

22. Wird von jetzt an die äussere Multiplikation durch blosses Aneinanderschreiben, die eingewandte Multiplikation durch einen zwischen die Faktoren gesetzten Punkt bezeichnet, so verstehen wir unter dem eingewandten Produkte $AB.AC$, wo A, B, C beliebige Grössen sind, das Produkt $ABC.A$, in welchem ABC wie ein zu A gehöriger Koefficient behandelt wird, vorausgesetzt, dass das Produkt auf das Gebiet von niedrigster Stufe, in welchem A, B und C zugleich liegen, bezogen wird.

Aufg. 19. Das auf die Ebene ABC bezügliche Produkt zweier Linientheile $AB.AC$ zu finden.

---

*) vergl. no. 12.

Digitized by Google

Nach no. 22 ist dasselbe gleich $ABC.A$; d. h. „das Produkt zweier Linientheile, deren Linien sich schneiden, ist der Durchschnittspunkt, verbunden mit einem Theil der Ebene als Koefficienten.“ Denkt man sich einen Theil der Ebene als Einheit angenommen, so werden die Ebenentheile, mit denen die Punkte behaftet sind, wirkliche Zahlgrössen und die Produkte erscheinen als vielfache Punkte; doch müssen dann alle zu vergleichenden Grössen in derselben Ebene, auf die sich die Produkte beziehen, liegen (wie dies in der Planimetrie immer der Fall ist).

Aufg. 19. Das Produkt dreier Linientheile AB, AC, BC in Bezug auf die Ebene ABC zu finden.

Aufl. $AB.AC.BC = ABC.ABC = (ABC)^2$.

Aufg. 21. Das eingewandte Produkt zweier Ebenentheile ABC und ABD (in Bezug auf den Körperraum) zu finden.

Aufl. $ABC.ABD = ABCD.AB$.

Aufg. 22. Das eingewandte Produkt dreier Ebenentheile ABC, ABD, ACD zu finden.

Aufl. $ABC.ABD.ACD = ABCD.ABCD.A = (ABCD)^2.A$

Aufg. 23. Das eingewandte Produkt von vier Ebenentheilen ABC, ABD, ACD, BCD zu finden.

Aufl. $ABC.ABD.ACD.BCD = (ABCD)^3$.

Anm. Das Produkt zweier Ebenentheile giebt also einen Linientheil, das dreier einen Punkt, aber jener Linientheil und dieser Punkt haben dann noch einen Raumtheil oder ein Produkt von Raumtheilen als Koefficienten, und nimmt man einen Raumtheil als Einheit an, so gehen diese Koefficienten in wirkliche Zahlgrössen über.

Dies etwa sind die wesentlichsten Begriffe, welche in dem ersten Theile meiner Ausdehnungslehre vorkommen. Aber es ist unmöglich, von der unendlichen Fruchtbarkeit dieser neuen Methode für die Behandlung nicht nur der Raumlehre, sondern überhaupt aller Wissenschaften, welche auf räumliche Verhältnisse zurückgehen, hier auch nur einen oberflächlichen Begriff zu geben. Ebenso wenig konnte ich hier die Beweise liefern, dass in der That die in III. gegebenen Rechnungsregeln für die einzelnen hier dargelegten Verknüpfungsweisen gelten, sondern auch hier muss ich auf meine ausführliche Schrift verweisen, in welcher diese Beweise in aller Strenge geführt sind; und wo zugleich die Entwickelung überall in der Art fortschreitet, dass alles Willkührliche, was noch in der Aufstellung der verschiedenen Begriffe zu liegen scheint, verschwindet.

Digitized by Google

XLIII.

Observation géométrique, au sujet du problême traité p. 321. du V. vol. de ce journal.

Par

Monsieur le docteur J. R. Boyman,

à l'école superieure de Malmedy.

1.

Décrivez par le sommet B d'un angle ABC (Tab. V. Fig. 1.) un cercle quelconque, qui coupera les deux côtés de l'angle en A et C, élevez à ces points les perpendiculaires, qui se rencontreront, comme on sait, sur la circonférence en un point D, et abaissez du point D la perpendiculaire DP sur la droite, qui joint les deux points A et C. Menez en outre entre les deux côtés de l'angle par le point P encore une droite GH à volonté, et circonscrivez au triangle GBH un cercle, qui coupera le premier en F. Si maintenant on joint DG, DH et FG, FH, on trouvera $\angle ADC = \angle GFH$; mais comme $\angle GFH$ est plus petit que $\angle GDH$, on aura aussi $\angle ADC$ plus petit que $\angle GDH$. Ainsi dans les deux triangles ADC et GDH on a $\angle ADC$ plus petit que $\angle GDH$, $DA < DG$, $DC < DH$, donc $AC < GH$. Or la droite GH ayant été menée à volonté par le point P, on est conduit au théorème suivant:

„Si entre les côtés d'un angle donné on tire une ligne „droite quelconque et que du point d'intersection des deux per- „pendiculaires élevées à ses extrémités sur les côtés de l'angle „on abaisse sur elle la perpendiculaire: le pied de cette per- „pendiculaire est un point tel, que la ligne droite est la droite „la plus courte qu'on puisse faire passer par ce point entre les „côtés de l'angle donné.

2.

Maintenant qu'après avoir tiré BP on décrive sur la ligne BP, comme diamètre, un cercle qui coupe la droite AC en Q, et qu'on joigne aussi BQ: alors on aura $\Delta\, DPA \sim \Delta\, AQB$ et $\Delta\, DPC \sim \Delta\, CQB$, d'où résultent les proportions suivantes:

$$AP : DP = BQA : Q,$$
$$DP : CP = CQ : BQ.$$

Si on multiplie ces deux proportions terme à terme, on trouvera la suivante:

$$AP : CP = CQ : AQ.$$

De là résulte

$$AP + CP : AP = CQ + AQ : CQ,$$

ou ce qui revient au même:

$$AC : AP = AC : CQ,$$

d'où l'on conclut:

$$AP = CQ.$$

Nous venons donc de démontrer le théorême suivant:

„Si par un point entre les côtés d'un angle quelconque on „mène la ligne droite la plus courte et qu'on décrive un cercle „sur la ligne qui joint ce point au sommet de l'angle, comme „diamètre: la droite la plus courte sera coupée par la circon- „férence, de maniere que les deux segments hors du cercle „sont égaux."

5.

D'après ce qui précède il n'y a plus de difficulté pour tirer la droite la plus courte par un point P donné entre les côtés d'un angle, comme c'est aussi indiqué dans le traité cité. Car outre le point P on a aussi le point Q, qui détermine sa position. Mais ce point est le point d'intersection du cercle décrit sur la ligne BP comme diamètre et (puisqu'on doit avoir $AP = CQ$) de l'hyperbole ménée par le point P, laquelle a les côtés de l'angle donnée pour asymptotes.

Digitized by Google

XLIV.

Betrachtungen einiger Gegenstände der Logik, mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Mathematik.

Von

Herrn Dr. Wilhelm Matzka,

Professor der Mathematik
an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow in Galizien.

Allgemein erkennt man an, dass einerseits die Mathematik und von ihr ganz vorzüglich die reine Geometrie und Statik die beste Schule für die gründlichste und folgerechteste Anwendung der Logik sei, und andrerseits dass die Logik durch die Bemühungen der neueren meist deutschen Philosophen seit Kant, einen sehr hohen Aufschwung in ihrer Ausbildung genommen hat. Dessungeachtet folgen diejenigen Schriftsteller und Lehrer der Mathematik, welche ihre Lehrgegenstände ausführlich begründen, mit sehr geringer Ausnahme, noch immer der Weise Euklid's in den zwar für seine Zeit ganz vorzüglichen aber doch nicht unverbesserlichen Elementen der Geometrie; was um so weniger zu billigen zu sein scheint, als heut zu Tage besonders an gelehrten Schulen der Zögling schon eine höhere wissenschaftliche Vorbildung als vordem mitbringt und als man durch den ungeheuren Umfang, den die theoretische Mathematik schon erlangt hat, hauptsächlich auf übersichtliche und gedrängte Darstellung des Lehrganzen, jedoch ohne dabei die Deutlichkeit und Gründlichkeit ausser Acht zu lassen, hinzuarbeiten sich gedrungen sieht. Darum möge es mir erlaubt sein, in dem wegen seiner Tendenz, vorzüglich Lehrern höherer wissenschaftlicher Bildungsanstalten zu dienen, am besten hiezu geeigneten vortrefflichen Archiv, durch folgende Winke die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die Verbesserung der Anordnung der Lehrsätze ihrer Wissenschaft und der logischen Form ihrer Beweise zu lenken.

I.

Ueber unmittelbare Folgerungen aus hypothetischen Urtheilen mittels der Umkehrung oder der Contraposition.

1. Die **Umkehrung** eines hypothetischen Urtheils besteht in der Verwechslung oder Umstellung des Grundes und der Folge, der Bedingung und des Bedingten; indem man, die Folge als Grund setzend, auf den Grund als Folge zurückschliesst. Die allgemeine Form des hypothetischen Urtheils ist nemlich:

„Wenn *A* ist, so ist *B*;“

daher die Form seines Umgekehrten:

„Wenn *B* ist, so ist *A* “

Dieser Schluss aus dem Bestehen der Folge auf das Bestehen des Grundes ist jedoch nicht nothwendig, sondern bloss etwa zufällig richtig, oft sogar ganz unrichtig. Denn das hypothetische Urtheil spricht nur die einseitige Abhängigkeit der Folge vom Grunde aus, setzt aber keineswegs umgekehrt die Verknüpfung des Grundes mit der Folge als nothwendig voraus. In dem Wesen des Grundes liegt es, dass er die Folge nach sich zieht; aber die Folge allgemein gedacht kann in besonderen Fällen verschiedene Gründe haben. Setzt man daher eine gewisse Folge, so muss man darum noch nicht diesen oder jenen bestimmten Grund setzen. Die Folge wird im hypothetischen Urtheile nur gesetzt, wenn und wiefern der Grund gesetzt wird; allein dieses Setzen des Grundes erscheint an sich bloss möglich, nicht aber unbedingt nothwendig. — Die Gültigkeit eines umkehrenden hypothetischen Urtheils muss demnach jedesmal erst eigens geprüft und wo möglich erwiesen werden, wenn man ihrer versichert sein soll.

So z. B. beweist die Geometrie den Satz:

„Wenn Parallelogramme gleiche Grundlinien und Höhen haben, so sind sie gleich;“

allein umgekehrt darf man nicht schliessen:

„Wenn Parallelogramme gleich sind, so haben sie gleiche Grundlinien und Höhen;“

denn dies findet nur in ganz besonderen Fällen statt, und kann also auch gar nicht allgemein bewiesen werden. Den Satz dagegen:

„Wenn Parallelogramme von gleichen Grundlinien gleiche Höhen haben, so sind sie gleich“

darf man zwar in den folgenden umkehren:

„Wenn Parallelogramme von gleichen Grundlinien gleich sind, so haben sie gleiche Höhen;“

allein seine Gültigkeit muss erst nachgewiesen werden.

2. Die **Contraposition** eines hypothetischen Urtheils besteht in der Umtauschung sowohl des Grundes als auch der Folge mit ihrem contradictorischen Gegentheile und in der nachherigen Umstellung dieser Gegentheile. Man folgert also hier aus dem Gegentheile, dem Nichtbestande, der Folge das Gegentheil, den

Nichtbestand des Grundes; oder man hebt mit der Folge auch den Grund auf. Aus dem allgemein hypothetischen Urtheile

„Wenn *A* ist, ist *B*“

schliesst man nemlich:

„Wenn *B* nicht ist, ist auch *A* nicht.“

Diese unmittelbare Folgerung aus einem hypothetischen Urtheile durch Contraposition hat jederzeit strenge logische Gültigkeit. Denn eigentlich ist sie ein abgekürzter hypothetischer Schluss in aufhebender Schlussweise, ein Enthymem der zweiten Ordnung, in welchem der Untersatz fehlt, durch den die Folge aufgehoben wird. In der allgemeinen Form zum aufhebenden hypothetischen Schluss vervollständigt lautet sie daher also:

Obersatz: „Wenn *A* ist, so ist *B*.“
Untersatz: „Nun ist *B* nicht.“
Schlusssatz: „Also ist auch *A* nicht.“

3. Durch die Contraposition der hypothetischen Urtheile oder der durch die unmittelbare Folgerung des Gegentheils des Grundes aus dem Gegentheile der Folge eines hypothetischen Urtheils kann man in der Mathematik, besonders in der reinen Geometrie, wo die meisten Lehrsätze hypothetisch ausgesprochen werden oder sich wenigstens hypothetisch aussprechen lassen, aus sehr vielen Lehrsätzen, sobald sie erwiesen sind, andere unmittelbar erschliessen; ohne dass man wie Euklid und seine Nachahmer, erst noch eines indirecten Beweises für sie bedarf oder über ihre strenge Gültigkeit auch nur den mindesten Zweifel zu hegen vermag. Gewöhnlich wird man dahei, zur Aufhellung der Einsicht, bloss den schon bewiesenen Lehrsatz nachträglich, den daraus abzuleitenden Folgesatz aber anfänglich, in der hypothetischen Form auszusprechen haben, und dem letzteren dann erst noch den angemessenen sprachlichen Ausdruck ertheilen.

Durch einen solchen Vorgang drängt man nicht nur den Lehrgegenstand mehr zusammen — was bei dem gegenwärtigen Umfange der zu lehrenden Wissenschaften schon höchst Noth thut — sondern man verschafft auch dem Lernenden einen helleren Blick in die Natur des Lehrgegenstandes und in den Zusammenhang seiner Wahrheiten.

So z. B. beweist man in der ebenen Geometrie nach Euklid einzeln und nach einander folgende Sätze:

a) „Durch denselben Punkt kann mit einer Geraden nur eine einzige Gerade parallel gezogen werden.“

b) „Eine gerade Linie, welche eine von zwei parallelen schneidet, muss auch die andere schneiden.“

c) „Zwei gerade Linien, welche zu derselben dritten parallel sind, müssen auch unter sich parallel sein.“

Nun sind die beiden ersteren Sätze nichts weiter als verschiedene Ausdrücke des hypothetischen Satzes:

„Wenn zwei Geraden sich schneiden, so können sie nicht zugleich zur nemlichen dritten parallel sein;“

der also allein zu beweisen kommt. Und daraus folgt sogleich ohne allen Beweis bloss durch Contraposition der dritte Satz zunächst in der hypothetischen Form:

„Sind zwei Geraden zu einer dritten parallel, so schneiden sie sich nicht, d. h. sie sind auch zu einander parallel.“

Man bedarf daher hier nur Eines Beweises statt dreier.

4. Die Umkehrung eines hypothetischen Urtheils führt jedoch dann auf ein wahres Urtheil, oder man schliesst richtig von dem Bestehen der Folge auf das Bestehen des Grundes, wenn man überzeugt ist, dass nur bei dem angeführten Grunde die Folge nothwendig besteht, oder dass ein bestimmter Grund und eine gewisse Folge einander gegenseitig bedingen, unumgänglich mit einander stehen und fallen.

Hier lässt sich nemlich das gegebene hypothetische Urtheil in der Form aussprechen:

„Nur wenn A ist, ist auch B;“

und man schliesst daraus mit voller logischen Strenge:

„Wenn B ist, muss auch A sein.“

Denn in einem solchen Falle gilt das gegebene Urtheil eigentlich folgenden zweien gleich:

„Wenn A ist, ist auch B,“

und

„Wenn A nicht ist, ist auch B nicht.“

Aus dem ersteren folgert man aber mittels seiner Umkehrung:

„Wenn B ist, kann — unter andern — A sein;“

und aus dem zweiten Urtheile, mittels der Contraposition:

„Wenn B ist, ist auch A;“

mithin aus beiden Urtheilen zusammen, wie oben:

„Wenn B ist, muss auch A sein.“

Z. B. der Satz der Astronomie:

„Nur wenn die Erde die Gestalt einer Kugel hat, ist ihr Schatten auf dem verfinsterten Monde jedesmal kreisrund,“

berechtigt uns zu dem Schlusse:

„Weil der Schatten der Erde auf dem verfinsterten Monde jedesmal kreisrund sich zeigt, so muss die Erde die Kugelgestalt haben.“

Ebenso schliesst man aus dem geometrischen Satze:

„Wenn zwei Parallelogramme gleich sind, so haben sie die Grundlinien im verkehrten Verhältnisse der Höhen“

mit Sicherheit:

„Wenn zwei Parallelogramme die Grundlinien im verkehrten Verhältnisse der Höhen haben, so sind sie gleich.“

Digitized by Google

5. Diese letztere Schlussweise wird in der Mathematik, besonders in den Anwendungen der Algebra auf Geometrie, Mechanik, Physik, Astronomie u. dgl. und in der höheren Analysis häufig angewendet.

In den allgemeinen algebraischen Forschungen dieser mathematischen Doctrinen erscheinen nemlich oft gewisse Grössen in einem solchen Zusammenhange, dass überhaupt die zwischen ihren Zahlwerthen bestehenden Beziehungen theils durch Gleichungen, theils durch Ungleichungen, theils auch noch durch sonstige Bedingungen ausgesprochen werden, welche zusammen gefasst ein System von Beziehungen ausmachen, das wir kurz mit A bezeichnen wollen. Tritt nun dazu in einem besonderen Falle noch ein System B von solchen Beziehungen zwischen einigen oder allen in Betracht genommenen Grössen oder ein System particulärer Werthe einiger jener Grössen, und verwandelt sich dadurch, mittels der algebraischen Reductionen, das allgemeine System A nothwendig in ein anderes nun mehr particuläres System C; so gewinnt man daraus die Ueberzeugung:

„Wenn zwischen den betrachteten Grössen insbesondere das System B von Beziehungen besteht, so besteht zwischen ihnen auch das System C."

Hat man nun das System B, wie es gewöhnlich geschieht, so allgemein angenommen, dass nur bei seinem Bestande das System C besteht, was aus der Art der Beziehungen, aus den Formen der Gleichungen und der Beschaffenheit der darin vorkommenden Rechnungsoperationen meistens dergestalt einleuchtet, dass eine weitläufige Erörterung überflüssig erscheint; so ist eigentlich der Satz festgestellt:

„Nur wenn zwischen den in Betracht genommenen Grössen das besondere System B von Beziehungen besteht, kann und muss zwischen ihnen auch das System C von Beziehungen bestehen."

Folglich schliesst man daraus mit voller Sicherheit umgekehrt:

„Wenn das System C von Beziehungen besteht, so besteht auch das System B."

Meistens sprechen die Analytiker diesen Folgesatz nicht erst noch eigens aus, sondern benützen ihn, wo er Anwendung findet, ohne weiteres Bedenken.

Beispiel 1. In der Planimetrie wird der Satz erwiesen:

„Parallelogramme verhalten sich wie die Producte ihrer Grundlinien und Höhen."

Sind nemlich P, p zwei Parallelogramme, A, a ihre Höhen und B, b ihre Grundlinien, so ist

$$P:p = AB:ab.$$

In dieser Proportion setzt man nun insbesondere $P=p$ und folgert daraus auch $AB=ab$ oder $A:a$ wie $b:B$.

Man hat also eigentlich den Satz erwiesen:

„Wenn $P=p$, so $A:a=b:B$"

d. h. „Sind zwei Parallelogramme gleich, so sind ihre Höhen den Grundlinien verkehrt proportional;

und hieraus folgert man sogleich ohne ferneren Beweis umgekehrt:

„Wenn $A:a=b:B$, so $P=p$;

d. h. „Wenn zwei Parallelogramme ihre Höhen den Grundlinien verkehrt proportional haben, so sind sie gleich."

Beispiel 2. Bezeichnen a, b, c die Seiten eines geradlinigen Dreiecks und α, β, γ die in derselben Ordnung ihnen gegenüberliegenden Winkel, so beweist die Trigonometrie den allgemeinen Satz: $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\alpha$. Nimmt man nun das Product $2bc.\cos\alpha=0$ an, was nur dann sein kann, wenn $\cos\alpha=0$, also $\alpha=90°$ ist; so erhält man den Satz: Wenn $\alpha=90°$, so ist $a^2=b^2+c^2$, d. h. den bekannten pythagoräischen Lehrsatz.

Allein man folgert daraus auch sogleich umgekehrt:

„Wenn $a^2=b^2+c^2$, so $\alpha=90°$;"

d. h. „Wenn in einem Dreiecke die zweite Potenz des Zahlwerthes einer Seite so gross ist, als die zweiten Potenzen der Zahlwerthe der beiden andern Seiten zusammen genommen; so liegt der ersteren Seite ein rechter Winkel gegenüber."

Beispiel 3. Die analytische Geometrie stellt zu einer Linie oder Fläche, für eine gewählte Art von Coordinaten, eine Gleichung oder ein System zusammen gehöriger Gleichungen auf, wodurch jene Linie oder Fläche analystisch vollständig charakterisirt wird; folglich erweist sie eigentlich den Satz:

„Wenn eine Linie oder Fläche für eine gewisse Art von Coordinaten diesen angeführten Charakter besitzt; so kommt ihr die hier abgeleitete Gleichung oder dieses System simultaner Gleichungen zu."

Sie schliesst daraus aber auch noch umgekehrt:

„Wenn einer Linie oder Fläche, bei der angewiesenen Art von Coordinaten, diese bestimmte Gleichung oder dieses bestimmte System von simultanen Gleichungen zukommt, so besitzt sie den vorher beschriebenen Charakter."

So beweist z. B. die Lehre von den Kegelschnitten, dass in der Parabel, wenn p den Parameter eines Durchmessers und x, y die hier gewöhnlichen schiefwinkligen Coordinaten vorstellen, die Gleichung $y^2=px$ besteht. Andrerseits lehrt die Ballistik oder die Dynamik, dass im leeren Raume ein schief gegen den Horizont geworfener Körper eine Linie durchläuft, deren Gleichung die Form $y^2=px$ hat; mithin, schliesst sie, beschreibt dieser Körper eine Parabel.

II.

Von der Umkehrung mehrerer zusammenhängender allgemeiner disjunctiver und hypothetischer Urtheile.

1. Höchst wichtig ist folgender, zuerst von Hauber *) aufgestellter Satz, nach dessen Anleitung man aus mehreren zusammen-

*) Vergleiche dessen Scholae logico-mathematicae. cap. 7. Stuttgart. 1829, und Drobisch Logik. Leipzig. 1836. S. 162.

Digitized by Google

hängenden allgemein-bejahenden disjunctiven und hypothetischen Urtheilen mittels Umkehrung andere unmittelbar folgern kann.

Seien als gültig anerkannt:

erstens folgende zwei disjunctive Urtheile:

Der Begriff S kann nur entweder a oder b oder c, oder s. f. sein.

Der Begriff Σ kann nur entweder α oder β oder γ oder s. f. sein;

zweitens folgende hypothetische Urtheile:

Wenn S, a ist, so ist Σ, α;
Wenn S, b ist, so ist Σ, β;
Wenn S, c ist, so ist Σ, γ;
u. s. w.;

dann gelten auch umgekehrt die folgenden hypothetischen Urtheile:

Wenn Σ, α ist, so ist S, a;
Wenn Σ, β ist, so ist S, b;
Wenn Σ, γ ist, so ist S, c;
u. s. w.

Es genügt nur das erste behauptete Urtheil:

„Wenn Σ, α ist; so ist S, a“

zu erweisen, weil die übrigen ihm analog sind.

Indirecter Beweis. Wäre der Behauptung zuwider S nicht a, so müsste S entweder b oder c oder d u. s. f. sein.

Wäre S, b, so wäre nach der Annahme Σ, β also nicht Σ, α
„ S, c, „ „ „ „ „ Σ, γ also nicht Σ, α
wie bedungen, u. s. w.

Mithin wenn Σ, α ist, kann S weder b, noch c, noch d u. s. f. folglich nur a sein, wie behauptet wurde.

Directer Beweis. Aus den vorausgesetzten beiden disjunctiven und allen hypothetischen Urtheilen folgt der Satz:

Wenn S nicht a ist, folglich entweder b oder c oder d u. s. f., so ist Σ entweder β oder γ oder δ u. s. f. also nicht α; kurz: Wenn S nicht a ist, so ist auch Σ nicht α.

Hieraus folgert man aber durch Contraposition sogleich richtig den behaupteten Satz:

Wenn Σ, α ist, so ist S, a.

2. Aus diesem höchst allgemeinen Umkehrungsgesetze lassen sich für die Mathematik viele wichtige Sätze ableiten.

Betrachten wir zunächst zwei mit einander zusammenhängende Gattungen von Grössen in Absicht auf ihre gleichzeitigen Veränderungen. Gewöhnlich beweist man von ihnen folgende zwei Sätze:

1) „Zu gleichen Grössen der ersten Gattung gehören gleiche Grössen der andern Gattung.“

2) „Zu ungleichen Grössen der ersten Gattung gehören ungleiche Grössen der zweiten Gattung; und zwar gehört zu

einer grösseren Grösse der ersten Gattung eine grössere / kleinere Grösse der zweiten Gattung.

Hier bedeutet nun S und Σ die Vergleichung, welche zwischen zwei Grössen der ersten und zweiten Gattung besteht; a und α das Gleichsein beider Grössen, b das Grösser-, c das Kleinersein in der ersten Gattung, β das Grösser- / Kleiner- und γ das Kleinersein / Grössersein in der zweiten Gattung. Mithin folgert man nach obigem Umkehrungsgesetze aus den erwiesenen zwei Sätzen noch diese zwei zugehörigen:

3) „Zu gleichen Grössen der zweiten Gattung gehören gleiche Grössen der ersten Gattung."

4) „Zu ungleichen Grössen der zweiten Gattung gehören ungleiche Grössen der ersten Gattung; und zwar gehört zu einer grösseren Grösse der zweiten Gattung eine grössere / kleinere Grösse der ersten Gattung."

Beispiel 1. Die Algebra beweist, dass, wofern in einem Producte ein Factor (der Multiplicand) ungeändert bleibt, a) zu gleichen zweiten Factoren (Multiplicatoren) gleiche Producte und b) zu einem grösseren zweiten Factor (Multiplicator) ein grösseres Product gehört. Indem sie ferner bei der Lehre von der Theilung das Product in den Dividend, den ersten Factor in den Divisor und den zweiten Factor in den Quotienten übersetzt; folgert sie sogleich, dass, bei ungeändertem Theiler oder Divisor, α) zu gleichen Dividenden gleiche Quotienten und β) zu einem grösseren Dividenden ein grösserer Quotient gehört.

Beispiel 2. Die Planimetrie erweist, dass in einem Dreiecke a) gleichen Seiten gleiche Winkel und b) einer grösseren Seite ein grösserer Winkel gegenüber liegen. Daraus lässt sich daher sogleich folgern, dass auch umgekehrt c) gleichen Winkeln gleiche Seiten und d) einem grössern Winkel eine grössere Seite gegenüber liegen müssen.

3. Diese Sätze lassen sich nunmehr leicht auf drei oder mehrere unter einander zusammenhängende Gattungen von Grössen ausdehnen. Seien nemlich die beiden folgenden Sätze erwiesen:

1) „Zu gleichen Grössen der ersten Gattung gehören auch gleiche Grössen der zweiten, dritten, vierten und so fort jeder andern Gattung."

2) „Zu einer grösseren Grösse der ersten Gattung gehört bald eine grössere bald eine kleinere Grösse einer jeden andern Gattung, jenachdem diese mit der ersten in gerader oder verkehrter Vergleichung steht."

Dann folgert man daraus umgekehrt für jede übrige Gattung zwei Sätze von folgender Form:

a) „Zu gleichen Grössen jedweder anderen Gattung gehören auch gleiche Grössen der ersten, mithin auch jeder übrigen Gattung."

Digitized by Google

b) „Zu einer grösseren Grösse jedweder anderen Gattung gehört bald eine grössere, bald eine kleinere Grösse der ersten, jenachdem diese zwei Gattungen in gerader oder verkehrter Vergleichung mit einander stehen; mithin gehört dazu auch entweder eine grössere oder kleinere Grösse jeder übrigen Gattung, je nachdem diese mit der ersten Gattung in gerader oder verkehrter Vergleichung steht.

Beispiel 1. In der Planimetrie / Stereometrie beweist man von den schiefen Geraden, die nebst der senkrechten aus einem Punkte an eine Gerade / Ebene gezogen werden die beiden Sätze:

a) Schiefe, welche mit der Senkrechten gleiche Winkel bilden, sind gleich und haben ihre Fusspunkte von dem der Senkrechten gleich weit abstehen.

b) Zu einem grösseren Winkel einer Schiefen mit der Senkrechten gehört eine grössere oder längere Schiefe und ein grösserer Abstand von der Senkrechten.

Hieraus folgt nun umgekehrt:

c) Gleiche Schiefen bilden mit der Senkrechten gleiche Winkel und stehen von der Senkrechten gleich weit ab.

d) Eine grössere Schiefe bildet mit der Senkrechten einen grösseren Winkel und steht von ihr weiter ab.

e) Schiefe, welche von der Senkrechten gleich weit abstehen, bilden mit der Senkrechten gleiche Winkel und sind gleich.

f) Eine Schiefe, welche von der Senkrechten weiter absteht, bildet mit dieser Senkrechten einen grössern Winkel und ist länger.

Beispiel 2. Die Lehre vom Kreise beweist, dass

a) zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte gleiche Kreisbogen, Kreisausschnitte, Sehnen und gleiche Winkel der Sehnen mit den Halbmessern zu ihren Grenzpunkten, gleiche Abstände der Sehnen vom Mittelpunkte, gleiche Sagitten und Kreisabschnitte gehören; und

b) dass zu einem grösseren hohlen / erhobenen Winkel am Mittelpunkte auch ein grösserer Kreisbogen und Kreisausschnitt, eine grössere / kleinere Sehne, ein kleinerer / grösserer Winkel der Sehne mit dem Halbmesser am Grenzpunkte, ein kleinerer / grösserer Abstand der Sehne vom Mittelpunkte, eine grössere / kleinere Sagitte und ein grösserer / kleinerer Kreisabschnitt gehört.

Daraus kann man sogleich umgekehrt schliessen, dass wenn einer der genannten Gegenstände gleich ist, auch jeder andere gleich sein muss; und dass z. B. einer längeren Sehne ein grösserer hohler und ein kleinerer erhobener Winkel am Mittelpunkte, ein kleinerer Winkel der Sehne mit dem Halbmesser an ihren Grenzpunkten, ein kürzerer Abstand vom Mittelpunkte u. s. f. angehört.

4. Selbst wenn die Abhängigkeit der betrachteten Gattungen von Grössen in bestimmteren Formen ausgesprochen wird, lässt

Digitized by Google

sich das angeführte Umkehrungsgesetz noch benützen, wie z. B. bei der Proportionalität zweier Gattungen von Grössen.

Ist nemlich erkannt, dass zwei Gattungen von Grössen dergestalt zusammenhängen: α) dass zu gleichen Grössen einer jeden Gattung auch gleiche der anderen und β) zu einer grösseren einer jeden Gattung auch eine grössere / kleinere der anderen gehört und γ) dass zu jedem Vielfachen einer jeden Grösse der ersten Gattung das Ebensovielfache / der ebensovielte Theil der zugehörigen Grösse der zweiten Gattung gehört; so gilt, vermöge des erwähnten Umkehrungsgesetzes, auch der Schluss umgekehrt von der zweiten Gattung auf die erste, und beide Gattungen von Grössen heissen dann zu einander direct / verkehrt proportional

5. Aus allen diesen Beispielen erhellet, dass hier, so wie in ähnlichen Fällen die Beweise, ja sogar die blosse Anführung der umgekehrten Sätze, da diese für sich verständlich sind, überflüssig ist, wenn nur dieses Umkehrungsgesetz als dem zu Unterrichtenden bereits bekannt vorausgesetzt werden darf, daher zu diesem Zwecke etwa in die Vorrede oder in die Vorbegriffe des betreffenden Lehrbuches aufgenommen worden ist.

III.

Ueber indirecte Beweise und ihre Ersetzung durch directe.

1. Directe Beweise lassen bekanntlich die Wahrheit ihres Satzes als Schlusssatz aus richtigen Prämissen unmittelbar erkennen; indirecte Beweise dagegen stellen die Gültigkeit ihrer Behauptung dadurch ausser Zweifel, dass sie zeigen, das Gegentheil derselben sei unmöglich, in so fern es andern anerkannten Wahrheiten widerstreitet. Directe Beweise gewähren daher eine befriedigende Erkenntniss des nothwendigen Zusammenhanges der Behauptung mit ihren Beweisgründen, indirecte aber lassen nur den Widerstreit des Gegentheils der Behauptung mit den Beweisgründen erkennen. Denn directe Beweise zeigen, dass und warum etwas wahr sei und gerade so sein müsse, die indirecten aber bloss, dass und warum es nicht falsch sei und nicht anders sein könne. Durch den directen Beweis werden wir daher weit inniger von der Wahrheit des zu beweisenden Satzes durchdrungen, als durch den indirecten Beweis, welcher uns bloss das Zugeständniss derselben abnöthigt. Doch sind darum die indirecten Beweise noch nicht geradezu verwerflich; denn wo sich die vorausgesetzten Disjunctionen, von denen man eine behauptet, die übrigen aber widerlegt, vollständig übersehen lassen, wie vorzüglich in der Mathematik, passt derselbe immerhin. Wünschenswerth bleibt es jedoch immer, die indirecten Beweise überall, wo es nur angeht, durch directe zu ersetzen und sie nur als unumgängliche Nothbehelfe zu gebrauchen. Wie jenes Ersetzen wenigstens in manchen Fällen geleistet werden kann, soll hier gewiesen werden.

Digitized by Google

2. Haupthülfen der Vermeidung indirecter Beweise sind die bereits in den vorangehenden zwei Abschnitten behandelten Contrapositionen hypothetischer Urtheile und die Umkehrung hypothetisch-disjunctiver Urtheile; da die daraus fliessenden unmittelbaren Folgerungen sonst indirect erwiesen werden müssten.

Man wird daher überhaupt das indirect zu beweisende logische Urtheil vorerst contraponiren und dieses neue (contraponirende) Urtheil erweisen; dann folgt daraus, mittels abermaliger Contraposition, das zu erweisende von selbst. Soll das kategorische Urtheil

„*A* ist *B*“

bewiesen werden, so wird man vorerst das contraponirende

„Ein Nicht-*B* kann nicht *A* sein“

begründen; dann folgt jenes unmittelbar daraus.

Ist das hypothetische Urtheil

„Wenn *A* ist, so ist *B*“

zu erweisen, so zeigt man zuvörderst

„Wenn *B* nicht ist, so ist auch *A* nicht.“

Sehr oft muss aber hierbei noch eine Umgestaltung des Ausdruckes des vorerst zu erweisenden contraponirenden Urtheils vorgenommen werden.

Beispiel 1. Dem Satze:

„Wenn zwei in einer Ebene befindliche Geraden von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden (d. h. so, dass jede zwei Wechselwinkel gleich sind und jede zwei Gegenwinkel *) zusammen genommen zwei rechte Winkel ausmachen), so schneiden sie sich nicht, und sind also zu einander parallel;“ schickt Euklid folgende zwei Sätze voraus:

„In jedem Dreiecke ist
1) der äussere Winkel grösser als jeder innere ihm gegenüber liegende, und
2) die Summe jeder zwei Winkel kleiner als zwei rechte.“

Beide lassen sich nun in den Satz zusammenziehen:

„Wenn sich zwei Geraden schneiden, so werden sie von jeder dritten Geraden in zwei Punkten dergestalt geschnitten, dass auf derjenigen Seite der Schneidenden, auf welcher ihr Durchschnittspunkt liegt, der äussere Winkel grösser als sein innerer Wechselwinkel und die Summe der inneren Gegenwinkel kleiner als zwei rechte ist, kurz, sie werden unter ungleichen Wechselwinkeln geschnitten.“

Daraus folgt demnach der anfangs aufgestellte Satz unmittelbar bloss durch einfache Contraposition ohne den weitwendigen Beweis Euklids.

---

*) Vergl. Knar Anfangsgründe der reinen Geometrie. Grätz. 1829. S. 42. §. 160.

Beispiel 2. Eben so folgt sein Satz:

„Wenn an den Berührungspunkt einer Geraden mit einer Kreislinie der Halbmesser gezogen wird, so muss dieser auf der berührenden Geraden senkrecht sein“

ohne den indirecten Beweis, den er giebt, aus dem nächst vorhergehenden Lehrsatze:

Die gerade Linie, welche auf dem Halbmesser in dem Endpunkte senkrecht errichtet wird, berührt die Kreislinie;

„jede andere Gerade aber, die durch eben diesen Punkt (also schief gegen den Halbmesser) gezogen wird, schneidet die Kreislinie noch in einem zweiten Punkte.“

Denn hieraus folgt durch Contraposition unmittelbar:

„Wenn eine Gerade eine Kreislinie in einem Punkte nicht schneidet, sondern berührt, so steht sie nicht schief auf dem Halbmesser dieses Punktes“

und dieser Satz ist dem zu erweisenden gleichgeltend.

3. Oft kommt zu erweisen, dass unter mehreren möglichen Gegenständen einer Art nur ein einziger eine beschriebene Eigenschaft besitze. In einem solchen Falle umgeht man den indirecten Beweis, wenn man darthut, dass, sobald man sich ausser jenem ausgezeichneten Gegenstande noch was immer für einen dieser Art denken will, er die angeführte Eigenschaft nicht, oder das Gegentheil derselben besitzt. Zuweilen ist dazu erforderlich, die Definition dieser Eigenschaft und ihres Gegentheils in dem zu erweisenden Lehrsatze zu wiederholen.

Beispiel 1. Soll der Satz bewiesen werden:

„Jede begrenzte Linie hat nur Einen Halbirungspunkt“,

so zeigt man, dass jeder andere Punkt, den man sich ausser dem angenommenen Halbirungspunkte denken will, die Linie in zwei Theile zerschneidet, von denen einer kleiner, der andere grösser als die Hälfte ist, die also ungleich sind.

Beispiel 2. Den Satz:

„Durch einen Punkt ist auf eine Gerade nur eine einzige Senkrechte möglich“

beweist man, indem man durch diesen Punkt ausser der angenommenen Senkrechten noch eine beliebige andere gerade Linie führt und von ihr nachweist, dass sie mit der gegebenen ungleiche Nebenwinkel bildet, also nicht senkrecht, sondern schief auf dieser steht.

4. Häufig hat man zu beweisen, dass irgend einem Gegenstande, z. B. einer Linie, insbesondere einer geraden, oder einer Fläche, insbesondere einer ebenen, mehrere solche Eigenschaften zugleich zukommen, von denen jede, an und für sich allein betrachtet, nur einem einzigen derartigen Gegenstande anhaften kann. In einem solchen Falle denkt man sich, nebst dem angenommenen mit einer derlei Eigenschaft begabten einzig möglichen Gegenstande, noch einen weiteren mit einer solchen Eigenschaft, von der bereits nachgewiesen ist, dass mit ihr nothwendig auch jede der übrigen, also auch jene vorausgesetzte, verknüpft ist; und schliesst dar-

Digitized by Google

aus, dass jener Gegenstand mit diesem ganz identisch sein muss, folglich dass auch ihm alle übrigen genannten Eigenschaften zukommen.

Man habe nämlich allgemein folgende zwei Urtheile bereits festgestellt:

1) „Nur ein einziges Subject kann jedesmal eines der Merkmale *a*, *b*, *c*, *d*.... einzeln besitzen."

2) „Wenn unter gewissen Umständen ein solches Subject das Merkmal *a* besitzt, so kommen ihm auch alle übrigen Merkmale *b*, *c*, *d*.... vereint zu."

Dann gilt auch das folgende Urtheil:

„Wenn unter denselben Umständen ein Subject *S* eines der letzteren Merkmale *b*, *c*, *d*.... ohne *a* besitzt, so besitzt es auch alle übrigen,

d. h. wenn *S*,*b* ist, so ist auch *S*,*acd*....
wenn *S*,*c* ist, so ist auch *S*,*abd*....
wenn *S*,*d* ist, so ist auch *S*,*abc*....
u. s. f."

kurz die Merkmale *a*, *b*, *c*, *d*... können unter diesen Umständen nicht von einander getrennt, sondern nur vereint bestehen; sie stehen und fallen mit einander.

Es genügt hier nur den einen Satz:

„Wenn *S*,*b* ist, so ist auch *S*,*acd*..."

zu erweisen, da die übrigen ihm analog sind.

Man denke sich unter den hier stets bedungenen Umständen das einzig mögliche Subject *S'*, dem das Merkmal *a* zukommt; dann besitzt es auch das Merkmal *b*, vermöge des zweiten als erwiesen vorausgesetzten Satzes. Allein dieses Merkmal *b* kommt zufolge der Annahme dem Subjecte *S* zu und kann nach dem ersten, als bereits für gültig anerkannten Satze, nur einem einzigen Subjecte eigen sein; folglich muss das Subject *S* mit *S'* einerlei, ganz das nemliche Eine sein; mithin kommt diesem Subjecte *S* auch das Merkmal *a* und daher, gemäss dem zweiten Satze, auch die weiteren Merkmale *c*, *d*.... zu.

Beispiel 1. Die Planimetrie erweist folgenden Satz:

„Jede Gerade, die in einem Dreiecke zu einer Seite parallel geführt wird, zerschneidet die beiden anderen Seiten proportional" (d. i. so, dass die von einer gemeinsamen Spitze aus auf ihnen abgeschnittenen Stücke den übrig bleibenden Stücken und den ganzen Seiten selbst direct proportional sind).

Dieser Satz umgekehrt lautet:

„Eine Gerade, die zwei Seiten eines Dreieckes proportional zerschneidet, ist zur dritten Seite parallel" und wird gewöhnlich indirect, auf folgende Weise aber auch direct erwiesen.

Jede begrenzte Linie kann von einem angewiesenen Grenzpunkte zum anderen hin in einem angegebenen Verhältnisse nur auf Eine Weise, d. i. durch einen einzigen Punkt, in zwei Theile getheilt werden. Man kann daher den Einschnitt der Geraden in die erste Seite entweder frei, oder erst durch dieses Verhältniss bestimmt ansehen; dann theilt auch nur Ein Punkt die zweite

Seite in demselben Verhältnisse, in welchem die erste bereits getheilt ist. Durch zwei Punkte ist nur Eine Gerade denkbar; also hier auch nur Eine Gerade, welche die zwei Seiten in gleichem Verhältnisse zerschneidet. Durch einen Punkt ist zu einer Geraden nur Eine parallele Gerade möglich; also durch jenen Theilungspunkt der ersten Seite auch bloss Eine parallele Gerade zur dritten Seite. Diese parallele zerschneidet aber die beiden anderen Seiten in gleichem Verhältnisse. Mithin ist jene proportional zerschneidende Gerade mit dieser parallelen identisch, d. h. selbst parallel zur dritten Seite.

Beispiel 2. In jedem Dreiecke hat *a*) jeder Winkel nur Eine Halbirungslinie, *b*) aus jeder Spitze lässt sich auf die gegenüber stehende Seite nur Eine Senkrechte fällen, *c*) jede Spitze kann nur durch Eine Gerade mit dem Halbirungspunkte der Gegenseite verbunden werden, und *d*) in dem Halbirungspunkte jeder Seite lässt sich nur Eine Gerade auf die Seite senkrecht aufstellen.

Nun kommt aber im gleichschenkligen Dreiecke am Scheitel desselben derjenigen Geraden, welche die erste Eigenschaft besitzt, auch jede der drei übrigen zu; mithin sind in diesem besonderen Falle die angeführten 4 Eigenschaften unzertrennlich mit einander verbunden, jede einzelne zieht die drei übrigen nach sich. Darnach ergeben sich als vollkommen begründet die bekannten 4 Sätze von der Halbirungslinie des Winkels am Scheitel im gleichschenkligen Dreiecke.

5. Zuweilen hilft man sich auch schon damit, dass man den zu erweisenden Satz nicht im voraus vollständig in Zeichen darstellt, die ihn erläuternde geometrische Figur nicht ganz auszeichnet, sondern erst im Beweise die nöthigen Zeichen oder räumlichen Gegenstände einführt. So z. B. lässt sich der Satz:

„die Mitte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks liegt von den Spitzen desselben gleich weit ab",

den Euklid indirect erweist, direct erweisen, wenn man den rechten Winkel durch eine Richtung so zertheilt, dass diese mit jeder Kathete einen eben so grossen Winkel als die Hypotenuse bildet. Denn diese Richtung schneidet in die Hypotenuse ein, an jeder Kathete liegen gleiche Winkel, also in den entstandenen beiden Dreiecken diesen Winkeln gegenüber gleiche Seiten. Mithin ist jener Einschnittspunkt in die Hypotenuse von allen drei Spitzen des Dreiecks gleich weit entfernt, und also auch die Mitte der Hypotenuse.

6. Andere Wege, auf denen man in besonderen Fällen die indirecten Beweise umgeht, gestatten endlich nicht wohl eine allgemeine Darlegung.

So z. B. der Satz:

„Wenn zwei in einer Ebene enthaltene unendliche Geraden von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, so schneiden sie sich nicht",

wird bewiesen, indem man die zu beiden Seiten der Schneidenden gelegenen Paare von Richtungen, was hier möglich ist, zur Deckung bringt und nun statt des hier gewöhnlichen indirecten Beweises

Digitized by Google

direct, wie folgt, schliesst *). Wenn zwei Paare gerader Linien mit einander zusammenfallend gedacht werden können, so müssen, wenn die Geraden des einen Paares sich schneiden, auch die des anderen Paares sich schneiden, und wenn jene von einander getrennt bleiben, auch diese überall aus einander bleiben. Daher müssen die beiden betrachteten unbegrenzten Geraden entweder zu beiden Seiten der Schneidenden getrennt bleiben oder auf beiden Seiten zusammentreffen. Das Letztere ist jedoch undenkbar, weil zwei Gerade höchstens Einen Punkt gemein haben können; mithin gilt das Erstere, nämlich die Geraden treffen sich nirgends.

IV.

Ueber die Vermeidung der inductorischen Beweise in der Mathematik.

1. Die Inductions-Beweise werden, wegen ihrer zu grossen Weitläufigkeit, in der Mathematik nur als Nothbehelfe verwendet, wo andere präcise Beweise mangeln Denn vorerst muss aus mehreren einzelnen, an oder nach einander gereihten Fällen das Gemeinsame oder allgemein Gültige abstrahirt und als in einigen ersten Fällen gültig nachgewiesen werden. Dann ist zu erweisen, dass sobald dies als wahrscheinlich hingestellte Gesetz bis zu einem gewissen Falle gültig ist, es auch noch bis zu dem nächst folgenden Falle gelten müsse. Dadurch erst erlangt man die Ueberzeugung, dass das aufgestellte Gesetz oder der zu beweisende Satz allgemeine Gültigkeit besitzt; und der Inductionsbeweis heisst so fort vervollständigt. Nicht bloss, dass dadurch der Zug des Beweises sich sehr verlängert, so erfährt man durch ihn auch nur, wie jeder folgende Fall mit dem nächst früheren zusammenhängt, keineswegs aber gewinnt man eine helle Einsicht in den nothwendigen Zusammenhang des zu erweisenden Satzes mit seinen Beweisgründen; die Kraft des Beweises, der *nervus probandi*, wird gleichsam verdunkelt oder versteckt gehalten.

2. Wo daher der inductorische Beweis sich vermeiden lässt, da sollte man ihn immer durch einen auf sein Ziel gerade losgehenden directen Beweis ersetzen.

Beispiel 1. So wurde sonst der binomische Lehrsatz in der Algebra für ganze absolute Exponenten inductorisch erwiesen, wie er selbst durch Induction entdeckt worden war. Allein wie vollständig und richtig der Beweis auch hingestellt werden mag, so gewährt er doch dem denkenden Geiste keine deutliche und lebendige Ueberzeugung, weil man nicht den nothwendigen Zusammenhang des Bildungsgesetzes der Coefficienten der einzelnen Glieder mit dem Bau der Potenzen einsieht. Heut zu Tage, wo die Combinationslehre auf den hinreichenden Grad ausgebildet ist, wird jener inductorische Beweis durch den directen combinatorischen als den überzeugendsten ersetzt.

*) Vergl. De Veley éléments de géométrie. 3 édit. Genéve 1830. pag. 24. num. 29. Ohm. M. ebene Raumgrössenlehre. 2 Aufl. Berlin. 1835. S. 111. §. 22.

Digitized by Google

Beispiel 2. Eben so kann der Satz:

„Das Product mehrerer Zahlen gibt durch jede Zahl getheilt denselben Rest, wie das Product der Reste der Factoren nach dem nemlichen Theiler“

inductorisch erwiesen werden, befriedigender aber direct auf folgende Weise.

Geben die Factoren des Productes durch den Theiler t getheilt die Quoti $a, b, c, \ldots m$ und die Reste $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$, so sind die nach einander folgenden Factoren $at+\alpha$, $bt+\beta$, $ct+\gamma, \ldots mt+\mu$, daher das Product selbst

$$(at+\alpha)\,(bt+\beta)\,(ct+\gamma)\ldots(mt+\mu).$$

Denkt man sich nun die Multiplication ausgeführt und das Endresultat nicht reducirt, so liefert in jedes Theilproduct dieses nicht reducirten Endproductes jeder der zweigliedrigen Factoren ein Glied, sein erstes oder sein zweites; daher muss es ein, und zwar nur ein einziges, Theilproduct geben, welches bloss die zweiten Glieder der Factoren, also gar kein erstes Glied eines Factors, in sich vereint und daher $= \alpha\beta\gamma\ldots\mu$ ist. Jedes der übrigen Theilproducte aber muss wenigstens aus Einem Factor das erste Glied in sich aufnehmen, folglich sowie dieses erste Glied selbst durch den Theiler t theilbar sein; mithin nimmt es auf den Rest des ganzen Productes gar keinen Einfluss, sondern bloss jenes einzige Theilproduct $\alpha\beta\gamma\ldots\mu$, nemlich das Product der Reste der einzelnen Factoren.

3. Die neuere höhere Analysis nimmt es mit der Induction gewöhnlich nicht sehr genau und dies nicht ganz ohne Recht. Sehr oft ersieht man nämlich an den Gliedern einer Reihe, an mehreren nach einander folgenden Ausdrücken oder Gleichungen, welche aus einer Untersuchung nach und nach sich entwickeln, ein bestimmtes Bildungsgesetz so deutlich ausgesprochen, dass es für nutzlose Weitläufigkeit gehalten würde, wenn man die vollkommene Gültigkeit dieses Gesetzes erst noch umständlich nachweisen wollte, da man doch den Gang der successiven Entwickelung leicht überschaut und an der Richtigkeit der ohne Mühe hinzustellenden allgemeinen Formen solcher Ausdrücke oder Gleichungen auch nicht den mindesten Anstand findet. Belege hiezu geben z. B. die Reihenentwickelungen der Exponentiellen, Logarithmen, Sinus, Cosinus u. dgl. mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten.

V.

Ueber die Umgehung der logischen Divisionen und Distinctionen in mathematischen Beweisen.

Die logische Division fordert die vollständige Aufzählung aller einem höheren Begriffe untergeordneten und einander selbst beigeordneten Begriffe. Von ihr wird in der Mathematik häufig Gebrauch gemacht, wenn die Gültigkeit eines Theorems für alle verschiedenen möglichen Fälle erwiesen werden soll. Es lässt sich jedoch nicht verkennen, dass dadurch der Beweis weitläufig und mühsamer

zu übersehen ausfällt. Darum bleibt es vortheilhaft, dergleichen Eintheilungen und Unterscheidungen überall, wo es ohne Beeinträchtigung der Strenge und Allgemeinheit des Beweises geschehen kann, bei Seite zu lassen. Wie dies in einzelnen Fällen zu leisten sei, soll hier gezeigt werden.

Beispiel 1. Ein in der Mathematik, besonders in der Geometrie, oft vorkommender Fall ist der, wo die Gleichheit zweier Grössen A und B indirect zu erweisen ist. Hier schliesst man gewöhnlich also: „Könnte A nicht $= B$ sein, so müsste entweder $A > B$ oder $A < B$ sein." Und dann zeigt man, dass weder jenes noch dieses bestehen kann. Allein immer lässt sich der Nachsatz hier so wenden: „Wären die Grössen A und B ungleich, so müsste eine aus ihnen die grössere sein; sei diese die A, nämlich $A > B$." Hat man dann nur dieses Eine, dass die zwei Grössen nicht ungleich sein können, erwiesen, so müssen sie nothwendig einander gleich sein.

Beispiel 2. Der planimetrische Satz:

„Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich"

wird von Euklid erwiesen, indem er die Parallelogramme auf einerlei Grundlinie zwischen dieselben zwei parallelen Geraden stellt und dabei die hier möglichen drei Fälle unterscheidet, je nachdem ein Grenzpunkt der zur Grundlinie parallelen Seite entweder zwischen die Grenzpunkte oder auf einen Grenzpunkt oder endlich ausserhalb beider Grenzpunkte der analogen Seite im andern Parallelogramm zu liegen kommt. Man bedarf jedoch dieser Unterscheidung gar nicht, wenn man die Parallelogramme nicht als Summen, sondern als Unterschiede congruenter Trapeze und Dreiecke darstellt *), indem man bloss die beiden Dreiecke, deren Congruenz man jedesmal erweisen muss, von dem entstandenen ganzen Trapeze abzieht, wornach theils das eine, theils das andere Parallelogramm übrig bleibt. Aehnlich verfährt man auch, wenn man erweisen will, dass Parallelepipede von gleichen Grundebenen und Höhen gleich sind **).

---

*) Vergl. Leslie T. Geometrical Analysis, Vega Vorles. über Mathematik. 7 Aufl., herausgegeben von Matzka. Wien 1835.

**) Vergl. Nr. IV. meines Aufsatzes im Archiv. Bd. 4. Heft 4. S. 362.

XLV.

Goniometrische Auflösung dreier Gleichungen von der Form $ax+by+cz=i$, $a_1x+b_1y+c_1z=i_1$, $x^2+y^2+z^2=1$.

Von
dem Herausgeber.

Wegen der dritten der drei aufzulösenden Gleichungen ist man berechtigt

$$1)\quad \begin{cases} x=\cos\varphi\cos\psi, \\ y=\sin\varphi\cos\psi, \\ z=\sin\psi \end{cases}$$

zu setzen, und hat dann bloss die beiden folgenden Gleichungen aufzulösen:

$$2)\quad \begin{cases} a\cos\varphi\cos\psi+b\sin\varphi\cos\psi+c\sin\psi=i, \\ a_1\cos\varphi\cos\psi+b_1\sin\varphi\cos\psi+c_1\sin\psi=i_1. \end{cases}$$

Bringt man diese Gleichungen auf die Form

$$3)\quad \begin{cases} (a\cos\varphi+b\sin\varphi)\cos\psi+c\sin\psi=i, \\ (a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi)\cos\psi+c_1\sin\psi=i_1; \end{cases}$$

und bestimmt aus denselben $\sin\psi$ und $\cos\psi$ durch gewöhnliche algebraische Elimination, so erhält man:

$$4)\quad \begin{cases} \sin\psi=\dfrac{(ai_1-ia_1)\cos\varphi+(bi_1-ib_1)\sin\varphi}{(ac_1-ca_1)\cos\varphi+(bc_1-cb_1)\sin\varphi}, \\ \cos\psi=-\dfrac{ci_1-ic_1}{(ac_1-ca_1)\cos\varphi+(bc_1-cb_1)\sin\varphi}. \end{cases}$$

Weil nun $\sin\psi^2+\cos\psi^2=1$ ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} 5)\quad &\{(ac_1-ca_1)^2-(ai_1-ia_1)^2\}\cos\varphi^2 \\ &+\{(bc_1-cb_1)^2-(bi_1-ib_1)^2\}\sin\varphi^2 \\ &-2\{(ai_1-ia_1)(bi_1-ib_1)-(ac_1-ca_1)(bc_1-cb_1)\}\sin\varphi\cos\varphi \\ &=(ci_1-ic_1)^2, \end{aligned}$$

Digitized by Google

aus welcher Gleichung φ bestimmt werden muss. Setzt man aber in derselben

$\cos\varphi^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$, $\sin\varphi^2 = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$, $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$;

so erhält sie folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}6)\ & 2\{(ai_1-ia_1)(bi_1-ib_1)-(ac_1-ca_1)(bc_1-cb_1)\}\sin 2\varphi \\ & -\{(ac_1-ca_1)^2-(bc_1-cb_1)^2-(ai_1-ia_1)^2+(bi_1-ib_1)^2\}\cos 2\varphi \\ & =(ac_1-ca_1)^2+(bc_1-cb_1)^2-(ai_1-ia_1)^2-(bi_1-ib_1)^2 \\ & \qquad -2(ci_1-ic_1)^2.\end{aligned}$$

Berechnet man jetzt den Hülfswinkel Θ mittelst der Formel:

$$7)\ \tang\Theta = \frac{(ac_1-ca_1)^2-(bc_1-cb_1)^2-(ai_1-ia_1)^2+(bi_1-ib_1)^2}{2\{(ai_1-ia_1)(bi_1-ib_1)-(ac_1-ca_1)(bc_1-cb_1)\}},$$

so erhält man nach einigen leichten Reductionen zur Berechnung von φ den folgenden Ausdruck:

$$8)\ \sin(2\varphi-\Theta) = \frac{(ac_1-ca_1)^2+(bc_1-cb_1)^2-(ai_1-ia_1)^2-(bi_1-ib_1)^2-2(ci_1-ic_1)^2}{2\{(ai_1-ia_1)(bi_1-ib_1)-(ac_1-ca_1)(bc_1-cb_1)\}}\cos\Theta.$$

Nach einer sehr bekannten arithmetischen Transformation ergeben sich aber hieraus zur Berechnung von φ die folgenden Ausdrücke. Man berechne zuerst die Hülfsgrössen A, B, C mittelst der Formeln:

$$9)\ \left\{\begin{aligned} A &= \frac{\{a(c_1+i_1)-a_1(c+i)\}\{a(c_1-i_1)-a_1(c-i)\}}{2\{(ai_1-ia_1)(bi_1-ib_1)-(ac_1-ca_1)(bc_1-cb_1)\}}, \\ B &= \frac{\{b(c_1+i_1)-b_1(c+i)\}\{b(c_1-i_1)-b_1(c-i)\}}{2\{(ai_1-ia_1)(bi_1-ib_1)-(ac_1-ca_1)(bc_1-cb_1)\}}, \\ C &= \frac{(ci_1-ic_1)^2}{(ai_1-ia_1)(bi_1-ib_1)-(ac_1-ca_1)(bc_1-cb_1)};\end{aligned}\right.$$

dann hat man zur Berechnung von Θ und φ die folgenden Ausdrücke:

$$10)\ \left\{\begin{aligned} &\tang\Theta = A-B, \\ &\sin(2\varphi-\Theta) = (A+B-C)\cos\Theta.\end{aligned}\right.$$

Die Grösse ψ findet man, nachdem man φ gefunden hat, mittelst der Formeln 4), oder besser mittelst der aus denselben fliessenden Gleichung:

$$11)\ \tang\psi = -\frac{ai_1-ia_1}{ci_1-ic_1}\cos\varphi - \frac{bi_1-ib_1}{ci_1-ic_1}\sin\varphi.$$

Setzt man

$$12)\ \tang\omega = \frac{bi_1-ib_1}{ai_1-ia_1},$$

so ist

$$13)\ \tang\psi = -\frac{ai_1 - ia_1}{ci_1 - ic_1}\cdot\frac{\cos(\varphi-\omega)}{\cos\omega}.$$

Die Möglichkeit der Auflösung hängt, wie sogleich aus den Gleichungen 10) geschlossen wird, davon ab, dass der absolute Werth der Grösse

$$(A+B-C)\cos\Theta$$

nicht grösser als die Einheit ist, eine Bedingung, die wir daher von jetzt an im Folgenden als erfüllt voraussetzen wollen.

Bezeichnen wir nun durch u den, absolut genommen, kleinsten Werth, welchen $2\varphi-\Theta$ der zweiten der Gleichungen 10) zufolge haben kann, so ist bekanntlich, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, entweder

$$2\varphi-\Theta=u+2k\pi$$

oder

$$2\varphi-\Theta=(2k+1)\pi-u;$$

und folglich entweder

$$2\varphi=u+\Theta+2k\pi$$

oder

$$2\varphi=(2k+1)\pi-(u-\Theta);$$

also entweder

$$\varphi=\tfrac{1}{2}(u+\Theta)+k\pi$$

oder

$$\varphi=\tfrac{1}{2}(\pi-u+\Theta)+k\pi.$$

Daher ist entweder

$$\sin\varphi=(-1)^k\sin\tfrac{1}{2}(u+\Theta),\ \cos\varphi=(-1)^k\cos\tfrac{1}{2}(u+\Theta)$$

oder

$$\sin\varphi=(-1)^k\sin\tfrac{1}{2}(\pi-u+\Theta),\ \cos\varphi=(-1)^k\cos\tfrac{1}{2}(\pi-u+\Theta).$$

Folglich ist nach 4) entweder

$$\sin\psi=\frac{(ai_1-ia_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta)+(bi_1-ib_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)}{(ac_1-ca_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta)+(bc_1-cb_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)},$$

$$\cos\psi=-(-1)^k\frac{ci_1-ic_1}{(ac_1-ca_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta)+(bc_1-cb_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)}$$

oder

$$\sin\psi=\frac{(ai_1-ia_1)\cos\frac{1}{2}(\pi-u+\Theta)+(bi_1-ib_1)\sin\frac{1}{2}(\pi-u+\Theta)}{(ac_1-ca_1)\cos\frac{1}{2}(\pi-u+\Theta)+(bc_1-cb_1)\sin\frac{1}{2}(\pi-u+\Theta)},$$

$$\cos\psi = -(-1)^k \frac{ci_1 - ic_1}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta)}.$$

Also ist entweder

$$x = \cos\varphi\cos\psi$$

$$= -\frac{(ci_1 - ic_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)},$$

$$y = \sin\varphi\cos\psi$$

$$= -\frac{(ci_1 - ic_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)},$$

$$z = \sin\psi$$

$$= \frac{(ai_1 - ia_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta) + (bi_1 - ib_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)}$$

oder

$$x = \cos\varphi\cos\psi$$

$$= -\frac{(ci_1 - ic_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u+\Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u+\Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u+\Theta)},$$

$$y = \sin\varphi\cos\psi$$

$$= -\frac{(ci_1 - ic_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u+\Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u+\Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u+\Theta)},$$

$$z = \sin\psi$$

$$= \frac{(ai_1 - ia_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u+\Theta) + (bi_1 - ib_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u+\Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u+\Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u+\Theta)}.$$

Aus dieser Betrachtung geht, weil überhaupt

$$x = \cos\varphi\cos\psi = -\frac{(ci_1 - ic_1)\cos\varphi}{(ac_1 - ca_1)\cos\varphi + (bc_1 - cb_1)\sin\varphi},$$

$$y = \sin\varphi\cos\psi = -\frac{(ci_1 - ic_1)\sin\varphi}{(ac_1 - ca_1)\cos\varphi + (bc_1 - cb_1)\sin\varphi},$$

$$z = \sin\psi = \frac{(ai_1 - ia_1)\cos\varphi + (bi_1 - ib_1)\sin\varphi}{(ac_1 - ca_1)\cos\varphi + (bc_1 - cb_1)\sin\varphi}$$

ist, unzweideutig hervor, dass man zur Erreichung völliger Allgemeinheit bloss

$$14)\quad \varphi = \begin{cases} \frac{1}{2}(u+\Theta) \\ \frac{1}{2}(\pi - u+\Theta) \end{cases}$$

zu setzen braucht.

Wenn man ψ mittelst der Formel 13) berechnet, und den, absolut genommen, kleinsten Werth von ψ durch v bezeichnet, so ist,

Digitized by Google

indem k wieder eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$15)\quad \psi = v + k\pi,$$

und folglich

$$\sin\psi = (-1)^k \sin v,\quad \cos\psi = (-1)^k \cos v,$$

woraus man sieht, dass die, geraden und ungeraden Werthen von k entsprechenden Werthe von $\sin\psi$ und von $\cos\psi$ immer entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ob man nun für k eine gerade oder ungerade, übrigens an sich willkührliche, ganze Zahl setzen muss, ist nach den Vorzeichen zu beurtheilen, welche $\sin\psi$ und $\cos\psi$ in Folge der Formeln 4) haben müssen.

Digitized by Google

XLVI.
Ueber die Genauigkeit der Ketten-Messungen.
(Dritter Nachtrag zur Ausgleichungsrechnung *).

Von dem
Herrn Professor Dr. Gerling zu Marburg.

In meiner Ausgleichungs-Rechnung (S. 44) habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass wir noch im Dunkeln darüber seien, wie der mittlere Fehler der Kettenmessungen mit der Länge der gebrauchten Kette und der Länge der gemessenen Linie zusammenhänge; und dass also hier verdienstliche Untersuchungen noch anzustellen blieben.

Diesem Geschäft hat sich Herr W. Handschuh aus Fulda nun unterzogen, welcher, nachdem er bereits längere Zeit als Kataster-Geometer gearbeitet, jetzt hier studirt. Derselbe überbrachte mir nämlich bei seiner Herkunft eine Reihe von 200 Messungen, welche er, veranlasst durch jene Bemerkung, im vorigen Herbst im Fuldaischen angestellt hatte, und deren Ergebniss ich den Praktikern im Folgenden mittheile.

Hr. Handschuh hatte in einem nach dem Augenmaass ebenen Wiesen-Thal mit ziemlich festem Untergrund fünf Linien abgesteckt,

von 20,3; 49,5; 65,0; 79,9 und 100,0 Ruthen,

und jede derselben zehnmal mit der fünfruthigen, mit der dreiruthigen und der zweiruthigen Kette gemessen, indem er bei jeder einzelnen Messung die letzten Ueberschüsse an einem Zollstab ablas, und nach je zehn Messungen seine Kette an einer Normal-Ruthe revidirte, sie auch, wenn sich Abänderungen zeigten, sammt den Messungen berichtigte.

Zu diesen 150 Messungen hatte er nun aber noch weitere 50 hinzugefügt, zu dem Zweck eines entscheidenden Versuchs über das Verhältniss der Genauigkeit in den Ketten-Messungen und den Maass-Stab-Messungen. Jede der obigen Linien wurde nämlich auch

*) Die beiden ersten siehe Theil VI. Heft 2. S. 141.

Digitized by Google

zehnmal mit zwei Ruthen-Stäben durchgemessen, so dass der eine auf dem horizontalen Boden angedrückt gehalten und der andere dann vorsichtig daran gestossen wurde.

Ich lasse nun zuerst die Original-Beobachtungen hier folgen:

Original-Beobachtungen.

	Erste Linie.	Zweite Linie.	Dritte Linie.	Vierte Linie.	Fünfte Linie.
	20,324	49,506	64,934	79,910	100,000
	20,322	49,517	64,985	79,880	99,991
	20,353	49,500	64,956	79,912	100,030
	20,327	49,512	65,000	79,891	100,000
Fünfruthige Kette.	20,330	49,468	65,034	79,895	100,030
	20,330	49,460	65,000	79,850	100,050
	20,342	49,450	64,970	79,844	100,010
	20,331	49,477	64,955	79,850	100,020
	20,346	49,450	64,925	79,885	100,030
	20,334	49,440	64,930	79,851	100,000
	20,360	49,467	64,900	79,860	100,065
	20,340	49,490	64,920	79,850	100,115
	20,340	49,480	64,900	79,860	100,050
	20,340	49,510	64,910	79,873	100,025
Dreiruthige Kette.	20,345	49,490	64,960	79,860	99,965
	20,315	49,500	64,900	79,850	100,065
	20,330	49,530	64,890	79,875	100,070
	20,320	49,535	64,920	79,860	100,120
	20,335	49,550	64,960	79,855	100,037
	20,320	49,490	64,960	79,850	99,960
	20,355	49,490	64,880	79,885	100,000
	20,330	49,470	64,920	79,885	100,001
	20,320	49,440	64,860	79,900	100,004
	20,350	49,445	64,875	79,875	99,996
Zweiruthige Kette.	20,320	49,460	64,880	79,915	100,020
	20,330	49,453	64,870	79,880	99,990
	20,340	49,435	64,910	79,862	100,005
	20,335	49,443	64,905	79,856	99,995
	20,330	49,465	64,890	79,850	99,991
	20,330	49,485	64,880	79,865	100,000
	20,360	49,544	65,000	80,000	100,180
	20,360	49,540	64,996	80,012	100,180
	20,360	49,541	64,990	80,013	100,180
	20,355	49,543	64,989	80,012	100,160
Maass-Stäbe.	20,357	49,542	64,996	80,006	100,176
	20,353	49,543	64,990	80,003	100,160
	20,356	49,542	64,991	80,006	100.163
	20,355	49,549	65,000	80,003	100,170
	20,356	49,543	64,993	80,004	100,160
	20,360	49,543	64,987	80,006	100,165

Digitized by Google

Wir haben nun diese Messnngen gemeinschaftlich in Rechnung genommen auf folgende Weise.

Zuerst nahmen wir die arithmetischen Mittel aus je zehn Messungen und fanden:

fünfruthige Kette	20,3339	49,4780	64,9689	79,8768	100,0161
dreiruthige „	20,3345	49,5042	64,9220	79,8593	(100,0472)
zweiruthige „	20,3340	49,4586	64,8870	79,8743	100,0002
Maass-Stäbe	20,3572	49,5430	64,9932	80,0065	100,1694.

Hiezu ist zweierlei zu bemerken. *a*) Die Messungen der fünften Linie mit der dreiruthigen Kette wurden „nach dem Erfolg ausgeschlossen“, weil sich für die Abweichung der protocollarische Grund fand, dass ein eingetretenes Regenwetter den Boden erweichte und die Genauigkeit beeinträchtigte. Oben ist deshalb das betreffende Mittel in Parenthesen eingeschlossen. *b*) Die Mittel aus den Maass-Stab-Messungen zeigen sich sämmtlich etwas grösser als die aus den Ketten-Messungen. Diese Erscheinung erklärt sich wahrscheinlich aus dem kleinen Unterschied der hier gebrauchten Maass-Stäbe von dem Normal-Stab, worauf die Ketten regulirt waren, oder auch daraus, dass die Ketten bei der Regulirung nicht ganz dieselbe Spannung hatten, welche die Kettenzieher ihnen nachher im Felde gewohnheitsmässig gaben. Sie ist aber für den Zweck der Vergleichung der Genauigkeit offenbar ganz unschädlich, indem es hiebei nicht auf das absolute Maass ankommt.

Die gewonnenen Mittel benutzten wir nun zur Berechnung des mittleren Fehlers (m nach §. 16. und §. 20.) für die einzelne Messung in der einzelnen Linie, und fanden

fünfruthige Kette	0,0100	0,0286	0,0357	0,0260	0,0188
dreiruthige „	0,0136	0,0265	0,0276	0,0083	
zweiruthige „	0,0115	0,0189	0,0190	0,0211	0,0085
Maass-Stäbe	0,0026	0,0024	0,0046	0,0044	0,0088.

Hieraus scheinen nun drei Thatsachen hervorzugehen, die wir, bis weitere Beobachtungen darüber etwa anders bestimmen, für entschieden halten müssen. Nämlich:

1) Es ist irrig, wenn man glaubt, der mittlere Fehler sei unabhängig von der Länge der Kette. Im Gegentheil zeigt sich hier, dass die Genauigkeit im Allgemeinen abnimmt, wenn man mit einer längern Kette misst.

2) Es ist irrig, wenn man den mittleren Fehler der Länge der gemessenen Linie proportional setzt. Im Gegentheil zeigt sich hier, dass er in längeren Linien geringer sein kann als in kürzeren.

3) Es ist nuch irrig, wenn man glaubt, die Ketten-Messung sei im Allgemeinen der Maass-Stab-Messung beim Auflegen auf den Boden vorzuziehen. Im Gegentheil zeigt sich, dass ein in beiderlei Messungen gleich geübter Geometer mit dem Maass-Stab auch bei unmittelbarem Auflegen auf den Boden bedeutend genauer misst als mit der Kette.

Um die Verschiedenheiten der obigen mittleren Fehler besser zu übersehen verzeichneten wir nun 4 Curven, bei welchen die

gemessenen Längen der Linien als Abscissen, jene m als Ordinaten aufgetragen waren. Hiebei zeigt sich für die Maass-Stab-Messungen ein langsames, beinahe stetiges Ansteigen; so dass man in erster Annäherung wohl den mittleren Fehler der gemessenen Länge proportional setzen darf. Dagegen findet sich bei den Ketten-Messungen ein ziemlich gleichförmiges Ansteigen nur bis zu 65 Ruthen gemessener Länge; von da an fällt die Curve für die dreiruthige Kette rasch, die für die fünfruthige Kette langsam, die für die zweiruthige Kette aber steigt noch ein wenig, um nachher auch namhaft zu fallen. Demnach sollte es beinahe scheinen, als sei der mittlere Fehler von der gemessenen Länge periodisch abhängig. Offenbar sind aber der Beobachtungen viel zu wenig, als dass man berechtigt wäre, ein so auffallendes Resultat dadurch schon für entschieden zu halten, wenn gleich andererseits es auch nicht geradezu für absurd erklärt werden darf.

Von dem Anschliessen einer Formel an diese Curven mussten wir abstehen, indem sie dazu weder ausgedehnt noch regelmässig genug schienen. Doch wurden uns zwei Umstände bei dieser Gelegenheit klar, welche, wenn sie früher schon zur Sprache hätten kommen können, Herrn Handschuh veranlasst haben würden, die Messungen etwas anders einzurichten, und deshalb für den möglichen Fall einer Wiederholung dieser Arbeit hier angeführt zu werden verdienen. Nämlich

a) Es würde gewiss bequemer für die Bearbeitung und vielleicht auch sicherer für das Resultat gewesen sein, wenn die Längen der gemessenen Linien näher in arithmetischer Progression gestanden hätten. Ich würde also, wenn die Arbeit jetzt erst zu machen wäre, vorschlagen, für die fünfruthige und die zweiruthige Kette die Linien, statt der obigen Längen, möglichst genau zu

20; 40; 60; 80 und 100 Ruthen

zu nehmen, für die dreiruthige Kette aber zu

21; 39; 60; 81 und 99 Ruthen.

b) Bei den Ketten-Messungen haben wir es eigentlich wenigstens mit zwei verschiedenen Fehlern zu thun, welche einzeln zu untersuchen bleiben, dem der vollen Kettenlänge, welcher sich so oft wiederholt als die Kette ausgelegt wird, und dem des Ueberschusses über die letzte Auslegung. Bezeichnet man nun ersteren Fehler mit m_t, letzteren mit m_u, die Anzahl der vollen Auslegungen mit a, den mittleren Fehler der gemessenen Längen mit m_l; so gilt bekanntlich (siehe S. 71, 82 und 90) die Formel

$$m_l = \sqrt{a m_t m_t + m_u m_u}.$$

Demnach war es nicht dem Zwecke vollständig entsprechend, dass in den verschiedenen Linien die Ueberschüsse verschieden waren. Hr. Handschuh würde gewiss aus diesem Grunde, wenn er die Arbeit jetzt erst zu machen hätte, lieber solche Linien wählen, die entweder bis auf einen kleinen, mit dem Zollstock zu messenden Unterschied, runde Summen von Kettenlängen darstellten oder die doch alle einerlei Ueberschuss hätten.

So wie die Sache jetzt aber lag, probirten wir erst, ob sich die Hypothese rechtfertigen lasse, dass das m_u bei diesen Beob-

Digitized by Google

achtungen als constante Grösse betrachtet werden dürfe, indem wir die drei betreffenden m_t und das m_u aus den sämmtlichen obigen m_l mittelst der vorstehenden Formel nach der Methode der kleinsten Quadrate suchten. Dies führte aber zu dem Widerspruch, dass $m_u m_u$ negativ ausfiel.

Wir begnügten uns also damit, das $m_u = 0$ zn setzen, und dann die m_t einzeln su suchen. Dies gab uns

für die fünfruthige Kette	m_t =	$\pm$ 0,006830
„ „ dreiruthige „	„	$\pm$ 0,004644
„ „ zweiruthige „	„	$\pm$ 0,002726.

Mit diesen Werthen berechneten wir nun rückwärts die m_l und erhielten statt der obigen unmittelbar aus den arithmetischen Mitteln abgeleiteten

für die fünfruthige Kette	0,0137	0,0205	0,0246	0,0265	0,0305
„ „ dreiruthige „	0,0114	0,0186	0,0213	0,0237	
„ „ zweiruthige „	0,0086	0,0134	0,0154	0,0170	0,0193.

Die Abweichung zeigt sich hier aber ungefähr noch eben so gross, als wenn man aus den obigen m für jede Kette, ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit der gemessenen Längen, wieder das arithmetische Mittel genommen hätte. Man wird also ausser den drei oben angeführten Thatsachen nur noch als **genähertes Resultat** angeben können:

> dass die mittleren Fehler der drei Ketten-Längen sich wie 7:5:3 zu verhalten scheinen.

Bei Messung einer und derselben Linie verhält sich nun die Anzahl der Auslegungen wie $\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$. Durch Multiplication mit den Quadratwurzeln dieser Zahlen fände man also das Verhältniss der mittleren Fehler der Messungen nahe wie 31:29:21 oder wie 8:7:5.

Es mag sein, dass die Resultate noch sehr verschieden ausfielen, wenn die Arbeit mit Benutzung dieser ersten, durch Herrn **Handschuhs** Verdienst gewonnenen Erfahrung wiederholt würde, jedenfalls glaubte ich diese selbst aber den Praktikern vorerst mittheilen zu müssen.

Digitized by Google

XLVII.

Disquisitiones de congruentiis omnium graduum et residuis ordinis cujuscunque.

Auctore Friderico Arndt,

Praeceptore Gymnasii Sundensis.

1.

In commentatione ea, quae inscribitur: De Potestatum periodis etc. (Archiv der Mathematik und Physik. Tom II. p. 1.) argumentatus sum, congruentiam t^{ti} gradus $x^t \equiv 1$ secundum modulum, qui est numeri primi imparis potestas aliqua vel ejus duplum, tot admittere radices diversas, quot unitates sint divisori communi maximo numerorum t et $p^{n-1}(p-1)$.

Nunc quidem restat, ut disquisitionem hanc ad modulos extendam, qui sunt numeri 2 potestates. Primum igitur quaestio sese offert, quot radices sint congruentiae $x^t \equiv 1$ (mod. 2^n), ubi exponentem n numero 2 majorem accipere proderit.

Perspicuum est, radicem numerum imparem esse oportere, quem forma exhiberi licet $2^m h \pm 1$, ita ut sit m unitate major atque h numerus impar. Congruentia autem, quam nobis proposuimus, resolvi possit necne, ex forma pendebit, quam potestas t^{ta} radicis induat. Quam ut reperiamus, sit primum t impar eritque ex theoremate binomiali

$$(2^m h \pm 1)^t = 2^{tm} h^t \pm t_1 . 2^{(t-1)m} h^{t-1} + t_2 . 2^{(t-2)m} h^{t-2} \pm \text{etc.} + t . 2^m h \pm 1,$$

unde manat

$$(2^m h \pm 1)^t = 2^m h (2^{(t-1)m} h^{t-1} \pm t_1 . 2^{(t-2)m} h^{t-2} + \text{etc.} + t) \pm 1,$$

denotantibus t_1, t_2, t_3, etc. coefficientes binomiales, quos integros esse constat. Quum autem numerus uncis conclusus sit impar, potestas $(2^m h \pm 1)^t$ formae erit $2^m h' \pm 1$, denotante h' numerum imparem.

Sit deinde t numerus par vel formae $2^\lambda f$, ubi f impar, quofacto erit $(2^m h \pm 1)^t = \{(2^m h \pm 1)^f\}^{2^\lambda}$; atqui $(2^m h \pm 1)^f$ est; formae $2^m h' \pm 1$, ubi h' impar, ergo restat disquiramus formam potestatis $(2^m h' \pm 1)^{2^\lambda}$. Jam vero quadratum radicis formam induit $2^{2m} h'^2 \pm 2^{m+1} h' + 1$ vel hanc $2^{m+1} h' (2^{m-1} h' \pm 1) + 1$, ubi $2^{m-1} h' \pm 1$ est impar, quoniam $m - 1 > 0$, ergo forma quadrati haec erit $2^{m+1} h'' + 1$ denotante h'' numerum imparem. Simili modo quadratum hujusce numeri i. e. potestas 4ta numeri $2^m h' \pm 1$ erit formae $2^{m+2} h''' + 1$, quadratum hujusce i. e. potestas 8va numeri propositi $2^m h' \pm 1$ erit formae $2^{m+3} h^{IV} + 1$ etc., ita ut sint h''', h^{IV} etc. numeri impares.

Ex quo sequitur, potestatem $(2^m h \pm 1)^t$, si t sit par $= 2^\lambda f$, formam induere $2^{m+\lambda} h + 1$, denotante h numerum aliquem imparem.

2.

Quodsi in congruentia

$$x^t \equiv 1 \ (\text{mod. } 2^n)$$

t est numerus impar, si radicem x statuas formae $2^m h \pm 1$, erit (1.) $2^m h' \pm 1 \equiv 1$, ergo, si superius signum accipias, $2^m h' \equiv 0$, si vero inferius, $2^m h' - 2 \equiv 0$.

Nunc licet radicem modulo minorem accipere vel $2^m h \pm 1 < 2^n$; si igitur radix est formae prioris $2^m h + 1$, semper debet esse $m < n$; si vero radix formae posterioris $2^m h - 1$, id certe contendi potest, numerum m exponentem n non superare, tumque modo ei aequalem esse posse, quando $h = 1$.

Supponamus primum, numerum h non evanescere, quo facto pro signo superiore congruentia $2^m h' \equiv 0$ (mod. 2^n) locum habere nequit, quia $m < n$ atque etiam h' non evanescit.

Deinde si h evanescit, radix erit 1 manifestoque congruentiae propositae satisfacit. Quod denique attinet ad signum inferius, non potest esse $2^m h' - 2 \equiv 0$ (mod. 2^n); haberetur enim $2^{m-1} h' - 1 \equiv 0$ (mod. 2^{n-1}), q. e. a. quoniam $m - 1 > 0$ ideoque $2^{m-1} h' - 1$ numerus impar.

Ex his omnibus potest, congruentiam unam solummodo radicem, nempe 1, admittere, quando exponens t sit impar.

Si vero t est numerus par $= 2^\lambda f$, ubi f impar, sequitur ex §§. 22. 10. Commentationis jam commemoratae, exponentem, ad quem numerus impar pertineat secundum modulum 2^n, numeros t et 2^{n-2}, ergo etiam horum divisorem communem maximum metiri, quo designato per 2^δ omnes numeri modulo minores ad eumque primi inter exponentes $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots 2^\delta$, ad quos pertineant, distributos fore.

Ad exponentem 1 autem unus modo numerus pertinet nempe 1, ad exponentem 2 tres numeri, qui sunt $2^{n-1} - 1$, $2^{n-1} + 1$, $2^n - 1$,

ad exponentem 2^2 pertinent 2^2 numeri, et in genere ad exponentem 2^Θ pertinent totidem numeri, si modo $\Theta > 1$. Hinc multitudo omnium radicum congruentiae $x^t \equiv 1 \pmod{2^n}$ aequiparabit summam

$$1 + 3 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^\delta,$$

quae valorem obtinet $2^{\delta+1}$, quam ob rem

Congruentia $x^t \equiv 1 \pmod{2^n}$, si exponens est par, tot radices habet, quot unitates duplum divisoris communis maximi numerorum t et 2^{n-2}.

Casus denique, in quo mudulus est 2 vel 4, breviter jam perstringendus est.

Congruentia manifesto $x^t \equiv 1 \pmod{2}$ unam modo radicem admittit, nempe 1, nec minus haec $x^t \equiv 1 \pmod{4}$ quando t impar, quando vero par, duas nempe 1 et 3.

Exempl. 1. Sunt 4 radices congruentiae $x^6 \equiv 1$ (mod. $2^5 = 32$) nempe 1, 15, 17, 31, quarum 1 ad exp. 1 pertinet, tres reliqui ad 2.

Exempl. 2. Congruentia $x^{12} \equiv 1$ (mod. $2^4 = 16$) admittit 8 radices, quae sunt 1, 3, 5, 7, 11, 13, 9, 15, quarumque 1 pertinet ad exponentem 1; 7, 9, 15 ad 2 atque 3, 5, 11, 13 ad 4.

3.

Quando congruentia $x^t \equiv A \pmod{m}$, denotante A numerum ad modulum primum, resolubilis est, semper totidem admittet radices, quot radices simplicior haec $x^t \equiv 1 \pmod{m}$. Hujus etenim radices sint

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3, \ \omega_4, \ \omega_5 \ \text{etc.}$$

atque ω radix quaelibet congruentiae prioris, tum dico primum producta

$$\omega\omega_1, \ \omega\omega_2, \ \omega\omega_3, \ \omega\omega_4, \ \text{etc.}$$

vel eorum residua minima radices fore congruentiae $x^t \equiv A$.

Nam quum sit $\omega^t \equiv A$, atque ex. gr. $\omega_1{}^t \equiv 1$, erit $(\omega\omega_1)^t \equiv A$, i. e. $\omega\omega_1$, radix sicque deinceps.

Deinde sunt omnia illa producta incongrua vel eorum residua minima inaequalia; nam si haberetur in genere $\omega\omega_\lambda \equiv \omega\omega_\mu$, esset $\omega\,(\omega_\lambda - \omega_\mu) \equiv 0$, ergo $\omega_\lambda - \omega_\mu \equiv 0$, quoniam ω ad modulum primus est. Sed illud suppositioni repugnat, ergo $\omega\omega_\lambda$ et $\omega\omega_\mu$ sunt incongrua.

Vice versa, quando z est radix congruentiae propositae, z alicui productorum, quae modo dixi, congruus fiet. Quoniam scilicet m ad ω primus est, numerus exstat Θ talis, ut sit $\omega\Theta \equiv z$, vel talis, ut sit $(\omega\Theta)^t \equiv z^t$ i. e. $(\omega\Theta)^t \equiv A$. Jam vero est $\omega^t \equiv A$, ideoque erit $\Theta^t \equiv 1$. Qua re hic Θ congruentiae satisfacit $x^t \equiv 1$, vel Θ debet congruus fieri alicui radicum $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, etc. Ex quo $\omega\Theta$ vel z alicui productorum $\omega\omega_1$, $\omega\omega_2$ etc. congruus fiet.

Digitized by Google

Unde colligitur, productis illis omnes omnino radices congruentiae $x^t \equiv A$ exhiberi, ita ut totidem hujus sint, quot illius $x^t \equiv 1$.

Itaque congruentia $x^t \equiv A$ (mod. 2^n) unam solummodo radicem habebit, quando t est numerus impar; quando vero par, tot radices, quot unitates habet duplum divisoris communis maximi numerorum t et 2^{n-2}.

4.

Residuum ordinis cujusvis t intelligimus numerum, qui potestati alicui exponentis t secundum modulum propositum congruus fit. Itaque a vocatur residuum ordinis t pro modulo m, quando numerus aliquis α inveniri potest, ita ut sit $\alpha^t \equiv a$ (mod. m). Residua trium primorum ordinum dicuntur residua quadratica, cubica et biquadratica.

Quodsi quaerantur residua minima potestatum exponentis t, quarum radices sint omnes ad modulum primae eoque minores, quaestio se offert, omnes tales potestates sint incongruae necne?

Tota autem haec disquisitio manifesto in eo vertitur, ut determinetur, quot radices admittat congruentia $x^t \equiv A$ (mod. m), denotante A residuum quodlibet ordinis t.

Sit enim multitudo radicum, quas dixi, θ; quoniam ex his omnibus unum idemque gignitur residuum A, patet, multitudinem omnium residuorum ordinis t ad modulum primorum eoque inferiorum aequiparare numerum $\frac{\varphi m}{\theta}$ integrum, denotante φm multitudinem numerorum ad modulum m primorum eoque minorum.

Denotante igitur p numerum primum imparem, multitudo residuorum quadraticorum moduli p erit $\frac{1}{2}(p-1)$, quia congruentia $x^2 \equiv A$ (mod. p) duas admittit radices.

Quia congruentia $x^3 \equiv A$ (mod. p) unam modo habet radicem, quando p formae $3n+2$, tres vero, quando p formae est $3n+1$, multitudo residuorum cubicorum erit aut $p-1$ aut $\frac{1}{3}(p-1)$, prouti p est formae $3n+2$ vel illius $3n+1$.

Congruentia $x^4 \equiv A$ (mod. p) habet duas radices, quando p est formae $4n+3$, quattuor vero, quando p formae $4n+1$, ergo multitudo residuorum biquadraticorum erit aut $\frac{1}{2}(p-1)$ aut $\frac{1}{4}(p-1)$, prouti p est formae $4n+3$ aut illius $4n+1$.

Simili modo multitudo residuorum ordinis 5 erit aut $p-1$ aut $\frac{1}{5}(p-1)$, prouti p formam induit $5n+2$, $5n+3$, $5n+4$ aut hanc $5n+1$.

5.

Manifesto omne residuum biquadraticum erit etiam residuum quadraticum, quam propositionem convertere licet, quoties p est

Digitized by Google

formae $4n+3$. Quod ita demonstro. Quoniam omne non-residuum quadraticum etiam non-residuum biquadraticum est, perspicuum erit, residua biquadratica inter residua quadratica modo occurrere posse. Horum multitudo est $\frac{1}{2}(p-1)$, ex quo, si residua nonnulla quadratica exstarent, quae non essent biquadratica, multitudo residuorum biquadraticorum ipso $\frac{1}{2}(p-1)$ minor fieret. Atqui haec multitudo est $\frac{1}{2}(p-1)$, quoties p formae $4n+3$ (4), ergo omne residuum quadraticum est biquadraticum et vice versa pro modulo primo formae $4n+3$.

Clariss. Gauss (Theoria residuorum biquadraticorum pag. 4 sqq.) hoc theorema ita demonstrat:

Si a est residuum quadraticum ipsius p, statuamus $a \equiv bb$ (mod. p), ubi b vel residuum quadraticum ipsius p erit vel non-residuum; in casu priori $b \equiv cc$, unde $a \equiv c^4$, i. e. a erit residuum biquadraticum ipsius p; in casu posteriori $-b$ fiet residuum quadraticum, quoniam -1 est non-residuum numeri primi $4n+3$ atque productum ex duobus non-residuis residuum est, faciendoque $-b \equiv cc$, erit ut antea $a \equiv c^4$ atque a residuum biquadraticum ipsius p.

Porro si modulus est formae $4n+1$, exstant quidem $\frac{1}{2}(p-1)$ residua quadratica, sed $\frac{1}{4}(p-1)$ modo biquadratica, qua re dimidia pars quadraticorum erunt residua biquadratica, reliqua non-residua biquadratica. Itaque omnes numeri integri per modulum primum p non divisibiles in tres classes sunt distribuendi, ita ut in prima sint residua biquadratica, in secunda non-residua biquadratica, quae tamen sunt quadratica, in tertia denique non-residua biquadratica, quae sunt etiam non-residua quadratica. Et quidem prima classis complectitur $\frac{1}{4}(p-1)$ numeros, secunda $\frac{1}{4}(p-1)$ numeros, tertia vero $\frac{1}{2}(p-1)$ numeros.

6.

Sed redeat oratio, unde digressa est, quod totam rem ex altiori fonte considerare in animo est.

Secundum modulum 2^n, ubi $n > 2$, exstant 2^{n-1} residua ordinis t, quando t est impar, quando vero t par, multitudo residuorum est $\frac{2^{n-1}}{2\delta} = \frac{2^{n-2}}{\delta}$, designante δ divisorem communem maximum numerorum t et 2^{n-2}.

In priori casu enim congruentia $x^t \equiv A$ (mod. 2^n) habet unam modo radicem, in posteriori autem 2δ radices (3).

Exempli gratia sunt 8 residua ordinis 3 vel residua cubica moduli $2^4 = 16$; fit etenim

Potestas 1^3 congrua residuo	1
. . . . 3^3	11
. . . . 5^3	13
. . . . 7^3	7
. . . . 9^3	9
. . . . 11^3	3
. . . . 13^3	5
. . . 15^3.	15.

Attamen non plures quam 2 exstant residua biquadratica moduli $32=2^5$. Hic enim est $\delta=4$, $2^{n-2}=8$, $\frac{2^{n-2}}{\delta}=2$. Quae residua sunt 1 et 17 potestatibus resp. 1^4 et 3^4 congrua.

Multitudo igitur residuorum quadraticorum moduli 2^n est 2^{n-3}, quod in §. 40. De Potestatum Periodis ex alio fonte petivimus.

7.

Postquam multitudinem tum radicum congruentiae $x^t \equiv A$ (mod. p^n, $2p^n$, 2^n), tum residuorum ordinis cujuscunque t determinavimus, progredimur ad locum multo difficiliorem, ubi dijudicandum est, utrum numerus aliquis propositus residuum sit ordinis cujusvis t, an non-residuum. Et sane in doctrina residuorum tres potissimum res in quaestionem veniunt, primum num numerus A sit residuum ordinis t an non-residuum, deinde si illud locum habet, quae sint radices congruentiae $x^t \equiv A$ (mod. m), postremo multitudo residuorum indaganda erit, quae tamen, uti in 4. ostendimus, ex multitudine radicum congruentiae nostrae facillime petitur.

Jam ut ad rem veniam, multitudinem numerorum ad modulum p^n vel $2p^n$ primorum, ubi p numerus primus impar, designem per $\varphi_m = p^{n-1}(p-1)$, atque per δ divisorem communem maximum numerorum t et φ_m. Tum dico

1. Si A sit residuum ordinis t secundum modulum p^n vel $2p^n$, semper congruentiam locum habere

$$A^{\frac{\varphi_m}{\delta}} \equiv 1.$$

2. Vice versa, si congruentia $A^{\frac{\varphi_m}{\delta}} \equiv 1$ locum habet, semper A erit residuum ordinis t.

Quas propositiones ita demonstro. Quod attinet ad primam, numerus aliquis α poterit inveniri ejusmodi, ut habeatur $\alpha^t \equiv A$, ex quo sequitur $(\alpha^t)^{\frac{\varphi_m}{\delta}} \equiv A^{\frac{\varphi_m}{\delta}}$ vel $\alpha^{\frac{t}{\delta}\cdot\varphi_m}$. Est vero $\frac{t}{\delta}$ numerus integer, unde $\frac{t}{\delta}\cdot\varphi_m$ multiplum ipsius φ_m, ideoque $\alpha^{\frac{t}{\delta}\cdot\varphi_m} \equiv 1$, vel $A^{\frac{\varphi_m}{\delta}} \equiv 1$.

Secundo loco quicunque numerus ad m primus, qui est residuum ordinis t, congruentiae $x^{\frac{\varphi_m}{\delta}} \equiv 1$ satisfaciet (ex prima parte); quam ob rem restat modo ad demonstrandum, non-residua ordinis t congruentiae illi satisfacere non posse. Sed hoc inde clarum, quod multitudo residuorum est $\frac{\varphi_m}{\delta}$; totidem autem sunt radices congruentiae $x^{\frac{\varphi_m}{\delta}} \equiv 1$ (mod. $m=p^n$, $2p^n$), quia divisor communis maximus numerorum $\frac{\varphi_m}{\delta}$ et φ_m est $\frac{\varphi_m}{\delta}$. Quodsi nonnulla etiam non-

residua radices essent congruentiae $x^{\frac{\varphi m}{\delta}} \equiv 1$, quia jam $\frac{\varphi m}{\delta}$ radices eaeque residua exstant, congruentia, quam dixi, plures quam $\frac{m}{\delta}$ radices haberet, q. f. n.

Ergo numerus quicunque A talis, ut sit $A^{\frac{\varphi m}{\delta}} \equiv 1$, in residuis ordinis t occurrere debet.

8.

Hoc theorema rationem suppeditat inveniendi, num -1 sit residuum ordinis t an non-residuum moduli p^n vel $2p^n$. Sed simplicitatis gratia modulum esse primum imparem p supponamus.

Erit enim -1 residuum ordinis t aut non-residuum, prouti $\frac{p-1}{\delta}$ est numerus par aut impar, designante δ divisorem communem maximum numerorum t et $p-1$.

Quando igitur δ est numerus impar, ideoque $\frac{p-1}{\delta}$ par, semper -1 erit residuum ordinis t moduli primi p.

Quodsi exponens t est impar, etiam δ impar esse debet, ex quo sequitur theorema generale:

Numerus -1 semper residuum est ordinis cujusvis imparis moduli primi imparis p; itaque -1 erit semper residuum cubicum, residuum quinti, septimi, noni ordinis etc.

Pro exponente $t = 4$ erit δ aut 2 aut 4, prouti modulus p formam induit $4n+3$ aut formam $4n+1$. In priori casu $\frac{p-1}{\delta}$ est impar, in posteriori autem simul cum n par et impar. Quodsi n est par, modulus formam habebit $8m+1$, formam vero $8m+5$, quando n impar. Unde manat propositio:

-1 est non-residuum biquadraticum moduli primi formae $4n+3$ vel formarum $8n+3$, $8n+7$, atque etiam moduli $8n+5$ non-residuum biquadraticum est -1; moduli autem $8n+1$ semper residuum biquadraticum erit.

Aliam hujus propositionis demonstrationem, quae theoria residuorum potestatum nititur, cf. Gauss Theoria residuorum biquadraticorum. Gottingae. MDCCCXXVIII. pag. 10. sqq.

Postremo pro $t=6$ erit δ aut 2 aut 6 prouti p est formae $6n+5$ aut formae $6n+1$; in priori casu est $\frac{p-1}{\delta}$ par aut impar simul cum n, in posteriori casu idem valet; ergo pro $p=6n+5$ erit -1 residuum aut non-residuum sexti ordinis, prouti $\frac{1}{2}(p-5)$ par aut impar; at pro $p=6n+1$ erit -1 residuum aut non-residuum sexti ordinis, prouti $\frac{1}{6}(p-1)$ par aut impar.

Digitized by Google

Unde -1 est residuum sexti ordinis moduli cujusvis formae $12\lambda+1$, $12\lambda+5$; non-residuum vero moduli forma praediti $12\lambda+7$, $12\lambda+11$.

9.

1. Quicunque numerus impar residuum est ordinis imparis moduli 2^n.
Exstant enim (6.) 2^{n-1} residua ordinis imparis t, totidemque numeri ad modulum primi eoqae inferiores.

2. Quando vero t est par atque δ divisor communis maximus numerorum t et 2^{n-2}, semper congruentia locum habebit $A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ (mod. 2^n), si modo A est residuum ordinis t moduli 2^n.

Reperitur etenim numerus α talis, ut habeatur $\alpha^t \equiv A$, ergo talis, ut sit $(\alpha^t)^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv \alpha^{\frac{t}{\delta}.2^{n-2}} \equiv A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}}$. Jam vero $\frac{t}{\delta}$ est integer atque $\alpha^{2^{n-2}} \equiv 1$ (De Potest. Period. §. 22.), ideoque $A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$.

3. Si numerus A congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ non satisfacit, A non potest esse residuum ordinis t moduli 2^n.

Exstare autem possunt non-residua moduli 2^n, quae tamen congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ satisfaciunt, Ita ut propositionem in 2. convertere non liceat.

Nam quum multidudo residuorum ordinis t moduli 2^n sit $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ (6.) omnesque congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ satisfaciant, radicum autem multitudo sit $2.\frac{2^{n-2}}{\delta} = \frac{2^{n-1}}{\delta}$ (3.) i. e. alterum tantum multitudinis residuorum, manifesto etiam $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ non-residua erunt radices congruentiae nostrae. Multitudo omnium non-residuorum est $2^{n-1} - \frac{2^{n-2}}{\delta}$ vel $\frac{2^{n-2}}{\delta}(2\delta-1)$, quorum $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ congruentiae satisfaciunt, ergo exstant $\frac{2^{n-2}}{\delta}.(2\delta-1) - \frac{2^{n-2}}{\delta}$ vel $\frac{2^{n-1}}{\delta}(\delta-1)$ non-residua ordinis t pro modulo 2^n, quae non sunt radices congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ (modulus 2^n). Hoc in causa est, cur omnes numeros integros impares modulo 2^n inferiores in tres classes distribuam, quarum prima complectitur residua t^{ti} ordinis omnia, secunda non-residua t^{ti} ordinis moduli 2^n, quae tamen congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ satisfaciant, tertia denique continet numeros, qui sunt non-residua, atque etiam con-

gruentiae, quam dixi, non satisfaciant. Multitudo numerorum primae classis est $\frac{1}{\delta}.2^{n-2}$, multitudo numerorum secundae classis est $\frac{1}{\delta}.2^{n-2}$, multitudo denique numerorum tertiae classis est $\frac{2^{n-1}}{\delta}(\delta-1)$.

Nunc quidem quaeritur, ad quam classem numerus propositus impar secundum modulum 2^n $(n>2)$ referendus sit? Facile autem quaestionem hanc decides, si ad sequentia animum attenderis.

10.

Quoniam δ numerum 2^{n-2} metiri debet, perspicuum est, ipsum δ potestati alicui numeri 2 aequalem fore, ex quo $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ erit semper et ipse potestas numeri 2 aliqua, dummodo ne sit $2^{n-2}=\delta$.

Quodsi habetur $\delta=2^{n-2}$, congruentiae manifesto $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}}=x\equiv 1$ satisfacere non potest A, nisi est $A=1$, quumque esse oporteat t multiplum ipsius 2^{n-2}, erit pro quocunque x $x^t\equiv 1$ (mod. 2^n), quam ob rem etiam congruentiae $x^t\equiv A$ satisfieri nequit, nisi est $A=1$.

Unde manat theorema:

Quicunque numerus impar modulo 2^n minor unitatique inaequalis semper ad tertiam classem referendus est, si ordinem t statuas multiplum numeri 2^{n-2}.

Jam sit 2^{n-2} non $=\delta$ eritque $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ potestas aliqua numeri 2, quam exhibeamus per 2^Θ, ubi Θ numerum $n-3$ superare nequit.

Quodsi numerus aliquis impar A forma exhibetur $2^k h\pm 1$, ubi h impar atque $k>1$, congruentia $A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}}\equiv 1$ (mod. 2^n) locum non habebit, quando est $k+\Theta<n$.

Si vero $k+\Theta\overline{>}n$, revera erit $A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}}\equiv 1$. Nam quum A sit $=2^k h\pm 1$, erit (1.) A^{2^Θ} formae $2^{k+\Theta}h'+1$, ubi h' impar, essetque si congruentia, quam dixi, locum haberet, $2^{k+\Theta}h'\equiv 0$. Atqui hoc fieri nequit, quum sit $k+\Theta<n$.

Deinde si esset $A^{2^\Theta}\equiv f$ (mod. 2^n), ita ut f unitati non esset congruus, haberetur $2^{k+\Theta}h'+1\equiv f$ vel $2^{k+\Theta}h'-(f-1)\equiv 0$, ideoque $f-1\equiv 0$, quia $k+\Theta\overline{>}n$. Illud vero absurdum est, ergo revera est $A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}}\equiv 1$.

Hinc sequitur (9.), quemvis numerum imparem formae $2^k h\pm 1$, ubi h impar et $k>1$, ad classem tertiam referendum esse, quando habeatur $k+\Theta<n$, quo facto hic numerus etiam non-residuum ordinis paris t erit.

Si vero est $k+\Theta \geqq n$, numerus A aut ad classem primam aut ad secundam pertinebit, prouti A est residunm ant non-residuum.

Sed num A in prima classe sit an in secunda, facile deciditur, si A est formae $4m-1$. Dico enim, quemvis numerum formae $4m-1$ nunqnam residuum t^{ti} ordinis fore secundnm modulum 2^n. t semper par intelligendus est.

Redigatur t sub formam $2^\lambda f$, ubi f impar, eritqne, si radix congruentiae $x^t \equiv A$ exstet formae $2^k h \pm 1$, x^t formae $2^{k+\lambda} h' + 1$, ita ut sit h' impar. Hinc $2^{k+\lambda} h' + 1 \equiv 4m-1$, ideoque $2^{k+\lambda-1} h' - 2m + 1 \equiv 0$ (mod. 2^{n-1}), q. f. n., quoniam $2^{k+\lambda-1} h' - 2m + 1$ est impar. Unde manat, si numerus aliquis A sit residuum paris ordinis secundum modulum 2^n, semper $-A$ fore non-residuum.
Etenim A formam induere oportet $4m+1$, ergo $-A$ formam $2^n-(4m+1)$ vel hanc $4m-1$, ex quo $-A$ erit non-residuum.
Exemplum. Sit modulus $32=2^5$, ergo $n=5, t=6$. Erit $\delta=2$, $\frac{2^{n-2}}{\delta} = 2^2$, $\Theta = 2$.

Erit igitur solummodo $k+\Theta<5$, quando $k=2$, qua re ad tertiam classem pertinent numeri formae $4m \pm 1$, ubi m impar, i. e. numeri 3, 5, 11, 13, 19, 21, 27, 29. Reliqui 1, 7, 9, 15, 17, 23, 25, 31 ad classes 1 et 2 referendi sunt, satisfaciuntque congruentiae $x^4 \equiv 1$ (mod. 32).

11.

Jam vero in genere possumus determinare, ad quam classem numerus aliquis A formae $2^k h \pm 1$ referendus sit.
Etenim si $k+\Theta<n$, numerns A semper ad tertiam classem pertinet (10).

Si vero $k+\Theta$ ipso n non est minor, omnes numeri formae $2^k h+1$ in prima sunt classe, ii antem, qui formam induunt $2^k h-1$ in secnnda erunt classe.
Nam omnes numeros formae $2^k h-1$ ad classem secundam pertinere ex 10. patet. Atqui manifesto totidem sunt formae $2^k h+1$ quot hujusce $2^k h-1$; si igitur nonnulli formae $2^k h+1$ ad secundam classem pertinerent, in secunda plures numeri exstarent, quam in prima classe, quod fieri nequit, quum (9.) totidem sint, nempe $\frac{1}{\delta} . 2^{n-2}$, in ambabus classibus.

Unde manat, quemvis numerum A ejusmodi, ut sit formae $2^k h+1$ simulque $k+\Theta \geqq n$ fore residuum ordinis paris t moduli 2^n
Quando $k+\Theta<n$, numerus propositus semper erit non-residuum; quando $k+\Theta \geqq n$, etiamtum numerus non-residuum erit, si formam habet $2^k h-1$.
Licet manifesto accipere $k+\Theta=n$ vel $k=n-\Theta$, quo facto h potest esse numerus integer quicunque.

Jam vero est $2^\Theta = \frac{2^{n-2}}{\delta}$ ideoque $2^{n-\Theta} h+1 = 4\delta h+1$. Ex quo tandem sequitur theorema elegans, quod totam residuorum ordinis paris doctrinam pro modulo 2^n exhauriat:

Quivis numerus impar formae $4\delta h+1$ est residuum ordinis paris t moduli 2^n, reliqui vero numeri sunt non-residua, denotante h numerum integrum quemcunque et δ divisorem communem maximum numerorum t et 2^{n-2}.

Quicunque autem numerus impar residuum est ordinis imparis moduli 2^n (9.).

Exempli gratia pro $t=2$ erit $\delta=2$; ergo quando potestas aliqua numeri 2 altior quam secunda pro modulo assumitur, omnes numeri impares formae $8h+1$ erunt residua quadratica, reliqui vero non-residua. Cf. Comm. meam de Potestatum Periodis. pag. 29.

12.

Quod multitudo residuorum ordinis paris est $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ (6.), pro h omnes numeri integri 0, 1, 2, 3, 4,.... ponendi sunt usque ad $\frac{2^{n-2}}{\delta}-1$; qua re simul residua reperimus ipsa. Sunt enim haec:

$1,\ 4\delta+1,\ 8\delta+1,\ 12\delta+1,\ 16\delta+1,\ 20\delta+1$ cett. $4(2^{n-2}-\delta)+1$.

13.

Ut omnia, quae ad hoc de residuis eruimus, complectamur, hae inde manant propositiones:

Congruentia $x^t\equiv A$ (mod. p^n, $2p^n$) tum modo resolvi potest, quando $A^{\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}}$ unitati fit congrua exstantque δ radices diversae, denotante δ divisorem communem maximum numerorum t et $p^{n-1}(p-1)$. Multitudo residuorum ordinis t est $\frac{1}{\delta}\cdot p^{n-1}(p-1)$.

Congruentia $x^t\equiv A$ (mod. 2^n), ubi $n>2$, semper resolubilis est, quando t impar, exstatque una solummodo radix. Multitudo residuorum est 2^{n-1} eritque quivis numerus impar residuum. Si vero t est par, congruentia tum modo resolvi poterit, quando A formam induit $4\delta h+1$. Multitudo radicum erit 2δ multitudoque residuorum ordinis t aequiparabit numerum $\frac{2^{n-2}}{\delta}$.

Congruentiam denique $x^t\equiv A$ (mod. 4) semper resolvi posse, quando t impar, quando vero t par resolubilem esse aut non-resolubilem, prouti A formae sit $4m+1$ aut hujusce $4m-1$ per se patebit.

14.

Denotante z numerum aliquem imparem, si habetur $z=2^k h\pm1$, ubi h impar, atque $z<4\delta h+1$, manifesto erit $k<n-\theta$ vel $k+\theta<n$. Ex quo sequitur (11.)

Numerus quicunque impar z sub formam reductus $2^k h\pm1$ ita ut sit k impar, semper ad classem tertiam pertinet, si habetur $z<4\delta h+1$.

Si vero non est $z<4\delta h+1$, numerus z ad classem primam aut secundam referendus est, prouti formam induit $4\delta h'+1$ aut hanc $4\delta h'-1$, designante h' numerum quemcunque integrum.

Exempli gratia sit modulus $2^5=32$, ergo $n=5$, $t=6$, erit $\delta=2$, porro $z=27=4.7-1$, $h=7$, $4\delta h+1=57$, $27<57$. Ergo 27 in tertia classe reperitur. At vero pro $z=17$ erit $h=1$, $4\delta h+1=9$ atque z non $<4\delta h+1$. Ergo 17 ad primam pertinet classem, quia $17=4\delta h'+1$.

15.

Si autem t sub formam redigitur $2^\lambda f$, ita ut f sit impar, manifesto divisor communis maximus δ erit 2 pro $n=3$, 2^2 pro $n=4$, 2^3 pro $n=5$, 2^4 pro $n=7$ etc., $2^{\lambda-1}$ pro $n=\lambda+1$ atque 2^λ pro $n>\lambda+1$. Hinc erunt valores numeri $4\delta h\pm1$ pro

$$n=3 \ldots\ldots 2^3 h\pm1,$$
$$n=4 \ldots\ldots 2^4 h\pm1,$$
$$n=5 \ldots\ldots 2^5 h\pm1,$$
$$n=6 \ldots\ldots 2^6 h\pm1$$
etc.,
$$n=\lambda+1 \ldots\ldots 2^{\lambda+1} h\pm1,$$
$$n>\lambda+1 \ldots\ldots 2^{\lambda+2} h\pm1.$$

Si accipias signum superius, habebis numeros ad classem primam pertinentes, ad secundam vero, si sumas inferius. Reliqui numeri ad tertiam classem referuntur.

16.

Potest etiam periodus inveniri, quae omnia residua ordinis t moduli p^n vel $2p^n$ complectatur. Sit enim p^n vel $2p^n=m$, $\varphi_m=p^{n-1}(p-1)$ atque g numerus aliquis ad exponentem $\frac{\varphi_m}{\delta}$ pertinens, denotante δ divisorem communem maximum numerorum t et φ_m. Erit g residuum ordinis t; atque etiam g^2, g^3, g^4, ... $g^{\frac{\varphi_m}{\delta}}$, quorum multitudo quum sit $\frac{\varphi_m}{\delta}$ neque plures numeri residua esse possint, patet, illam periodum omnia residua involvere.

17.

Si doctrinam residuorum potestatum adhibere velis, theoremata art. 11. et 14. facilius ita probantur:

Sit indoles numeri f ea, ut habeatur $f^{\frac{2^{n-2}}{\delta}}\equiv1 \pmod{2^n}$, quaeriturque, num f ad classem primam pertineat an ad classem secundam, i. e. num f sit residuum ordinis paris t an non-residuum?

Digitized by Google

Pertinebit autem f ad exponentem, qui divisor est numeri $\frac{2^{n-2}}{\delta}$, quo designato per $2^{n-\varphi}$ erit f formae $2^{\varphi} k \pm 1$, denotante k numerum imparem (De Periodis Potest. §. 23.).

Debet autem φ ita determinari, ut sit $\frac{\frac{2^{n-2}}{\delta}}{2^{n-\varphi}}$ numerus integer vel ita ut sit $\frac{2^{\varphi}}{4\delta}$ integer, quo designato per h erit f formae $4\delta hk \pm 1$ vel hujusce $4\delta h \pm 1$, denotante h numerum integrum quencunque.

Satisfaciunt igitur numeri formae $4\delta h \pm 1$ congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ (mod. 2^n).

Formae autem $4\delta h - 1$ ad primam classem pertinere nequeunt (10); pertinent igitur ad secundam classem. Formae autem $4\delta h + 1$ ad primam classem pertinent, quia totidem numeri exstant formae $4\delta h + 1$ quot hujusce $4\delta h - 1$ atque multitudo numerorum in ambabus classibus eadem est (9).

18.

Designemus nunc classes, quas dixi, per A, B, C, ita ut A sit prima, B secunda, C tertia classis.

Productum manifesto ex A in A reperitur in A, quia $(4\delta h + 1)(4\delta h' + 1)$ denuo est formae $4\delta h + 1$.

Productum ex B in B debet occurrere in A, quia $(4\delta h + 1)(4\delta h' - 1)$ etiamnunc formam induit $4\delta h + 1$.

Productum ex numero aliquo classis A in numerum classis B necessario invenitur in B, quoniam est $(4\delta h + 1)(4\delta h' - 1)$ formae $4\delta h - 1$, quae characterem indicat classis B.

Quando C in A multiplicetur, habetur numerus ex C, idemque valet, quando C in B multiplicetur.

Si vero C in C multiplicetur, numerus inde ortus tum in A, tum in B, tum in C occurrere potest; in quam autem classem referendus sit, hoc modo investigo.

Primum observamus, omnes numeros classis C forma exhiberi $k + 4\delta h$, ita ut k sit numerus impar ipso 4δ minor, qui nullum horum $+1, -1$ aequiparat. Iam congruentia $x^{\delta} \equiv 1$ (mod. 4δ) admittit 2δ radices diversas (2.), quarum hae solummodo 1 et -1 formae sunt $4\delta h \pm 1$. Erunt igitur $2\delta - 2$ vel $2(\delta - 1)$ radices formae $4\delta h + k$, ita ut k ab 1 et -1 sit diversus; quam ob rem hae quidem radices ad classem C pertinebunt. Itaque ad classem C pertinebunt etiam numeri formae $4\delta h + k_1$, numeri formae $4\delta h + k_2$, numeri formae $4\delta h + k_3$, formae $4\delta h + k_4$ etc., designantibus k_1, k_2, k_3, k_4 etc. radices congruentiae $x^{\delta} \equiv 1$ (mod. 4δ) ab 1 et -1 diversas.

Debet antem esse in genere $4\delta h + k_{\lambda} < 2^n$, vel $h < \frac{2^n - k_{\lambda}}{4\delta}$, $h < \frac{2^{n-2}}{\delta} - \frac{k_{\lambda}}{4\delta}$, ideoque summus valor, quem h obtineat, erit $\frac{2^{n-2}}{\delta} - 1$. Ergo forma $4\delta h + k_{\lambda}$ complectitur $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ numeros; ex

Digitized by Google

quo, si pro k_λ ponuntur omnes radices congruentiae $x^\delta \equiv 1$ (mod. 4δ), habentur $\frac{2^{n-2}}{\delta}.2(\delta-1) = \frac{2^{n-1}}{\delta}(\delta-1)$ numeri ad classem C pertinentes.

Totidem autem in hac classe reperiuntur neque vero plures (9.); qua re omnes prodibunt numeri classis C, si methodum sequentem adhibeas:

Quaerantur radices congruentiae $x^\delta \equiv 1$ (mod. 4δ) ab 1 et -1 diversae, quarum qualibet designata per k_λ, omnes numeros exhiberi oportet formae $k_\lambda + 4\delta h$ modulo 2^n minores. Tum numeri classis C prodibunt omnes, si pro k_λ omnes radices congruentiae, quam dixi, ponuntur.

Sint igitur z, z' numeri propositi classis C determinenturque horum residua minima secundum modulum 4δ ita ut sit $z \equiv k_\lambda$ (mod. 4δ), $z' \equiv k_\mu$ (mod. 4δ) eritque $zz' \equiv k_\lambda k_\mu$ (mod. 4δ). Quodsi habetur $k_\lambda k_\mu \equiv 1$ (mod. 4δ), productum zz' ad A pertinet, ad B vero, si $k_\lambda k_\mu \equiv -1$, et ad C, quando $k_\lambda k_\mu \equiv f$, denotante f numerum ab 1 et -1 diversum.

19

Superest, ut radices congruentiae $x^t \equiv 1$ (mod. 2^n) inveniantur, ubi t est numerus par.

Quaevis radix ad exponentem pertinet, qui numeros t et 2^{n-2}, ergo etiam horum divisorem communem maximum 2^δ simul metiatur. Pertinebunt igitur radices partim ad 1, partim ad 2, partim ad $2^2, \ldots$ partim ad 2^δ.

Iam vero omnes numeri ad exponentem 2^{n-m} pertinentes forma continentur $2^m h \pm 1$, denotante h numerum imparem, qui valores induere possit

$$1, 3, 5, 7, \ldots\; 2^{n-m}-1.$$

Quum vero differentia numerorum $2^m h \pm 1$ et $2^m(h-2) \pm 1$ sit 2^{m+1}, numeri ad 2^{n-m} pertinentes facillime ita computantur, ut in duas classes distribuantur, cujus in altera sint formae $2^m h + 1$, in altera formae $2^m h - 1$; in utraque autem classe numerum, qui aliquem proxime sequitur, habebis, si ad eum 2^{m+1} addideris.

Classes igitur hae sunt:

$$A \left\{ \begin{array}{l} a = 2^m - 1 \\ b = a + 2^{m+1} \\ c = b + 2^{m+1} \\ d = c + 2^{m+1} \\ \ldots\ldots \end{array} \right\} \qquad A' \left\{ \begin{array}{l} a' = 2^m + 1 \\ b' = a' + 2^{m+1} \\ c' = b' + 2^{m+1} \\ d' = c' + 2^{m+1} \\ \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Ad exponentem 2^{n-m} autem semper 2^{n-m} numeri pertinent, excepto casu, in quo exponens est 2. Tum enim 3 numeri exstant, nempe $2^{n-1}-1$, $2^{n-1}+1$, 2^n-1. Hae considerationes statim viam sternunt ad radices inveniendas.

Quaeratur enim divisor communis maximus numerorum t et 2^{n-2}, qui sit 2^δ, determinenturque adjumento classium A et A' numeri ad exponentes 1, 2, 2^2, 2^3, .. 2^δ pertinentes.

Exempli gratia congruentia $x^{20}\equiv 1$ (mod. 32.) habet 8 radices, quae ita inveniuntur:

Hic est $\delta=2$, ideoque divisores ipsius 2^δ sunt 1, 2, 4. Ad exponentem 1 pertinet 1, ad 2 pertinent 2^4-1, 2^4+1, 2^5-1 vel 15, 17, 31. Ad 4 pertinent, quia $m=3$,

$$a=2^3-1=7 \qquad a'=2^3+1=9$$
$$b=a+2^4=23 \qquad b'=a'+2^4=25$$

Ergo radices sunt 1, 7, 9, 15, 17, 23, 25, 31.

20.

Inveni etiam aliam methodum radices indagandi, ex qua multa alia attentione haud indigna manabunt.

Dico enim, si ad exponentem t secundum modulum 2^n numerus a pertineat, etiam a^k ad eundem exponentem pertinere, si k sit numerus impar.

Primum patet, potestatem $(a^k)^t$ certe unitati sec. mod. 2^n congruam esse, qua re restat modo ad demonstrandum, $(a^k)^t$ esse infimam ipsius a^k potestatem unitati congruam vel potestates

$$a^k,\ a^{2k},\ a^{3k},\ \ldots\ a^{tk}$$

incongruas esse. Fac autem, ut habeatur $a^{\theta k}\equiv a^{\theta' k}$, ubi sunt θ, θ' numeri inter 1 et t siti, eritque $a^{(\theta-\theta')k}\equiv 1$, ideoque, quum a ad t pertineat, $(\theta-\theta')k\equiv 0$ (mod. t). Atqui t ad k primus est, ergo $\theta-\theta'\equiv 0$ (mod. t) q. e. a. Pertinet igitur a^k ad exponentem t.

Itaque residua minima numerorum

$$a,\ a^3,\ a^5,\ a^7,\ ..\ a^{t-1},$$

quorum multitudo $\frac{1}{2}t$, ad exponentem t pertinent omniaque sunt inaequalia.

Quum jam (De Potest. Period. §. 24.) semper t numeri ad t pertineant, exstabit unus certe numerus ad t pertinens, qui nulli illorum sit congruus, quem vocemus b. Unde ad t etiam pertinent residua inaequalia

$$b,\ b^3,\ b^5,\ b^7,\ ..\ b^{t-1}$$

quorum multitudo etiamnunc $\frac{1}{2}t$.

Nullam denique ipsius b potestatem alicui ipsius a congruam fore, ita demonstro.

Primum contendo, semper potestatem aliquam numeri a exstare congruentiae

$$x^{\varphi} \equiv a^{\Theta} \text{ (mod. } 2^n)$$

satisfacientem, ubi sunt φ, Θ aliqui ex his 1, 3, 5, 7, .. $t-1$.

Etenim quia φ tanquam impar ad t primus est, numerus μ ita semper potest determinari, ut habeatur $\varphi\mu \equiv \theta$ (mod. t) vel $\varphi\mu - \theta \equiv 0$ (mod. t). Est vero $a^t \equiv 1$ (mod. 2^n), ergo etiam $a^{\varphi\mu - \theta} \equiv 1$ (mod. 2^n) vel $a^{\varphi\mu} \equiv a^{\Theta}$ (mod. 2^n), qua re potestas a^{μ} huic congruentiae $x^{\varphi} \equiv a^{\Theta}$ satisfacit.

Iam vero una solummodo radix ei satisfacit, quia φ impar; ergo si ex. gr. haberetur $b^{\varphi} \equiv a^{\Theta}$ (mod. 2^n), esset $b \equiv a^{\mu}$, contra ea quae supposuimus.

Itaque duas classes nacti sumus

$$(M) \;\ldots\; a,\; a^3,\; a^5,\; a^7 \ldots a^{t-1}$$
$$(M') \;\ldots\; b,\; b^3,\; b^5,\; b^7 \ldots b^{t-1},$$

quas per M et M' designavimus.

Ceterum observandum est, numerum b ea indole affectum ut sit $b + a \equiv 0$ (mod. 2^n), nulli postestatum classis M congruum fieri.

Nam primum est $b \equiv -a$, ideoque $b^t \equiv a^t \equiv 1$, quia t par. Porro nulla inferior ipsius b vel $-a$ potestas quam t^{ta} unitati fit congrua.

Potestates enim, quarum exponentes ambo pares vel ambo impares incongruas esse ex suppositione patet. Restat igitur, ut probemus, congruentiam locum habere non posse $a^{\varphi} \equiv -a^{\psi}$ vel $a^{\varphi} + a^{\psi} \equiv 0$, designante φ numerum parem, ψ vero imparem. Est vero si ponatur $a = 2^k h \pm 1$, ubi h impar, a^{φ} formae $2^{k+\lambda} h' + 1$, ubi $\varphi = 2^{\lambda} f$ atque f impar,; contra ea a^{ψ} formae $2^k h'' \pm 1$, ita ut sit h'' impar. Unde manat, quando signum superius accipias, $2^{k+\lambda-1} h'' + 2^{k-1} h' + 1 \equiv 0$ (mod. 2^{k-1}), q. f. n.; si vero signum inferius statuas, habetur $2^k (2^{\lambda} h'' + h') \equiv 0, 2^k \equiv 0, k \gtreqless n$. Sed etiam hoc fieri nequit, nisi $h=1$, quo in casu $2^n - 1$ ad exponentem 2 pertinet, quem excludimus. Pertinet igitur $-a$ ad exponentem t.

Unde classes habemus

$$(M) \;\ldots\ldots\; a,\; a^3,\; a^5,\; a^7 \ldots a^{t-1}$$
$$(M') \;\ldots\ldots\; -a,\; -a^3,\; -a^5,\; -a^7 \ldots -a^{t-1}.$$

Pro a quilibet numerus ad t pertinens accipi poterit.

Postremo nullus terminus classis (M') alicui classis (M) congruus erit. Nam si haberetur $a^{\varphi} \equiv -a^{\psi}$, ita ut φ, ψ ambo sint

impares, esset, si a statuas formae $2^k h \pm 1$, $2^{k-1}h'' + 2^{k-1}h' \pm 1 \equiv 0$ (mod. 2^{n-1}), q. f. n.

Ex quo tandem sequitur, omnes numeros ad exponentem t pertinentes classibus (M) et (M') contineri; nam multitudo terminorum est t, plures vero ad t non pertinent.

21.

Nunc tandem probabo, classem (A) congruere cum classe (M) et classem (A') cum classe (M').

Numeri classium (A) et (A') ita etiam possunt repraesentari

$$A. \left\{\begin{matrix} 2^m-1 \\ 3.\ 2^m-1 \\ 5.\ 2^m-1 \\ 7.\ 2^m-1 \end{matrix}\right\} \qquad A'. \left\{\begin{matrix} 2^m+1 \\ 3.\ 2^m+1 \\ 5.\ 2^m+1 \\ 7.\ 2^m+1 \end{matrix}\right\}$$

. . . .

ex quo patet, formas primae classis esse $2^m h - 1$, formas vero secundae $2^m h + 1$.

Iam numerus a in classe (M) sit formae $2^m h - 1$ eritque (1.) etiam a^φ formae $2^m h - 1$, denotante φ numerum integrum imparem. Hanc igitur formam induunt a^3, a^5, a^7, etc. neque vero alteram $2^m h + 1$; nam si haberetur simul $2^m h' + 1 = 2^{m'} h - 1$, esset $2^m h' - 2^{m'} h = 2$, $2^{m-1} h' - 2^{m'-1} h = 1$, q. e. a. Ergo classes (A) et (M) congruunt, similique modo classes (A') et (M').

22.

Relationes quaedam valde insignes inter terminos periodorum radicesque congruentiarum purarum.

1. Summa potestatum exponentis k omnium terminorum periodi numeri cujusvis a aut per modulum primum p divisibilis est aut exponenti, ad quem a pertinet, congrua, prouti t ipsum k non metitur aut metitur.

Demonstratio. Summa potestatum exponentis k terminorum

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots\ a^t$$

est

$$a^k + a^{2k} + a^{3k} + a^{4k} + \ldots + a^{tk}$$

vel summa

$$s = a^k \cdot \frac{a^{tk}-1}{a^k-1},$$

ideoque

$$s(a^k-1) = a^k(a^{tk}-1), \quad \text{ergo} \quad s(a^k-1) \equiv 0 \ (\text{mod. } p).$$

Quodsi t ipsum k non metitur, esse nequit $a^k \equiv 1$ (mod. p), quam ob rem tum quidem s per p dividi poterit. Si vero t numerum k metitur, erit $a^k \equiv 1$, ergo $a^{2k} \equiv 1$, etc., atque $s \equiv t$.

Corollarium. Quando g ad exponentem $\frac{p-1}{\delta}$ pertinet, ubi est δ divisor communis maximus numerorum t et $p-1$, ex 16. sequitur, residua ordinis t sec. mod. p potestatibus exhiberi

$$g, g^2, g^3, g^4, \ldots g^{\frac{p-1}{\delta}}.$$

Residua igitur periodum constituunt, qua ex re etiam summa potestatum k^{tarum} omnium residuorum ordinis t secund. mod. p aut per p divisibilis erit aut numero $\frac{1}{\delta}(p-1)$ congrua, prouti k per t non divisibilis est aut divisibilis.

2. Designante etiam nunc δ divisorem communem maximum numerorum t et $p-1$, congruentia $x^t \equiv 1$ (mod. p) admittit δ radices diversas, quarum qualibet ad exponentem δ pertinens designata per ω omnes radices exhibentur potestatibus

$$\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots \omega^{\delta}.$$

Ex quo sequitur propositio (1.):

Summa potestatum k^{tarum} omnium radicum congruentiae $x^t \equiv 1$ (mod. p) semper per p divisibilis est, si t ipsum k non metitur.

3. In comment. De Potestatum Periodis. §. 43. jam demonstravi, productum ex omnibus terminis periodi numeri cujusvis secundum modulum p^n vel $2p^n$ unitati congruum esse positive aut negative acceptae, prouti multitudo terminorum sit impar aut par.

Ergo ex 16 manat theorema:

Productum omnium residuorum ordinis t moduli p^n vel $2p^n$ unitati positive aut negative sumptae congruum est, prouti multitudo residuorum est impar aut par.

4. Quodsi radices congruentiae

$$x^t \equiv 1 \text{ (mod. } p),$$

sunt $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_\delta$, designaturque summa omnium radicum per $-A_1$, summa combinationum binarum radicum per A_2, summa combinationum ternarum per $-A_3$, summa combinationum quaternarum per A_4 etc.; deinde summa radicum per S_1, summa quadratorum per S_2, summa cuborum per S_3, summa biquadratorum per S_4 etc., ex theoremate Neutoniano habentur aequationes

$$\left\{\begin{array}{l} S_1+A_1=0 \\ S_2+A_1S_1+2A_2=0 \\ S_3+A_1S_2+A_2S_1+3A_3=0 \\ S_4+A_1S_3+A_2S_2+A_3S_1+4A_4=0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ S_{\delta-1}+A_1S_{\delta-2}+A_2S_{\delta-3}+\ldots+(\delta-1)A_{\delta-1}=0 \\ S_\delta+A_1S_{\delta-1}+A_2S_{\delta-2}+\ldots+A_{\delta-1}S_1+\delta A_\delta=0. \end{array}\right.$$

Iam vero (2.) summae S_1, S_2, S_3, S_4, etc. $S_{\delta-1}$ sunt $\equiv 0$, at $S_\delta\equiv\delta$, ergo adjumento aequationum erit $A_1\equiv A_2\equiv A_3\ldots\ldots\equiv A_{\delta-1}\equiv 0$, at $\delta+\delta A_\delta\equiv 0$.

Hinc erit etiam

$$-A_1\equiv 0,\; A_2\equiv 0,\; -A_3\equiv 0,\; A_4\equiv 0, \text{ etc.}$$

Productum omnium radicum, quod per P designemus, erit $\mp A_\delta$ prouti δ est impar aut par, ergo resp. $P\equiv\pm 1$.

Hinc deducti sumus ad theorema elegans:

Summa omnium radicum congruentiae $x^t\equiv 1 \pmod{p}$, deinde summa combinationum binarum, ternarum, quaternarum etc. radicum semper per modulum primum p divisibilis est. Productum vero radicum unitati positive aut negative acceptae est congruum, prouti multitudo radicum est impar aut par.

4. Designetur summa combinationum m elementorum ad classem n^{tam} per ${}^nC_m$ eritque, quando ε significat elementum quodvis, ut ex theoria combinationum constat:

$${}^nC_m={}^nC_{m-1}+\varepsilon^{n-1}C_{m-1}\,.$$

Quodsi habetur

$${}^1C_m\equiv 0,\; {}^2C_m\equiv 0,\; \ldots\; 1+{}^mC_m\equiv 0$$

erit

$$\varepsilon+{}^1C_{m-1}\equiv 0,\; {}^2C_{m-1}+\varepsilon{}^1C_{m-1}\equiv 0,\; {}^3C_{m-1}+\varepsilon{}^2C_{m-1}\equiv 0,$$

etc., ideoque

$$\varepsilon\equiv-{}^1C_{m-1},\; {}^2C_{m-1}-({}^1C_{m-1})^2\equiv 0,$$

$${}^3C_{m-1}-({}^1C_{m-1})^3\equiv 0,\; {}^4C_{m-1}-({}^1C_{m-1})^4\equiv 0,$$

etc.,

$${}^{m-1}C_{m-1}-({}^1C_{m-1})^{m-1}\equiv 0,\; {}^{m-1}C_{m-1}\,\varepsilon\equiv-({}^1C_{m-1})^m.$$

Digitized by Google

Unde manat, quum ${}^{m-1}C_{m-1}\,\varepsilon \equiv \pm 1$ sit, $({}^{1}C_{m-1})^m \equiv \mp 1$. Signo superiore utendum est aut inferiore, prouti m est impar aut par. Iam vero habetur ${}^{1}C_{m-1} \equiv -\varepsilon$, ergo $(-\varepsilon)^m \equiv \mp 1$ vel $\varepsilon^m \equiv 1$.

Ex quo habetur propositio:

Si summa numerorum secundum modulum primum p incongruorum, quorum multitudo m, deinde simul summa combinationum binarum, summa combinationum ternarum etc. per modulum divisibilis est, productum vero unitati positive aut negative acceptae congruum, prouti multitudo numerorum impar aut par, necessario quicunque illorum numerorum erit radix congruentiae $x^m \equiv 1$ (mod. p).

5. Finem huic commentationi imponam demonstratione propositionis, quae sequitur:

Productum omnium numerorum ad eundem exponentem pertinentium secundum modulum, qui potestas est aliqua numeri 2 altior quam secunda, semper unitati secundum hunc modulum congruum est.

Examinemus primum casum, in quo exponens t est 2. Tum vero ad t pertinent $2^{n-1}-1$, $2^{n-1}+1$, 2^n-1 productumque $P = (2^{2(n-1)}-1)(2^n-1)$, quod unitati secundum 2^n congruum esse, statim perspicietur.

Deinde sit $t > 2$ pertinebuntque hi numeri ad exponentem t (20.)

$$a,\ a^3,\ a^5,\ a^7, \ldots\ a^{t-1};\ -a, -a^3, -a^5, \ldots -a^{t-1}$$

vel eorum residua minima. Quoniam ex supp. $\frac{t}{2}$ semper est numerus par, erit productum

$$P = (a . a^3 . a^5 \ldots a^{t-1})^2 = (a^{1+3+5+\ldots+t-1})^2,$$

ideoque $P = a^{\frac{1}{2}t^2}$. Est vero $a^t \equiv 1$, ergo $(a^t)^{\frac{1}{2}t} \equiv 1$, i. e. $P \equiv 1$ (mod. 2^n), q. e. d.

XLVIII.

Ueber die Libelle oder das Niveau*).

Weil die Libelle oder das Niveau ein für alle Messinstrumente so wichtiges Werkzeug ist, so halte ich es für zweckmässig, den folgenden Aufsatz zu dessen weiterer Verbreitung, und weil derselbe wohl sonst nicht allen Lesern des Archivs zu Gesicht kommen möchte, in dieser Zeitschrift mitzutheilen. G.

Académie des Sciences de Bruxelles.

Séance du 2 novembre 1844.

Physique. — Un rapport fait dans cette séance par MM. Quetelet, Crahay et Stass, conclut à l'impression de la note suivante de M. Liagre, lieutenant du génie belge, sur les oscillations du niveau à bulle d'air et sur les moyens d'y remédier.

„On a fait jusqu'ici peu d'attention aux déplacements qu'éprouve la bulle d'un niveau fixé sur un plan horizontal immobile, lorsque l'une des extrémités de cette bulle vient à recevoir une température supérieure à celle de l'autre. J'ignore si des observations analogues ont déjà été publiées, mais, dans ce cas, elles doivent être très peu connues, car je n'ai vu cette particularité mentionnée dans aucun ouvrage**), et l'on est généralement d'accord aujourd'hui, lorsque l'on observe un changement quelconque dans l'indication du niveau adapté à un instrument, à en rendre responsable l'instrument lui-même, regardant comme infaillible la marche de la bulle. M. Quetelet, lorsque je lui ai parlé du fait

---

*) L'Institut, journal universel des sciences et des sociétés savantes en France et a l'Étranger. 1re Section. Treizième année. Nr. 590. 16. Avril 1845. p. 145.

**) J'ai consulté inutilement sur ce sujet les traités de physique et d'astronomie les plus récents et les plus estimés, notamment le *Physikalisches Wörterbuch* do Gehler, et l'*Astronomie physique* de M. Biot, qui a consacré quarante pages de son excellent ouvrage (tome II, 1844, chap. IX, sect. 2) à développer la construction, le maniement et les propriétés du niveau à bulle d'air. L.

en question, m'a appris qu'il avait observé le même phénomène il y a dix ans, pendant qu'il était occupé à déterminer la latitude de Bruxelles au moyen du cercle répétiteur, mais qu'il n'avait pas insisté sur cette singularité, parce qu'il croyait l'avoir vue rapportée dans un écrit dont le titre lui échappe aujourd'hui. Quoi qu'il en soit, mon but, en présentant cette note, n'est nullement d'établir mes droits de priorité à la découverte du phénomène que je signale, mais simplement de donner de la publicité à un fait que j'ai constaté pour ma part, et qui mérite d'être connu. Mon désir est d'être utile à ceux qui se servent du niveau à bulle d'air comme instrument de précision, en leur inspirant de la défiance dans son maniement, et de les mettre en garde contre des erreurs qui, dans des circonstances ordinaires, s'élèvent facilement à plusieurs secondes, et, dans des cas extrêmes, à une minute et au delà."

„En substance, ma remarque peut se formuler en ces quelques mots: „Un niveau à bulle d'air très bon et très sensible étant calé sur un plan invariable, si l'une des extrémités de sa bulle vient à se trouver en présence d'une température supérieure à celle de l'autre extrémité, la bulle tout entière marche du côté d'où émane la chaleur."

„Cette expérience est extrêmement facile à répéter, lorsque l'on possède un niveau un peu sensible. Il suffit de le caler, et de placer ensuite la main à un centimètre environ au-dessus d'une extrémité de la bulle. Au bout de cinq à six secondes (plus ou moins suivant la chaleur de la main et la sensibilité du niveau) on verra la bulle se déplacer lentement, marcher vers la main et suivre celle-ci dans tous ses mouvements. On rend cette action plus énergique en dirigeant l'haleine vers celui des deux bouts que l'on veut faire avancer. En moins de cinq secondes, j'ai déplacé ainsi de douze millimètres la bulle d'un niveau; chaque millimètre de l'échelle correspondait à un angle de quatre secondes."

„Cette observation est bien simple, et cependant je ne crois pas qu'on en ait jamais tiré aucune conséquence. Ne voit-on pas en effet tous les jours des ingénieurs, chargés de nivellements très précis, opérer avec le niveau cercle, sans même prendre la précaution de soustraire leur instrument à l'action directe des rayons du soleil, en sorte que tantôt l'une des extrémités de la bulle, tantôt l'autre est la plus échauffée? Si les erreurs que l'on commet forcément ainsi deviennent trop palpables, on se rejette alors sur les dilatations inégales de la monture de l'instrument, on s'en prend au mécanicien *), tandis que les mêmes irrégularités se seraient manifestées si l'on avait pu se servir d'une simple fiole sans aucune monture."

„Tout le monde connait les écarts inexplicables auxquels sont sujettes les observations de latitude faites à l'aide du cercle répétiteur. On voit, dans la *Base du système métrique* (2e vol., pages 262 et suiv.), des discordances frappantes entre des séries d'observations de latitude faites par Delambre avec des soins scrupu-

*) M. Beaulieu, mécanicien de l'observatoire de Bruxelles, auquel je parlais dernièrement de ce fait, m'a dit que plusieurs ingénieurs s'étaient plaints à lui de ce que ses niveaux se *dérangeaint au soleil.* J'ai montré à M. Beaulieu qu'un excellent niveau de Fortin, attaché au cercle répétiteur de l'observatoire, se dérangeait à la chaleur de sa main. L.

Digitized by Google

leux. Cet habile observateur se demande s'il est possible de les expliquer par des réfractions extraordinaires dues au grand froid qu'il faisait alors.“

„Ces derniers mots suffisent pour me rendre compte des erreurs d'environ dix secondes que Delambre a pu faire sur des distances zénithales conclues à l'aide du niveau. Sans parler d'un feu de bivouac qui, par un temps si rigoureux, brûlait probablement à quelque distance de la station, ni des deux bougies qui servaient à éclairer le réticule et le niveau du cercle répétiteur, la chaleur rayonnée par le corps de l'observateur, dans un temps très froid, peut facilement dévier la bulle de 10″, d'autant plus que la disposition du niveau, pour la détermination des latitudes, est telle que l'un de ses bouts est tourné vers l'observateur, et l'autre dans une direction opposée. Ajoutons enfin que, par un grand froid, la bulle devient plus sensible, et que l'allongement considérable qu'elle prend permet aisément qu'une de ses extrémités s'échauffe plus que l'autre.“

„Il faut donc éviter de faire de pareilles observations dans un lieu fermé, à travers une ouverture étroite; car il s'établit alors un courant d'air qui, venant frapper l'une des extrémités de la bulle du niveau, la déplace nécessairement.“

„Pour bien m'assurer de l'effet que les variations de la température peuvent avoir sur un niveau exposé à l'air, j'ai opéré de la manière suivante. Sur une forte pierre de taille servant d'appui extérieur à une fenêtre de premier étage, j'ai placé deux niveux à bulle d'air. Les deux instrumens étaient situés sur le prolongement l'un de l'autre, et separés par un intervalle de vingt centimètres environ. L'extrémité de chacun d'eux était distante de 22 cent. du montant le plus voisin. Ils étaient exposés vers le sud, mais la direction de leur axe faisait avec la méridienne un angle de 40° comptés du nord en passant par l'ouest. Le niveau n° 1 a une longueur de 22 centimètres et un diamètre intérieur de 19^{mm}, 4; la plus petite longueur de sa bulle a été de 22^{mm}, 5 par une température de 36° environ; sa plus grande longueur de 74^{mm} par 12°,3. On voit qu'il renferme très peu d'air et que la majeure partie de sa bulle est formée de vapeur d'alcool. Le niveau n° 2 a la même longueur que le précédent, mais son diamètre n'est que de 14^{mm}, 7. Sa bulle varie de 17^{mm}, 5 à 50^{mm} aux températures respectives de 36° et 12°, 3. Les fioles en verre n'étaient garnies d'aucune armature ni support: je m'affranchissais par-là de toute cause d'erreur due aux dilatations inégales du métal par la chaleur, ou du bois par l'humidité. Elles etaient posées sur la pierre formant l'appui de la fenêtre, mais, pour les fixer, j'avais placé au-dessous de leurs extrémités deux petites couches de cire, épaisses d'un demi-millimètre environ, adhérentes à la fois à la pierre et aux fioles.“

„Pour éviter qu'on atribue les oscillations de la bulle à un mouvement périodique de la pierre de support ou du bâtiment, causé par la chaleur du soleil, je ferai remarquer de suite que les deux bulles marchaient en sens inverse, c'est-à-dire qu'elles se rapprochaient pendant le jour et se fuyaient pendant la nuit. Ce fait, que j'avais prévu, est ce qui m'a engagé à opérer avec deux niveaux au lieu d'un seul. En effet, pendant la journée, les rayons solaires réfléchis par la couleur blanche du montant *a* concentraient

Digitized by Google

la chaleur vers le milieu de l'appui horizontal, et attiraient les deux bulles vers ce point milieu. La nuit, au contraire, les deux montants conservaient une température supérieure à celle de l'air ambiant, et attiraient les bulles à leur tour."

„Mes observations ont commencé le 5 septembre et fini le 16: j'ai noté chaque jour, à 15 ou 16 époques différentes, la position du milieu de la bulle de chacun des deux niveaux. En regard de chaque résultat, j'indiquais la température donnée par un thermomètre centigrade placé à l'ombre du montant *b*. J'ai formé ainsi des tableaux où la marche des niveaux est comparée à celle du thermomètre, et je les ai trouvées toutes deux parfaitement concordantes. Enfin, pour permettre de mieux saisir d'un seul coup d'oeil la liaison intime qui existe entre les variations de la température et les déplacements des bulles, j'ai traduit graphiquement les résultats de mes tableaux."

„J'ai cherché vainement à me donner à moi-même une explication complètement satisfaisante du phénomène qui fait l'objet de cette communication: c'est un sujet de recherche très intéressant, et qui, suivi avec soin et discuté avec sagacité, pourrait peut-être jeter un jour nouveau sur la théorie des ondes calorifiques."

„Je me suis donc borné, après avoir bien constaté le fait, à tâcher de remédier à un défaut qui enlève une grande partie de ses avantages à un instrument précieux. Le moyen que je vais proposer me semble résoudre le problème aussi complètement que possible."

„Un niveau à bulle d'air est enveloppé d'une seconde fiole, d'un diamètre double de la première. Les deux cylindres se touchent tout le long de la génératrice inférieure, en sorte que la génératrice supérieure du véritable niveau se confond avec l'axe de la fiole enveloppante. Celle-ci est remplie *entièrement* d'eau colorée en bleu: la teinte que l'on donne à l'eau doit être aussi foncée que possible, mais permettre cependant de faire la lecture des divisions tracées sur le niveau intérieur. Enfin, l'une des extrémités du tube enveloppant est fermée à l'aide d'un bouchon en caoutchouc, qui, par son élasticité, suit le liquide coloré dans ses contractions et dilatations, et empêche que la grande fiole éclate en été, ou qu'il s'y forme un vide en hiver. Par ce moyen, la bulle se trouve entourée de tous les côtés d'une égale quantité de liquide, au milieu duquel elle peut être considérée comme nageant, et elle est soustraite, dans toute sa longueur, aux brusques inégalités de température, par la conductibilité du liquide ambiant: la couleur bleue donnée à l'eau sert à absorber davantage le calorique rayonnant."

„Pour m'assurer de l'efficacité du moyen que je viens d'indiquer, j'ai commencé par exposer un niveau ordinaire à la chaleur artificielle provenant d'une lampe à mèche cylindrique. Un écran, percé d'un trou circulaire, et interposé entre la lampe et le niveau, permettait de diriger la chaleur sur l'une des extrémités de la bulle. Je l'ai déplacée ainsi de 11 divisions en deux minutes."

„J'ai ensuite enfermé le niveau dans une enveloppe semblable à celle que je viens de décrire, mais sans y introduire de liquide: l'effet de la chaleur a été plus énergique que dans le premier cas; la bulle s'est déplacée de 14 divisions en deux mi-

Digitized by Google

nutes. En effet, l'enveloppe cylindrique faisait fonction de lentille.“

„En troisième lieu, j'ai rempli d'eau claire la grande fiole, et j'ai replacé tout le système dans les mêmes conditions que précédemment, c'est-à-dire que la même distance existait entre l'axe de la mèche et celui de la bulle. Un thermomètre placé près du niveau, mais soustrait par l'écran à l'action de la lampe, et un autre, exposé directement à cette action, indiquaient dans les deux cas les mêmes différences de température. Après quatre minutes, la bulle ne s'était déplacée que d'une division et un quart.“

„Enfin j'ai coloré le liquide en bleu à l'aide du sulfate de cuivre ammoniacal, et j'ai dirigé pendant cinq minutes la chaleur de la lampe sur la même extrémité de la bulle. Au bout de ce temps, j'ai pu voir, en m'aidant de la loupe, que la bulle avait marché de huit dixièmes de division au plus. Ainsi, l'effet produit par la chaleur n'est plus, dans ce cas, que les trois centièmes de ce qu'il était sur le niveau ordinaire.“

„Je crois donc devoir conseiller d'adapter la modification que je viens d'indiquer aux niveaux destinés à des mesures de précision: si elle rend l'instrument un peu plus lourd, elle a l'avantage de le rendre moins fragile; lorsqu'il lui arrivera un accident, presque toujours la fiole sera préservée, ce sera l'enveloppe qui se brisera, et celle-ci est bien facilement remplacée, car elle n'a pas besoin d'avoir une forme cylindrique parfaite.“

„Je terminerai en recommandant à ceux qui se servent du niveau comme instrument de précision, non-seulement d'éviter qu'une des extrémités de sa bulle soit soumise à une température supérieure à celle de l'autre, mais encore de ne pas l'employer lorsqu'il vient d'être transporté d'un lieu chaud dans un lieu froid ou réciproquement. J'ai remarqué en effet que lorsque l'alcool de la fiole subit des dilatations ou des contractions rapides, la bulle parait ne pas se contracter ou se dilater également des deux côtés à partir de son point milieu, en sorte que son centre est réellement déplacé; et ce mouvement de transport de la bulle continue jusq'à ce qu'elle ait acquis une longueur constante. J'attribue ce fait à des courants intérieurs qui s'établissent dans le liquide pendant qu'il s'échauffe ou qu'il se refroidit.‘

Anmerkung. Aehnliche Erscheinungen wie die vorher besprochenen sind übrigens auch schon sonst beobachtet und auch ähnliche Mittel zu ihrer Beseitigung angewandt worden. M. s. z. B. die Abhandlung von C. A. F. Peters über den Ertelschen Vertikalkreis der Pulkovaer Sternwarte in dem Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie J. de St. Petersbourg. Thl. II. 1844. p. 307. G.

XLIX.

Andeutungen zu planimetrischen Aufgaben aus der Curvenlehre.

Von

Herrn J. Katzfey,

Director des Gymnasiums zu Münstereifel.

Bei der Stundenzahl, worauf das Studium der Mathematik an den meisten Gymnasien beschränkt ist und wegen der übrigen Lehrfächer beschränkt bleiben muss, ist es rathsam und bereits vielfach verwirklicht, dass der Inhalt dieses Lehrgegenstandes auf sein Minimum reducirt und davon ausgeschieden bleibe, was immer ohne Nachtheil des Verständnisses und ohne Verkümmerung der Allgemeinbildung ausfallen kann. Hiernach ist auch die Lehre von den Kegelschnitten der Hochschule zu überlassen, ungeachtet des Bedürfnisses verschiedener Sätze dieser Lehre zur Behandlung der Physik. Lassen sich nun diese Sätze mit den interessantesten Eigenschaften dieser Curven auf rein planimetrischem Wege und leicht fasslich den Schülern mittheilen; so ist hiermit für die Wissenschaft viel gewonnen. Dass und wie dieses geschehen könne, habe ich in den Abhandlungen zu unsern Herbstprogrammen der Jahre 1826, 1833 und 1840, so wie in meinem Lehrbuche der Mathematik gezeigt. Einen andern Weg hierzu bieten die nachstehenden Andeutungen, nach welchen die Primaner in ihren häuslichen Aufgaben zur Kenntuiss der Elemente der Curvenlehre gebracht und die Fleissigern zu einer angenehmen Selbstbeschäftigung angezogen werden können.

Genesis und Form der Curven zweiter Ordnung.

§. 1. Aufg. Man soll beliebig viele Punkte einer Linie bestimmen, welche einzeln von einem Punkte und einer Kreislinie oder einer geraden Linie in Einer Ebene gleiche Abstände haben.

Zur Auflösung. 1ster Fall. Der gegebene Punkt ist in der Kreis- oder geraden Linie. Die verlangten Punkte liegen in der geraden Linie, welche die gegebene Linie unter gleichen Winkeln schneidet. (Die Axenlinie).

2ter Fall. Der gegebene Punkt ist Mittelpunkt des gegebenen Kreises. Die verlangten Punkte liegen in einem concentrischen Kreise.

Bemerk. Von hier ab werde die gegebene gerade Linie als Kreislinie von unendlichem Durchmesser betrachtet.

3ter Fall. Der gegebene Punkt liege im Radius oder in der Verlängerung desselben. Sei der Axendurchmesser gh (Taf. V. Fig. 2, 3, 4.) und in dem Radius gc oder in dessen Verlängerung der gegebene Punkt b. Dann erhält man zuerst die Scheitelpunkte a, e mittelst $ga=ab$, $ge=eh$; jeden andern der verlangten Punkte mittelst br, cr, $bz=zr$ und $zn \perp br$.

Mittelst Verlängerung der Richtungslinie br erhält man auf der andern Seite der Axenlinie den Punkt v, wo $bv=sv$ wird.

§. 2. Lehrs. Wenn der feste Punkt b (erster Brennpunkt) im Radius des Bildungskreises (Direktrix) liegt (Taf. V. Fig. 2.); so liegen die fraglichen Punkte in einer Linie, welche in sich zurückläuft und zwischen Kreisen eingeschlossen ist, welche, um den ersten Brennpunkt b und um den Mittelpunkt der Direktrix c (zweiter Brennpunkt) beschrieben, sich in a berühren.

Bew. Es ist

$$bn > bz \text{ (Elem. I. 19.)};$$
$$\underline{bz > ba \ (br > bg);}$$
$$bn > ba.$$

Somit $bn > bl$. (Wo l Schneidepunkt ist).

Ferner ist

$$ac < gc,$$
$$< rc.$$

Sei daher k Schneidepunkt; so ist

$$rk = ga$$
$$= ba;$$

aber

$$\underline{bn > ba}$$
$$\underline{bn > rk}$$
$$rn > \text{\&c.}$$

Erkl. Die Linie, in welcher &c. ist eine Ellipse.

§. 3. Lehrs. Wenn der erste Brennpunkt auf der Verlängerung des Durchmessers des Bildungskreises liegt, (Taf. V. Fig. 2.); so liegen die fraglichen Punkte in zwei Linien, welche in einer Winkelebene unendlich fortgehend sich den Schenkeln des Winkels (Asymptoten) allmälig nähern, ohne dieselben je zu erreichen.

Bew. Seien a, e (Taf. V. Fig. 5.) die Scheitelpunkte, b, c die Brennpunkte, bd, bt Tangenten der Direktrix; so halbire ae (die Hauptaxe) in o (der Curvenmittelpunkt) und ziehe

Digitized by Google

von o aus Lothe zu den Tangenten, die nach beiden Richtungen unendlich fortgesetzt werden können; seien $fk \perp bd$ in i und $pq \perp bt$. Dann lässt sich zeigen, dass die fraglichen Linien, durch a, e gehend, innerhalb der Winkel foq, pok unendlich fortgeführt werden können, ohne die Schenkel, denen sie sich allmälig nähern, je zu erreichen.

Zu diesem Zwecke nehme man auf der fk einen beliebigen Punkt s an, ziehe sc, welche die Direktrix in r schneide, bs, br, ds.

Nun ist

$$bs = ds \text{ (Elem. I. 4.)};$$

aber

$$\frac{ds > rs \text{ (Elem. III 8.)}}{bs > rs.}$$

Also liegt der dem Radius rc entsprechende Curvenpunkt in der Ebene des Winkels foq. Sei nun dieser Punkt n und bn gezogen, so ist $bn = rn$ (§. 1.) und wenn $nz \perp br$, so ist $bz = zr$; somit $bz < bi$. Darum wird die bi von der nz geschnitten, und zwar unter schiefen Winkeln, so dass zn, is, über n, s verlängert, convergiren.

Wird nun zwischen rc, dc ein Radius cw gezogen, dessen Verlängerung der zn vor dem Begegnen derselben mit if begegne, geschehe im Punkte v; so ist erweislich, dass $bv < cw$ ist, also der bezügliche Curvenpunkt zwischen zv und if liegt, somit der if näher ist als Punkt n.

Ebenso verhält sich's in Bezug auf die oq und ähnlich in Bezug auf die po und ok.

Da nun beim Fortrücken des Punktes s auf der unbegrenzten fk die Bestimmung des Punktes n möglich bleibt (weil cd parallel fk); so kann die fragliche Linie unendlich fortgesetzt werden.

Erkl. Die Linie, in welcher &c. ist eine Hyperbel.

§. 4. Lehrs. Wenn die Direktrix eine gerade Linie ist; so liegen die fraglichen Punkte in einer Linie, welche vom Scheitelpunkte aus zu beiden Seiten der Axenlinie in stetiger Abweichung von dieser und der Direktrix unendlich fortgesetzt werden kann.

Zum Beweise genügt das $\Delta\ brn$. (Taf. V. Fig. 4.)

§. 5. Lehrs. Wenn zwei Kreise excentrisch in einander beschrieben sind, ohne sich zu berühren; so lassen sich zwei Ellipsen angeben, deren sämmtliche Punkte einzeln von beiden Kreisen gleiche Abstände haben.

Bew. Seien b, c (Taf. V. Fig. 6.) die Mittelpunkte der Kreise, welche die Axenlinie in i, k, f und g schneiden; so ziehe man einen beliebigen Radius cs und verlängere denselben um $ls = ib$. Beschreibe nun mit cl um c einen Kreis und in Bezug auf denselben die Ellipse, deren erster Brennpunkt b ist.

Sei nun n ein Punkt dieser Ellipse, so ziehe bn, welche die Kreislinie in r schneide.

Dann ist

$$bn = nl \text{ (Constr. g. §. 1.)}.$$

$$\frac{br = ls \text{ (Ann.)}}{rn = ns \ \&c.}$$

Zieht man nun die rs, welche verlängert die Punkte x, u, z giebt; dann cz, bu, welche über u verlängert die cz in v trifft; so ist wegen $\triangle scz \backsim snr \backsim bru \backsim urz$ auch v ein Ellipsenpunkt und $uv = rz$.

Aus demselben Grunde ist bu parallel cs und $bu : cs = bx : cx$ &c.

Nun begegne bu verlängert dem Kreise um b in u'. Dann ziehe su', welche verlängert die Punkte x', r', z', gebe, und ferner ziehe $z'c$, $r'b$, welche verlängert der cs in n' begegne.

Hiernach ist

$$r'b : bu' = z'c : cs \text{ (Radien,}$$

und

$$\text{Winkel } r'u'b = z'sc \text{ (Corresp.);}$$

daher

$$\triangle r'bu' \backsim z'cs$$

und

$$r'b \text{ parallel } z'c;$$

somit

$$\triangle r'n's \backsim z'cs.$$

Folglich $r'n' = n's$; also n' von beiden Kreisen gleich weit abstehend.

Wird nun noch mit einem Radius $= cs - r'b$ um b ein Kreis beschrieben, der die cs in l' schneidet; so ist

$$r'b = l's.$$

Folglich

$$r'n' - r'b = n's - l's$$

oder

$$bn' = n'l.$$

Also n' ein Ellipsenpunkt für die Brennpunkte b, c bezüglich auf den eben beschriebenen Kreis.

Andererseit der Axenlinie erhält man die Punkte v, v'.

Zus. Wenn die Kreise sich berühren; so geht die zweite Ellipse in die Hauptaxe über.

§. 6. Lehrs. Wenn zwei ungleiche Kreise in einer Ebene beschrieben sind, ohne sich zu berühren; so lassen sich zwei Hyperbeln angeben, &c. Alles nach Analogie des vor. Paragraphen.

Zus. 1. Wenn die Kreise sich berühren &c.

Zus. 2. Werden die Kreise einander gleich genommen &c.

§. 7. Lehrs. Wenn zwei ungleiche Kreise in einer Ebene sich schneiden; so lässt sich eine Ellipse und eine Hyperbel angeben, &c.

Zus. Wenn die Kreise einander gleich genommen werden; so &c.

Digitized by Google

§. 8. Lehrs. Wenn in einer Ebene ein Kreis und eine gerade Linie ausserhalb oder berührend gegeben sind; so lässt sich eine Parabel angeben, &c.

Zus. Wenn die gerade Linie Kreissekante wird; so erhält man zwei Parabeln, die dem Satze entsprechen.

L.

Ueber die Potenzen mit imaginären Exponenten.

Von

Herrn L. Ballauff,

Lehrer an der Bürgerschule zu Varel.

In einem frühern Aufsatze*) suchte ich die verschiedenen Grundbegriffe der allgemeinen Arithmetik auf eine, von der gewöhnlichen abweichende Weise darzustellen, liess aber damals die Potenzen mit imaginären Exponenten unberücksichtigt. Eine möglichst elementare Herleitung des Begriffs dieser Potenzen soll den Gegenstand der folgenden Abhandlung ausmachen.

Es sei a eine absolute, rationale oder irrationale Zahl, also ein Zeichen, welches eine solche Behandlung der Einheit vorschreibt, welche sich genau oder beliebig angenähert auf eine Theilung und Vervielfältigung derselben zurückführen lässt; die Bedeutung des Zeichens a^x ist dann in der erwähnten Abhandlung für den Fall erklärt, dass x eine positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl ist. Die dort gegebene Definition erstreckt sich aber nicht auf den Fall, dass x eine imaginäre Zahl (von der Form $\varphi.\sqrt{-1}$) ist; dieselbe bedarf also für diesen Fall noch einer Erweiterung.

Dieser Erweiterung stellt sich aber eine eigenthümliche Schwierigkeit in den Weg. In a^x ist nämlich x kein Zeichen, welches unmittelbar eine Behandlung der Einheit vorschreibt, wie z. B. in $a+x$: sondern ein Zeichen, welches angiebt, auf welche Weise

*) Thl. V. Nr. XIX. S. 259.

die Einheit nach der Vorschrift von a behandelt werden soll. So schreibt das Zeichen 3 in a^3 nicht vor, dass die Einheit 3mal genommen werden soll, sondern dass die durch a angezeigte Behandlung dreimal wiederholt werden soll. Man sieht, dass sich diese Erklärung unmittelbar gar nicht auf den Fall ausdehnen lässt, dass der Exponent eine imaginäre Zahl ist. Es entsteht daher die Aufgabe, den Ausdruck a^x in einen andern umzuformen, in welchem x unmittelbar eine Behandlung der Einheit vorschreibt: dann kann die Erweiterung der Definition keiner Schwierigkeit mehr unterliegen. Diese Aufgabe ist durch den bekannten Satz: $a^x = \lim\limits_{\alpha=0} .(1+\alpha \log a . x)^{\frac{1}{\alpha}}$ gelöst, in welchem Ausdrucke $\log a$ den natürlichen Logarithmus von a bezeichnet. Von diesem Satze soll hier zuerst eine einfache, und wie mir scheint, recht instruktive Herleitung gegeben werden.

Es sei zuerst $a>1$ und δ eine positive Zahl. Dann ist $a^\delta>1$, also $a^\delta=1+\Delta$, wo Δ eine positive Zahl bezeichnet. Da Δ mit δ zugleich 0 wird, so kann man $\Delta=b.\delta$ setzen, wo b noch von δ abhängt und erhält dann:

$$a^\delta=1+b.\delta \ldots\ldots (1)$$

Es soll nun untersucht werden, was aus b wird, wenn δ unendlich klein wird. Aus (1) folgt:

$$b=\frac{a^\delta-1}{\delta} \ldots\ldots (2)$$

und es fragt sich, ob sich dieser Ausdruck für $\delta=0$ einer bestimmten Gränze nähert.

Man setze zuerst $\delta=\frac{1}{n}$, wo n eine unendlichgrosswerdende ganze Zahl bezeichnet und $\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=u_n$. Dann ist

$$a^{\frac{1}{n}}=1+\frac{u_n}{n},$$

$$a=(1+\frac{u_n}{n})^n=1+u_n+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}).u_n^2+\frac{1}{2.3}(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n})u_n^3+\ldots$$

Man sieht, dass in dem Ausdrucke zur rechten Hand alle Glieder positiv sind und dass die Anzahl derselben, so wie die Koeffizienten der einzelnen Glieder um so grösser werden, je grösser n wird. Da aber die Summe aller Glieder immer $=a$ ist, so muss u_n mit wachsendem n immer kleiner werden. Die Glieder der unendlichen Reihe:

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots u_n, \text{ in inf.}$$

sind alle positiv und jedes Glied ist kleiner als das vorherge-

bende; diese Reihe muss daher eine positive Gränze m besitzen, so dass

$$m=\overset{n=\infty}{\lim}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

ist.

m ist aber zugleich der Werth von $\overset{\delta=0}{\lim}\frac{a^{\delta}-1}{\delta}$. Um sich hiervon zu überzeugen, überlege man, dass $\frac{a^{\delta}-1}{\delta}$ eine Funktion von δ ist, die nur für $\delta=0$, ein Fall der bei unserer Betrachtung nicht vorkommt, eine Unterbrechung der Kontinuität erleiden kann. Für ein unendlich klein werdendes δ kann man nun $\frac{1}{n}$ so wählen, dass der Zahlwerth von $\delta-\frac{1}{n}$ kleiner ist als jede angebbare absolute Zahl. Dann kann aber, der Erklärung der Kontinuität gemäss, $\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{a^{\delta}-1}{\delta}$ dem Zahlwerthe nach kleiner als jede noch so kleine absolute Zahl werden, und man hat

$$\lim\left\{\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{a^{\delta}-1}{\delta}\right\}=0;$$

oder

$$\overset{\delta=0}{\lim}\frac{a^{\delta}-1}{\delta}=\overset{n=\infty}{\lim}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=m.$$

Es ist daher, für $a>0$ und ein unendlich kleines, positives δ:

$$a^{\delta}=1+m.\delta,\text{ wo } m=\overset{\delta=0}{\lim}\frac{a^{\delta}-1}{\delta}$$

und eine bestimmte Zahl ist. Dieser Satz gilt aber auch für ein negatives δ und $a<1$. Denn ist δ negativ und $=-\delta'$, so hat man

$$a^{\delta}=a^{-\delta'}=\frac{1}{1+m\delta'}=1-m\delta'=1+m.\delta;$$

und ist $a<1$, so ist

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\delta}=1+\delta\overset{\nu=0}{\lim}\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{\nu}-1}{\nu}=1+\delta\overset{\nu=0}{\lim}\frac{1-a^{\nu}}{\nu.a^{\nu}}$$

$$=1+\delta.\overset{\nu=0}{\lim}\frac{1-a^{\nu}}{\nu}:\overset{\nu=0}{\lim}a^{\nu}=1+\delta.\overset{\nu=0}{\lim}\frac{1-a^{\nu}}{\nu}=1-m.\delta;$$

Digitized by Google

daher

$$a^{\delta}=\frac{1}{1-m\delta}=1+m\delta.$$

Es ist daher streng allgemein für jedes absolute a und jedes unendlich kleine, reelle δ:

$$a^{\delta}=1+m.\delta \ldots\ldots (4)$$

wo m eine bestimmte Zahl und

$$=\overset{\delta=0}{\lim}\frac{a^{\delta}-1}{\delta}$$

ist.

Ist x eine beliebige reelle Zahl und n eine unendlich grosse, ganze Zahl, so ist nach (4)

$$a^{\frac{x}{n}}=1+m.\frac{x}{n},$$

daher:

$$a^{x}=\overset{n=\infty}{\lim}\left(1+m\frac{x}{n}\right)^{n} \ldots\ldots (5)$$

Ist $\overset{\delta=0}{\lim}\frac{e^{\delta}-1}{\delta}=1$, so nennt man bekanntlich e die Basis der natürlichen Logarithmen. Es ist dann

$$e^{x}=\overset{n=\infty}{\lim}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n},\ e=\overset{n=\infty}{\lim}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\ ^{*})$$

Da

$$a^{x}=e^{x\log a}=\overset{n=\infty}{\lim}\left(1+\frac{x.\log a}{n}\right)^{n} \ldots\ldots (6)$$

so folgt aus der Vergleichung mit (5)

$$m=\log a.$$

In (6) ist nun a^x auf eine solche Weise umgeformt, dass in dem Werthe von a^x x unmittelbar eine Behandlung der Einheit vorschreibt. Die Gleichung (6) giebt dann unmittelbar folgende Erweiterung der Definition der Potenz:

---

*) Der Beweis, dass $(1+\frac{1}{n})^n$ für n unendlich werdend sich einer bestimmten Gränze nähert, ist schon früher im Archive Thl. I. Nr. XXVIII. S. 204. Thl. III. Nr. XXXVI. S. 327. gegeben. Ich halte es daher für überflüssig ihn hier zu wiederholen.

Digitized by Google

Es sei a eine beliebige absolute Zahl, x eine beliebige reelle oder imaginäre Zahl ($\varphi.\sqrt{-1}$), so bezeichnet man

$$\overset{n=\infty}{\lim}\left(1+\frac{x.\log a}{n}\right)^n \text{ mit } a^x.$$

Es muss nun noch gezeigt werden, wie die durch $a^{\varphi\sqrt{-1}}$ vorgeschriebene Behandlnng der Einheit an einer Grösse wirklich ausgeführt wird. Es sei X ein Strahl, der von dem Anfangspunkte der Koordinaten aus nach der Richtung der ersten positiven Halbacbse gezogen ist. Den durch $X.(1+\frac{\varphi.i.\log a}{n})$ dargestellten Strahl erhält man, wenn man in dem Endpunkte von X nach der einen oder anderen Seite hin, je nachdem φ positiv oder negativ ist, eine Senkrechte errichtet, dieselbe $=\frac{\varphi.\log a}{n}$ macbt, und den Endpunkt dieser Senkrechten mit dem Anfangspunkte der Koordinaten verbindet. Ist n unendlich gross, so erhält man einen Strahl, welcher der Länge nach $=X$ ist und mit demselben den beschriebenen Winkel $\frac{\varphi.\log a}{n}$ bildet. $X.a^{\varphi.i}=X.\overset{n=\infty}{\lim}\left(1+\frac{\varphi.i\log a}{n}\right)^n$ erhält man, wenn man dieses Verfahren $n$mal wiederholt. Obiger Ausdruck ist daher ein Strahl, welcher mit X gleiche Länge hat und mit demselben den beschriebenen Winkel $\varphi\log a$ bildet.

$a^{\varphi\sqrt{-1}}$ ist also ein Behandlungszeichen, welches vorschreibt, dass ein Strahl um den beschriebenen Winkel $\varphi.\log a$ gedreht werden soll. $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ schreibt daher eine Drehung um den bescbriebenen Winkel φ vor. $e^{\sqrt{-1}}$ ist also gleich demjenigen Behandlungszeichen, welches ich in meinem frühern Aufsatze mit ε bezeichnet habe.

Hieraus ergiebt sich auch unmittelbar, dass $X.e^{\varphi\sqrt{-1}}$ $=X.\cos\varphi+X.\sin\varphi.\sqrt{-1}$, also $e^{\varphi\sqrt{-1}}=\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}$ ist. Da sich nun auf bekannte Weise $\overset{n=\infty}{\lim}\left(1+\frac{\varphi.i}{n}\right)^n=e^{\varphi.i}$ in eine unendliche Reihe entwickeln lässt, so erhält man durch Gleichsetzung der reellen nnd imaginären Theile mit Leichtigkeit die bekannten Reihen für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$.

Die Definition der Potenz lässt sich nun auch auf den Fall erweitern, dass man für den Exponenten ein beliebiges Behandlungszeichen, wie $\frac{d}{dx}$ etc. setzt. Ist Δ ein solches, so hat man:

$$e^{\Delta}=\overset{\Delta=\infty}{\lim}\left(1+\frac{\Delta}{n}\right)^n,$$

wo es dann freilich noch zweifelhaft bleibt, ob dieses Zeichen eine bestimmte Bedeutung hat oder nicht. Für diese Potenzen lassen sich dann mit Leichtigkeit diejenigen Sätze beweisen, die für gewöhnliche Potenzen gelten. So ist z. B.

$$e^{\Delta}=\lim^{n=\infty}(1+\frac{\Delta}{n})^n,$$

$$e^{\Delta'}=\lim^{n=\infty}(1+\frac{\Delta'}{n})^n;$$

daher:

$$e^{\Delta}.e^{\Delta'}=\lim^{n=\infty}(1+\frac{\Delta}{n})^n\times\lim^{n=\infty}(1+\frac{\Delta'}{n})^n$$

$$=\lim^{n=\infty}\left\{(1+\frac{\Delta}{n})^n.(1+\frac{\Delta'}{n})^n\right\}$$

$$=\lim^{n=\infty}\left\{(1+\frac{\Delta+\Delta'}{n}+\frac{1}{n^2}\Delta.\Delta'\right\}^n$$

$$=\lim^{n=\infty}(1+\frac{\Delta+\Delta'}{n})^n=e^{\Delta+\Delta'};$$

voransgesetzt dass nicht $\Delta.\Delta'$ eine solche Behandlnng der Einheit anzeigt, durch deren Ausführung eine unendlich grosse Grösse entsteht.

Die Erklärung solcher Potenzen, wie $a^{u+v\sqrt{-1}}$, $(a+b\sqrt{-1})^{u+v\sqrt{-1}}$, ist theils schon in dem Frühern enthalten oder muss auf die gewöhnliche Weise gegeben werden.

Die Konstruktion der imaginären Zahlen ist hekanntlich zuerst von Gauss gegeben worden. So viel ich weiss, ist von Gauss selbst Nichts darüber im Druck erschienen *). Ich kenne diese Untersuchungen nur durch eine kurze briefliche Mittheilung eines Freundes (des Herrn Dr. Wittstein) und durch die Abhandlung des verstorbenen Majors Müller im Archive (Thl. I. S. 397). Die Idee, die Zeichen $\frac{d}{dx}$, Δ_x u. s. w. wie Zahlen zu behandeln, ist von dem verstorbenen Doctor Eichhorn in seinen Principien einer allgemeinen Funktionenrechnung (Hannover 1834) vielleicht znerst ausgesprochen. Cauchy hat von dieser Idee bekanntlich glänzende Anwendungen auf die Theorie des Lichts gemacht, nennt aber diese Rechnnngen symbolische. Ich glaube, dass dieselben nicht mehr oder weniger symbolisch sind, als die Rechnungen mit unbenannten Zahlen überhaupt.

*) Die Abhandlung Thl. VI. Nr. XXXV. und deren Anhang konnte Herr Ballauff bei Abfassung des vorliegenden Aufsatzes noch nicht kennen.
G.

LI.
Ueber das ballistische Problem *).

Von dem
Herrn Doctor Dippe,
Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

In dem Programm des Gymnasium Fridericianum in Schwerin vom Jahre 1843 habe ich eine Lösung des ballistischen Problems auf die Annahme gestützt, dass der Widerstand der Luft der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportinal sei. Ich bin weit davon entfernt, diese Annahme für richtiger oder für weniger falsch zu halten, als die gewöhnliche Voraussetzung; allein ich glaube doch, dass diese Untersuchung nicht ohne einiges theoretische Interesse ist, indem theils das Gesetz jenes Widerstandes noch gar nicht mit hinlänglicher Sicherheit bekannt ist, theils die von mir zum Grunde gelegte Annahme die einzige ist, bei welcher man zu einer vollständigen Lösung des Problems gelangen kann. Selbst die Praxis scheint bei dieser Auflösung nicht ganz leer auszugehen, wenn man nur von den aufgestellten Formeln nicht mehr verlangt, als sie bei der Unwahrscheinlichkeit, dass die ihnen zu Grunde liegende Annahme richtig sei, leisten können.

Der Umstand, dass von unsern Programmen nur wenige Exemplare die Gränzen Mecklenburgs überschreiten, wird mir zur Entschuldigung dienen, dass ich das Wesentlichste aus jener Abhandlung hier mittheile.

§. 1.

Der bewegte Körper sei eine Kugel, und die beschleunigende Kraft des Widerstandes sei

$$\frac{gv}{k},$$

*) Ich halte es für meine Schuldigkeit, zu bemerken, dass der Abdruck dieses schon seit längerer Zeit in meinen Händen befindlichen Aufsatzes durch unvorhergesehene Hindernisse bis jetzt verzögert worden ist, glaube aber, dass derselbe auch nun nicht zu spät kommt, wenn auch der Gegenstand selbst nicht ganz neu ist. G.

wo k eine durch die Erfahrung zu bestimmende constante Geschwindigkeit ist, deren Werth von der Grösse und Dichtigkeit der Kugel, sowie von der Dichtigkeit und besondern Beschaffenheit des widerstehenden Mittels abhängt, während g die beschleunigende Kraft der Schwere in dem widerstehenden Mittel bedeutet, v aber die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist. Wenn G die beschleunigende Kraft der Schwere im leeren Raum ist, δ aber die Dichtigkeit des Mittels, d die Dichtigkeit der Kugel bedeutet, so hat man

$$g = G\,(1 - \frac{\delta}{d}).$$

Es wird g negativ, wenn $\delta > d$ ist; und in diesem Falle erhält auch k einen negativen Werth, damit der Quotient $\frac{g}{k}$ positiv bleibe. Da ferner der Widerstand um so geringer wird, je kleiner $\frac{\delta}{d}$ ist, so muss der Werth von k in der Weise von $\frac{\delta}{d}$ abhängen, dass k unendlich gross wird, wenn $\frac{\delta}{d}$ verschwindet, also wenn die Bewegung im leeren Raume erfolgt.

Um die Lösung des Problems zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die widerstehende Flüssigkeit keine eigenthümliche Bewegung habe, dass ihre Dichtigkeit in der ganzen Ausdehnung der Kugelbahn constant, und die Richtung der Schwere mit dem durch einen Punkt A der Kugelbahn gezogenen Erdradius parallel sei. Die Bahn des Kugelmittelpunktes liegt alsdann in einer durch AB gelegten vertikalen Ebene, wenn AB die Richtung angiebt, welche die Kugel im Punkte A hat. In dieser Ebene legt man durch A die Abscissenachse AX horizontal und die Ordinatenachse AY darauf senkrecht, so dass die Ordinaten in der Richtung nach oben positiv genommen werden. Nach Verlauf der Zeit t sei die Kugel mit der Geschwindigkeit v in einem Punkte C angelangt, dessen Coordinaten x und y sind; der zwischen A und C liegende Theil ihrer Bahn sei s, und in C bilde die Richtung ihrer Bewegung mit AX den Winkel φ: dann sind nach bekannten Gesetzen der Mechanik

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gv}{k}\cos\varphi,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gv}{k}\sin\varphi - g$$

die Differentialgleichungen, aus denen die Gesetze der Bewegung hergeleitet werden. Nun ist bekanntlich $v = \frac{ds}{dt}$, $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$; folglich hat man die Integration der Gleichungen

$$1)\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{k}\cdot\frac{dx}{dt},\quad 2)\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{k}\cdot\frac{dy}{dt} - g$$

zu bewerkstelligen, und, wenn im Punkte A die Geschwindigkeit $= a$ ist, und mit AX den Winkel $BAX = \alpha$ bildet, die Con-

stanten so zu bestimmen, dass gleichzeitig $t=0$, $x=0$, $y=0$, $s=0$, $v=\frac{ds}{dt}=a$, $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$, $\frac{dy}{ds}=\sin\alpha$, mithin die horizontale Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}=a\cos\alpha$, die vertikale Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}=a\sin\alpha$ werde.

Man findet durch Integration der Gleichungen 1) und 2)

$$3)\quad \frac{dx}{dt}=a\cos\alpha-\frac{gx}{k},$$

$$4)\quad \frac{dy}{dt}=a\sin\alpha-\frac{gy}{k}-gt.$$

Aus der Gleichung 3) erhält man durch eine neue Integration

$$5)\quad t=\frac{k}{g}\log.\text{nat.}\frac{ak\cos\alpha}{ak\cos\alpha-gx},$$

oder

$$6)\quad x=\frac{ak\cos\alpha}{g}\left(1-e^{-\frac{gt}{k}}\right),$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Eben so erhält man aus 4)

$$7)\quad t=\frac{k}{g}\log.\text{nat.}\frac{k+a\sin\alpha}{k+a\sin\alpha-\frac{gy}{k}-gt},$$

$$8)\quad y=k\left\{\frac{k+a\sin\alpha}{g}\left(1-e^{-\frac{gt}{k}}\right)-t\right\}.$$

Durch Combination der Gleichungen 3) und 6) findet man die horizontale Geschwindigkeit:

$$9)\quad \frac{dx}{dt}=a\cos\alpha\, e^{-\frac{gt}{k}},$$

und aus 4) und 8) die vertikale Geschwindigkeit:

$$10)\quad \frac{dy}{dt}=(k+a\sin\alpha)\,e^{-\frac{gt}{k}}-k.$$

Endlich erhält man durch Verbindung der Gleichungen 5) und 7)

$$\frac{ak\cos\alpha}{ak\cos\alpha-gx}=\frac{k+a\sin\alpha}{k+a\sin\alpha-\frac{gy}{k}-gt};$$

und wenn wir aus 5) für t seinen Werth setzen und gehörig reduciren, so ergiebt sich die Gleichung der Kugelbahn:

$$11)\quad y=\frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}x-\frac{k^2}{g}\log.\text{nat.}\frac{ak\cos\alpha}{ak\cos\alpha-gx},$$

Digitized by Google

oder noch einfacher:

$$12)\quad y=\frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}\,x+\frac{k^2}{g}\ \text{log. nat.}\ (1-\frac{gx}{ak\cos\alpha}).$$

Es ist also die Bahn eine ebene Curve, deren Gleichung in der einfachen Gestalt

$$y=px+q\ \text{log. nat.}\ (1-rx)$$

erscheint, wenn man die constanten Factoren der Reihe nach mit p, q, r bezeichnet.

§. 2.

Eine nähere Untersuchung der obigen Formeln lehrt nun Folgendes. Die Gleichung (12) reducirt sich für $k=\infty$, also wenn die Bewegung im leeren Raume erfolgt, auf

$$y=\operatorname{tang}\alpha\,.\,x-\frac{Gx^2}{2a^2\cos^2\alpha},$$

das ist die Gleichung der Parabel, welche eine mit der anfänglichen Geschwindigkeit a unter dem Elevationswinkel α fortgeschleuderte Kugel im leeren Raume beschreiben würde.

Für die vertikale Geschwindigkeit erhält man den Werth

$$\frac{dy}{dt}=a\sin\alpha-g\frac{k+a\sin\alpha}{ak\cos\alpha}\,x,$$

wenn man die Formeln (4), (11), (5) in §. 1. combinirt. Dieser Werth wird Null, wenn

$$1)\quad x_1=\frac{a^2\sin 2\alpha}{2g\,(1+\frac{a\sin\alpha}{k})}$$

ist, und dieser Werth verwandelt sich, wenn $k=\infty$, $g=G$ wird, d. h. wenn der Körper sich im leeren Raume bewegt, in die bekannte Formel

$$x=\frac{a^2\sin 2\alpha}{2G}.$$

Die Ordinate des höchsten Punktes der Kugelbahn findet man, wenn man den Werth (1) in die Gleichung (12) des §. 1. substituirt, nämlich

$$2)\quad y_1=\frac{k^2}{g}\left(\frac{a\sin\alpha}{k}-\text{log. nat.}\ (1+\frac{a\sin\alpha}{k})\right).$$

Dieser Werth geht für $k=\infty$ über in

$$y_1=\frac{a^2\sin^2\alpha}{2G}.$$

Die vertikale Geschwindigkeit erhält von diesem Punkte an einen negativen Werth und wird immer grösser, während die Ordinate abnimmt, so dass die Kugel sich der durch A gelegten horizontalen Ebene wiederum nähert. Sie erreicht dieselbe, wenn $y=0$ wird; die Abscisse dieses Punktes oder die Wurfweite muss durch Auflösung der transscendenten Gleichung

$$3)\quad \frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}\,x+\frac{k}{g}\text{ log. nat. }\left(1-\frac{gx}{ak\cos\alpha}\right)=0$$

gefunden werden.

Nun hat aber die Auflösung einer transscendenten Gleichung von der Form

$$px+q\text{ log. nat. }(1-rx)=0$$

keine bedeutenden Schwierigkeiten; es ist also die Wurfweite als bekannt anzusehen für jeden Elevationswinkel α und für jede Anfangsgeschwindigkeit a, sobald der Coefficient k bekannt ist. Dieser Coefficient kann aber gefunden werden, wenn man bei unveränderter Anfangsgeschwindigkeit unter verschiedenen Elevationswinkeln die Wurfweiten beobachtet hat.

Ferner lehrt die Gleichung (3) in §. 1., dass die horizontale Geschwindigkeit abnimmt und für die Abscisse

$$x_2=\frac{ak\cos\alpha}{g}$$

verschwindet. Setzen wir $x>x_2$, so finden wir nach (5) in §. 1. für t einen imaginären Werth, während $t=\infty$ wird für $x=x_2$; zugleich erkennen wir aus Gleichung (6), dass mit wachsendem t die Abscisse x sich dem Werthe x_2 in der Weise nähert, dass der Unterschied

$$x_2-x=\frac{ak\cos\alpha}{ge^{\frac{gt}{k}}}$$

kleiner wird, als jede beliebig kleine Grösse, indem $e^{\frac{gt}{k}}$ unendlich gross wird.

Folglich ist die mit der Ordinatenachse parallele gerade Linie

$$x=\frac{ak\cos\alpha}{g}$$

eine Asymptote für den auf der positiven Seite der Abscissen abwärts gehenden Zweig der Curve. Die Bewegung nähert sich also immer mehr einer geradlinigen vertikalen Bewegung; und da der Ausdruck der vertikalen Geschwindigkeit (Gl. (10) in §. 1.) sich dem Werthe $-k$ unbegränzt nähert, wenn man t zur Gränze ∞ wachsen lässt: so wird die Bewegung immer mehr gleichförmig. Von dem Augenblicke an, wo $\frac{dy}{dt}$

$=0$ war, nimmt die vertikale Geschwindigkeit in der Richtung von oben nach unten fortwährend zu, ohne den Werth $-k$ in endlicher Zeit zu erreichen oder jemals überschreiten zu können. Wir schliessen daraus, dass k die grösste Geschwindigkeit ist, welche die Kugel in dem widerstehenden Mittel erlangen kann, wenn sie ohne anfängliche Geschwindigkeit unter dem Einflusse der Schwere sich senkrecht abwärts bewegt.

Eine weitere Untersuchung der Gleichung unserer ballistischen Curve zeigt uns, dass der auf der negativen Seite der Abscissen liegende Zweig keine Asymptote hat.

Zuvörderst nämlich ist keine vertikale Linie Asymptote, weil y für einen beliebig grossen negativen Werth von x niemals imaginär wird. Verbindet man aber die Gleichung der geraden Linie

$$y=px$$

mit der Gleichung der Curve (vergl. (12) in §. 1.), so erhält man für $x=-\infty$ nach gehöriger Beseitigung der in $0\times\infty$ liegenden Unbestimmtheit

$$p=\frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}.$$

Wenn also der auf der Seite der negativen Abscissen liegende Theil der Curve eine geradlinige Asymptote hat, so muss dieselbe der geraden Linie $y=\frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}x$ parallel sein. Setzen wir aber

$$y=\frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}x+q$$

in die Gleichung der Curve, so finden wir für $x=-\infty$ auch $q=\infty$, d. h. es ist keine Asymptote vorhanden.

§. 3.

Da unsere Annahme sich von dem wahren aber unbekannten Gesetze des Widerstandes noch weiter entfernt, als die gewöhnliche Voraussetzung: so können wir nicht erwarten, dass die gewonnenen Formeln die Resultate der Beobachtung darstellen und uns z. B. die wirklich beobachtete Wurfweite eines Geschützes bei dem Elevationswinkel α geben werden, wenn wir für a die wahre Anfangsgeschwindigkeit der Kugel, für k die wirkliche grösste Geschwindigkeit einsetzen wollten, welche diese Kugel beim Falle in der Luft erreichen kann. Es bleibt also nur übrig, zu untersuchen, ob die gewonnenen Formeln nicht zur angenäherten Berechnung der Wurfweiten für beliebige Elevationswinkel eines Geschützes dienen können, wenn man bei demselben Geschütze mit unveränderter Ladung durch Versuche die Wurfweiten x', x'' und die Flugzeiten t', t'' für die Elevationswinkel α', α'' gefunden hat.

Man kann ausgehen von den Gleichungen

$$x' = \frac{ak\cos\alpha'}{g}(1-e^{-\frac{gt'}{k}}),$$

$$x'' = \frac{ak\cos\alpha''}{g}(1-e^{-\frac{gt''}{k}}),$$

welche nach (6) in §. 1. gebildet sind. Hieraus ergiebt sich die Proportion

$$x':x'' = \cos\alpha'\,(1-e^{-\frac{gt'}{k}}) : \cos\alpha''\,(1-e^{-\frac{gt''}{k}}),$$

und daraus die Gleichung

$$1)\quad e^{-\frac{gt'}{k}} - \frac{x'\cos\alpha''}{x''\cos\alpha'}e^{-\frac{gt''}{k}} + \frac{x'\cos\alpha''}{x''\cos\alpha'} - 1 = 0,$$

in welcher a nicht mehr vorkommt. Es sei $\frac{x'\cos\alpha''}{x''\cos\alpha'} = b$, $e^{-\frac{g}{k}} = z$. Dann hat man, um k zu bestimmen, die Gleichung

$$2)\quad z^{t'} - bz^{t''} + b - 1 = 0$$

aufzulösen. Es wird hierbei immer genügen, für t' und t'' die ihnen zunächst liegenden ganzen Zahlen zu setzen, und dann Fourier's Näherungsmethode anzuwenden. Da $z = e^{-\frac{g}{k}}$ ist, und k nicht unendlich gross angenommen werden kann, so ist z immer ein positiver ächter Bruch.

Nachdem k gefunden ist, erhält man a durch eine der Formeln, von denen wir in diesem Paragraphen ausgegangen sind.

In la Fere hat man 1770 mit einem zwölfzölligen Mörser, dessen Bombe 142 Pfund wog, als Mittel aus je 4 Würfen folgende Werthe erhalten:

$\alpha' = 50°$, $x' = 2982$ Pariser Fuss, $t' = 16$ Secunden,
$\alpha'' = 10°$, $x'' = 1434$ „ „ $t'' = 4$ „

Unsere Gleichung wird für diese Werthe

$$z^{16} - 3{,}186\,z^4 + 2{,}186 = 0,$$

deren Wurzel ich $= 0{,}96013$ finde. Setzt man nun $g = 30{,}196$ Pariser Fuss, so wird

$$k = 742{,}24.$$

Darauf erhält man für α' die Anfangsgeschwindigkeit $a = 394{,}46$ und für α'' eben so $a = 394{,}47$.

Die wahren Anfangsgeschwindigkeiten sind wahrscheinlich viel grösser gewesen; diese sollen aber jetzt gar nicht ermittelt wer-

den. Nun ist nicht zu erwarten, dass die gefundenen Werthe von a und k die Gleichung der Kugelbahn befriedigen werden, wenn man in derselben $y=0$ und $x=\left.\begin{matrix}x'\\x''\end{matrix}\right\}$, $\alpha=\left.\begin{matrix}\alpha'\\\alpha''\end{matrix}\right\}$ setzt. Sie würden das nicht einmal thun, wenn die Theorie richtig wäre, weil sie aus Gleichungen bestimmt sind, in denen sie von der beobachteten Flugzeit abhängig sind. Sollen aber a und k so bestimmt werden, dass sie die Gleichungen

$$\frac{k+a\sin\alpha'}{a\cos\alpha'}x'+\frac{k^2}{g}\log.\text{nat.}\,(1-\frac{gx'}{ak\cos\alpha'})=0,$$
$$\frac{k+a\sin\alpha''}{a\cos\alpha''}x''+\frac{k^2}{g}\log.\text{nat.}\,(1-\frac{gx''}{ak\cos\alpha''})=0$$

befriedigen, von denen wir die erste mit $u'=0$, die zweite mit $u''=0$ bezeichnen wollen: so kann man die vorhin gefundenen Werthe als angenäherte betrachten, und durch Auflösung der Gleichungen

$$u'+\frac{du'}{da}\Delta a+\frac{du'}{dk}\Delta k=0,$$
$$u''+\frac{du''}{da}\Delta a+\frac{du''}{dk}\Delta k=0$$

Δa, Δk bestimmen, so dass $a+\Delta a$, $k+\Delta k$ den wahren Werthen von a und k näher kommen. Man kann auch k als genau ansehen und a so bestimmen, dass $u'^2+u''^2$ möglichst klein werde; ja es wird sogar genügen können, k als genau bestimmt anzusehen, und a so zu bestimmen, dass entweder $u'=0$ oder $u''=0$ wird.

Wenn $u''=0$ werden soll, so wird auch $\frac{g}{k^2}u''=0$; sieht man also $\frac{g}{k^2}u''$ als Function von a an, und bezeichnet man dieselbe durch $f(a)$, so hat man

$$f(a)=\frac{gx''}{ak\cos\alpha''}+\frac{gx''\tang\alpha''}{k^2}+\log.\text{nat.}\,(1-\frac{gx''}{ak\cos\alpha''}),$$

und die Gleichung $f(a)=0$ ist aufzulösen.

Man setze $\frac{gx''}{k\cos\alpha}=p$, $\frac{gx''\tang\alpha''}{k^2}=q$, und bilde zugleich die Differentialquotienten von $f(a)$: dann ist

$$f(a)=\frac{p}{a}+q+\log.\text{nat.}\,(1-\frac{p}{a}),$$
$$f'(a)=\frac{p^2}{a^3\,(1-\frac{p}{a})},$$
$$f''(a)=-\frac{p^2\,(3-\frac{2p}{a})}{a^4\,(1-\frac{p}{a})^2}$$

In dem Ausdrucke von $f(a)$ erhält log nat. $(1-\frac{p}{a})$ einen imaginären Werth, wenn $\frac{p}{a}>1$ gesetzt wird; man weiss also, dass $a>p$ sein muss. Dann behält aber $f''(a)$ für alle Werthe, die man für a setzen darf, immer dasselbe Vorzeichen, kann folglich bei der Auflösung der transscendenten Gleichung $f(a)=0$ als bestimmende Function angesehen werden. Die von Stern in Crelle's Journal Band XXII. mitgetheilte Methode, transscendente Gleichungen aufzulösen, ist bei unserer Gleichung äusserst einfach. Da für $a=p$ die beiden ersten Glieder in $f(a)$ den Werth $1+q$ annehmen, während log. $(1-\frac{p}{a})=-\infty$ wird, so ist für Werthe von a, die nur wenig grösser sind als p, der letzte Theil überwiegend und $f(a)$ negativ; für einen Werth dagegen, welcher grösser ist als die Wurzel a von $f(a)=0$, wird $f(a)$ positiv, während $f'(a)$, $f''(a)$ ihre Vorzeichen nicht ändern. Ist also $p<\alpha<\beta$, und zugleich $\alpha<a<\beta$, so sind die Zeichenreihen

	$f''(a)$	$f'(a)$	$f(a)$
α	$-$	$+$	$-$
β	$-$	$+$	$+$

Die obere Gränze α ist dann wegen der gleichen Vorzeichen von $f(\alpha)$ und $f''(\alpha)$ zugleich die äussere, und man findet die neuen Gränzen α', β' durch die Formeln

$$\alpha'=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},\ \beta'=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\alpha)},$$

und hieraus

$$\alpha''=\alpha'-\frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')},\ \beta''=\beta'-\frac{f(\beta')}{f'(\alpha')}.$$

Hierbei ist immer

$$\alpha<\alpha'<\alpha''\ldots.<a<\ldots.\beta''<\beta'<\beta,$$

so dass man der Wurzel immer näher kommt.

In dem gewählten Beispiele setzen wir $k=742$, während $\alpha''=10^\circ$, $x''=1334$ Fuss ist. Man findet dann sehr schnell

$$f(376{,}25)=-0{,}00001,\ f(376{,}27)=+0{,}00001.$$

Da nun der Werth $a=376{,}27$ die Gleichung $f(a)=0$ auch befriedigt, wenn man α', x' statt α'', x'' substituirt, so ist hinreichend genau, um die beiden Versuche darzustellen:

$$k=742,\ a=376{,}27.$$

§. 4.

Soll nun die Wurfweite x berechnet werden, welche man mit demselben Geschütze und derselben Ladung bei dem Elevationswinkel α erhalten würde, so hat man in der Gleichung (3) in §. 2.

$$\frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}\,x+\frac{k^2}{g}\,\text{log. nat.}\,(1-\frac{gx}{ak\cos\alpha})=0$$

für k und a die eben gefundenen Werthe einzusetzen und dieselbe nach x aufzulösen. Multiplicirt man den Ausdruck mit $\frac{g}{k^2}$, und setzt man

$$\frac{g}{ak\cos\alpha}=m,\ \frac{g\tang\alpha}{k^2}=m',$$

so erhält man

$$(m+m')\,x+\text{log. nat.}\,(1-mx)=0.$$

Nimmt man ferner $z=1-mx$ und bezeichnet man den Werth $1+\frac{m'}{m}$, das ist $1+\frac{a\sin\alpha}{k}$ mit n, so hat man die Gleichung

$$n\,(1-z)+\text{log. nat.}\,z=0$$

aufzulösen, und findet dann die Wurfweite

$$x=\frac{1-z}{m}.$$

Man wird also nach folgenden Formeln zu rechnen haben:

$$m=\frac{g}{ak\cos\alpha},\ n=1+\frac{a\sin\alpha}{k},$$

$$\varphi(z)=n\,(1-z)+\text{log. nat.}\,z,$$

$$\varphi'(z)=\frac{1}{z}-n,\ \varphi''(z)=-\frac{1}{z^2}.$$

Die Auflösung der Gleichung $\varphi(z)=0$ hat gar keine Schwierigkeit und wird noch dadurch erleichtert, dass z nur ein positiver ächter Bruch sein kann, indem $z=1-mx$ ist und log. $(1-mx)$ nicht imaginär werden darf.

Wenn man für diejenigen Winkel die Rechnung ausführt, für welche in la Fere im Jahre 1770 Versuche angestellt sind *), so erhält man folgende Resultate:

Elevation in Graden.	Wurfweite in Par. Fuss berechnet	Wurfweite in Par. Fuss beobachtet	Differenz. Rechn. — Beob.
10	1434	1434	0
20	2433	2488	— 51
30	3004	2994	+ 10
40	3170	3408	— 238
43	3149	3144	+ 5
45	3117	3090	+ 27
50	2982	2982	0

*) Gehler, Phys. Wörterb. I., p. 758.

Die Wurfweiten für 10° und 50° sind oben benutzt, um die Constanten a und k zu bestimmen. Für die Winkel über 50° werden die Differenzen der Rechnung und Beobachtung bedeutender, nämlich — 182, — 194, — 242 für die Elevationswinkel 60°, 70°, 75°.

Es scheint hiernach möglich, auf dem angezeigten Wege die Wurfweiten, welche den zwischen α_1 und α_2 liegenden Elevationswinkeln zugehören, mit hinreichender Sicherheit zu berechnen, wenn die zu den Winkeln α_1, α_2 gehörenden Wurfweiten durch Versuche gefunden sind und die Differenz $\alpha_1 - \alpha_2$ nicht zu gross ist.

§. 5.

Sollen endlich die Gesetze der Bewegung für den Fall ermittelt werden, dass die Widerstand leistende Flüssigkeit selbst in Bewegung ist, so gehen wir von der Annahme aus, dass unsere Kugel, wenn sie unter dem Einflusse einer gleichförmigen Strömung von der Geschwindigkeit V festgehalten wird, denselben Widerstand leiste, den sie selbst erfahren würde, wenn sie in der ruhenden Flüssigkeit sich mit der Geschwindigkeit V bewegte. Dann ist die durch die Wirkung dieser Strömung entstehende beschleunigende Kraft gleich $g\frac{V}{k}$.

Die Kugel habe in einem Punkte A die Geschwindigkeit C und gelange nach Verlauf der Zeit t zu einem Punkte B. Durch A lege man die drei auf einander senkrechten Coordinatenebenen XAY, XAZ, YAZ, von denen die erstere horizontal sei. Die Abstände des Punktes B von diesen Ebenen seien der Reihe nach z, y, x; der Bogen der beschriebenen Curve zwischen A und B sei s und die Tangente in B habe die Richtung BD. In der Richtung BD würde der Körper sich mit der Geschwindigkeit v weiter bewegen, wenn in dem durch t bezeichneten Augenblicke alle Kräfte zu wirken aufhörten und der Körper nur nach dem Gesetze der Trägheit weiter ginge.

Nun sei während der Zeit t der Körper einem Winde ausgesetzt, dessen Geschwindigkeit V ist und dessen Richtung die Linie BE angiebt. Man ziehe durch B die Linien BX', BY', BZ' parallel mit den Achsen AX, AY, AZ, und bezeichne die Winkel DBX', DBY', DBZ' der Reihe nach mit α_1, β_1, γ_1, sowie die Winkel EBX', EBY', EBZ' durch α_2, β_2, γ_2. Dann sind die Gesetze der Bewegung herzuleiten aus den Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{k}\,(V\cos\alpha_2 - v\cos\alpha_1),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g}{k}\,(V\cos\beta_2 - v\cos\beta_1),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{g}{k}\,(V\cos\gamma_2 - v\cos\gamma_1) - g$$

Nun ist aber bekanntlich $\frac{ds}{dt}=v$, $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha_1$, $\frac{dy}{ds}=\cos\beta_1$, $\frac{dz}{ds}=\cos\gamma_1$; wir erhalten also, wenn wir zugleich $\gamma_2=90^0$ setzen, uns also auf den Fall beschränken, dass der Wind horizontal weht:

$$1)\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g}{k}\left(V\cos\alpha_2-\frac{dx}{dt}\right),$$

$$2)\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{g}{k}\left(V\cos\beta_2-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$3)\quad \frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{g}{k}\,\frac{dz}{dt}-g.$$

Die Constanten der Integration bestimmen wir so, dass zu gleicher Zeit t, x, y, z Null werden, während $\frac{dx}{dt}=C\cos\alpha=a$, $\frac{dy}{dt}=C\cos\beta=b$, $\frac{dz}{dt}=C\cos\gamma=c$ sein soll. Der Kürze wegen setzen wir $V\cos\alpha_2=a'$, $V\cos\beta_2=b'$. Wir erhalten dann durch Integration der Gleichungen (1), (2), (3) folgende Formeln:

$$4)\quad t=\frac{k}{g}\log\frac{a'-a}{a'-\frac{dx}{dt}},$$

$$5)\quad t=\frac{k}{g}\log\frac{b'-b}{b'-\frac{dy}{dt}},$$

$$6)\quad t=\frac{k}{g}\log\frac{k+c}{k+\frac{dz}{dt}};$$

welche mit Leichtigkeit in folgende umgewandelt werden:

$$7)\quad \frac{dx}{dt}=a'-(a'-a)\,e^{-\frac{gt}{k}},$$

$$8)\quad \frac{dy}{dt}=b'-(b'-b)\,e^{-\frac{gt}{k}},$$

$$9)\quad \frac{dz}{dt}=(k+c)\,e^{-\frac{gt}{k}}-k.$$

Durch neue Integration leiten wir hieraus her:

$$10)\quad x=a't-\frac{g}{k}(a'-a)\left\{1-e^{-\frac{gt}{k}}\right\},$$

$$11)\quad y=b't-\frac{k}{g}(b'-b)\left\{1-e^{-\frac{gt}{k}}\right\},$$

Digitized by Google

$$12)\ z=\frac{k}{g}(k+c)\{1-e^{-\frac{gt}{k}}\}-kt.$$

Durch Gleichsetzung der Werthe von t aus den Formeln (4) und (6) erhält man

$$\frac{a'-a}{a'-\frac{dx}{dt}}=\frac{k+c}{k+\frac{dz}{dt}}$$

woraus sich ergiebt

$$(a'-a)\frac{dz}{dt}+(k+c)\frac{dx}{dt}-(ak'+a'c)=0.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration:

$$13)\ (a'-a)z+(k+c)x-(ak+a'c)t=0.$$

Eben so erhalten wir aus (5) und (6)

$$14)\ (b'-b)z+(k+c)y-(bk+b'c)t=0,$$

und aus (4) und (5)

$$15)\ (a'-a)y-(b'-b)x-(ba'-ab')t=0.$$

Jetzt sind wir so weit vorgeschritten, dass wir die Gleichungen der Projectionen unserer Kugelbahn erhalten können. Wenn wir nämlich aus den Gleichungen (13), (14), (15) die drei Werthe von t nehmen und den ersten substituiren in (10) oder (12), den zweiten in (11) oder (12), den dritten in (10) oder (11): so erhalten wir die Gleichungen der drei Projectionen auf die Cordinaten-Ebenen, nämlich:

$$16)\ a'z+kx=\frac{k(ak+a'c)}{g}\{1-e^{-\frac{g}{k}\cdot\frac{(a'-a)z+(k+c)x}{ak+a'c}}\},$$

$$17)\ b'z+ky=\frac{k(bk+b'c)}{g}\{1-e^{-\frac{g}{k}\cdot\frac{(b'-b)z+(k+c)y}{bk+b'c}}\},$$

$$18)\ a'y-b'x=\frac{k(ba'-ab')}{g}\{1-e^{-\frac{g}{k}\cdot\frac{(a'-a)y-(b'-b)x}{ba'-ab'}}\}.$$

Bringen wir die Exponentialfunction in jeder dieser Gleichungen auf eine Seite allein und gehen wir dann zu den natürlichen Logarithmen über, so erhalten wir die Gleichungen der Projectionen unter folgender Form:

$$19)\ z=\frac{k+c}{a-a'}x-\frac{k(ak+a'c)}{g(a-a')}\log.\text{nat.}\frac{ak+a'c}{ak+a'c-\frac{ga'}{k}z-gx},$$

$$20)\ z=\frac{k+c}{b-b'}y-\frac{k(bk+b'c)}{g(b-b')}\log.\text{nat.}\frac{bk+b'c}{bk+b'c-\frac{gb'}{k}z-gy},$$

$$21)\ y=\frac{b-b'}{a-a'}x-\frac{k(ba'-ab')}{g(a-a')}\log.\,\text{nat.}\,\frac{ba'+ab'}{ba'-ab'-\frac{ga'}{k}y+\frac{gb'}{k}x}.$$

Aus den gewonnenen Formeln ergeben sich die Eigenthümlichkeiten dieser Bewegung ohne grosse Schwierigkeit. Es ist ferner leicht, die Gleichung der ebenen Curve herzuleiten, welche beschrieben wird, wenn die Richtung des Windes und die Richtung der Geschwindigkeit im Punkte A in eine vertikale Ebene fallen. Endlich gelangt man zu der Gleichung (12) in §. 1. zurück, wenn man die Geschwindigkeit des Windes Null setzt.

LII.

Nachtrag zu dem Aufsatze über den Vortrag der Lehre von der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

(Thl. VI. Nr. I. S. 1.)

Von

dem Herausgeber.

In dem vorher genannten Aufsatze habe ich ganz absichtlich mein Augenmerk vorzugsweise auf die reellen Wurzeln der cubischen Gleichungen gerichtet. Weil jedoch dieser Aufsatz nach einigen mir zugekommenen freundschaftlichen Mittheilungen nicht ganz ohne Beachtung geblieben und hin und wieder beim Unterrichte benutzt worden ist, so erlaube ich mir meinen früheren Entwickelungen jetzt noch die folgenden wenigen Bemerkungen über die imaginären Wurzeln hinzuzufügen.

Die imaginären Wurzeln erhält man, wenn man von der Voraussetzung ausgeht, dass in den früher gebrauchten Bezeichnungen nicht $q+q_1=0$ sei. Dann hat man zur Bestimmung der Grössen p, q, p_1, q_1 nach S. 2. bloss die vier folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} pp_1 - qq_1 = \frac{1}{3}a, \; pq_1 + qp_1 = 0; \\ p^3 + p_1^3 - 3pq^2 - 3p_1q_1^2 = b, \\ q^3 + q_1^3 - 3p^2q - 3p_1^2q_1 = 0. \end{cases}$$

Aus der zweiten dieser vier Gleichungen folgt

$$2)\quad qp_1 = -pq_1.$$

Multiplicirt man die erste der vier in Rede stehenden Gleichungen mit q, so erhält man

$$pqp_1 - q^2q_1 = \frac{1}{3}aq,$$

also wegen der Gleichung 2):

$$3)\quad (p^2 + q^2)q_1 = -\frac{1}{3}aq.$$

Multiplicirt man die dritte der Gleichungen 1) mit q^3, so erhält man

$$p^3q^3 + q^3p_1^3 - 3pq^5 - 3q^3p_1q_1^2 = bq^3,$$

und folglich, weil wegen der Gleichung 2)

$$q^3p_1^3 = -p^3q_1^3, \quad q^3p_1q_1^2 = -pq^2q_1^3$$

ist:

$$4)\quad p(p^2 - 3q^2)(q^3 - q_1^3) = bq^3.$$

Multiplicirt man die vierte der Gleichungen 1) mit q^2, so erhält man

$$q^2(q^3 + q_1^3) - 3p^2q^3 - 3q^2p_1^2q_1 = 0,$$

und folglich, weil wegen der Gleichung 2)

$$q^2p_1^2 = p^2q_1^2$$

ist:

$$5)\quad (q^2 - 3p^2)(q^3 + q_1^3) = 0.$$

Weil aber nach der Voraussetzung nicht $q + q_1 = 0$, d. i nicht $q = -q_1$ ist, so ist auch nicht $q^3 = -q_1^3$, d. i. nicht $q^3 + q_1^3 = 0$, und wegen der Gleichung 5) ist folglich

$$6)\quad q^2-3p^2=0$$

Daher haben wir zwischen den drei Grössen p, q, q_1 jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$7)\quad \left\{\begin{array}{c} (p^2+q^2)q_1=-\frac{1}{3}aq, \\ p(p^2-3q^2)(q^3-q_1{}^3)=bq^3, \\ q^2-3p^2=0. \end{array}\right.$$

Aus der dritten Gleichung in diesem Systeme folgt

$$q^2=3p^2,$$

also

$$p^2+q^2=4p^2,\ p^2-3q^2=-8p^2;$$

und nach den zwei ersten der Gleichungen 7) haben wir daher die beiden folgenden Gleichungen:

$$8)\quad 4p^2q_1=-\frac{1}{3}aq,\ 8p^3(q^3-q_1{}^3)=-bq^3;$$

oder

$$9)\quad a^3q^3=-1728p^6q_1{}^3,\ (b+8p^3)q^3=8p^3q_1{}^3.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die beiden folgenden:

$$a^3q^3=-1728p^6q_1{}^3,\ 216(b+8p^3)p^3q^3=1728p^6q_1{}^3;$$

also durch Addition:

$$10)\quad \{a^3+216(b+8p^3)p^3\}q^3=0.$$

Ist nun nicht $q=0$, so ist

$$11)\quad a^3+216(b+8p^3)p^3=0,$$

d. i.

$$12)\quad p^6+\frac{1}{8}bp^3=-\frac{1}{1728}a^3.$$

Löst man diese Gleichung wie eine quadratische auf, so erhält man

$$13)\quad p^3=-\tfrac{1}{16}\{b\mp\sqrt{b^2-\tfrac{4}{27}a^3}\},$$

also

$$14)\quad p=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b\mp\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}.$$

Nach der dritten der Gleichungen 7) ist

$$15)\quad q^2=\tfrac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{b\mp\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}\right)^2,$$

und weil nun nach dem Obigen

$$p_1=-\frac{pq_1}{q}=\frac{ap}{3(p^2+q^2)}=\frac{a}{12p},$$

$$q_1=-\frac{aq}{12p^2}=-\frac{a}{4q}$$

ist; so hat man die folgenden Auflösungen:

$$p=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}},\quad q=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}};$$

$$p_1=-\frac{a}{6\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}},\quad q_1=\mp\frac{a}{2\sqrt{3}.\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}$$

und

$$p=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}},\quad q=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}};$$

$$p_1=-\frac{a}{6\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}},\quad q_1=\mp\frac{a}{2\sqrt{3}.\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}.$$

Weil nun bekanntlich

$$x=p+p_1+(q+q_1)\sqrt{-1}$$

ist, so ist

Digitized by Google

$$16)\quad x=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}-\frac{a}{6\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}$$

$$\pm\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}-\frac{a}{2\sqrt{3}.\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}\right\}\sqrt{-1}$$

und

$$17)\quad x=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}-\frac{a}{6\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}$$

$$\pm\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}-\frac{a}{2\sqrt{3}.\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}\right\}\sqrt{-1}.$$

Durch leichte Rechnung überzeugt man sich, dass

$$\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}.\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}=\tfrac{1}{3}a$$

ist, woraus man ferner ohne alle Schwierigkeit schliesst, dass die beiden letzten Werthe von x von den beiden ersten nicht verschieden sind, und man also, wie es erforderlich ist, für x nur zwei Werthe erhält.

Auch ergiebt sich leicht, dass man diese Werthe von x auf folgende Art ausdrücken kann:

$$18)\quad x=-\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}\right\}$$

$$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}\right\}\sqrt{-1}$$

oder

Digitized by Google

$$19)\quad x=-\frac{a}{6}\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}\right\}$$

$$\pm\frac{a}{2\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}\right\}\sqrt{-1}.$$

Wenn $q=0$ ist, so ist wegen der dritten der Gleichungen 7) auch $p=0$, und wegen der ersten der Gleichungen 1) also $a=0$. Die dritte und vierte der Gleichungen 1) werden in diesem Falle

$$p_1(p_1^2-3q_1^2)=b,\quad q_1(q_1^2-3p_1^2)=0.$$

Weil nun aber nach der Voraussetzung nicht $q+q_1=0$ ist, so ist nicht $q_1=0$, und folglich

$$q_1^2-3p_1^2=0,\quad q_1^2=3p_1^2.$$

Führt man diesen Werth von q_1^2 in die erste der beiden vorhergehenden Gleichungen ein, so erhält man

$$p_1^3=-\tfrac{1}{8}b,\text{ also } p_1=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b},$$

und folglich

$$q_1=\pm p_1\sqrt{3}=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{b}.$$

Also ist in diesem Falle

$$20)\quad x=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b}\,.\,(1\pm\sqrt{3}\,.\sqrt{-1})$$

oder

$$21)\quad x=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b}\,.(1\pm\sqrt{-3}).$$

Ganz denselben Ausdruck von x erhält man z. B. aus 18), wenn man $a=0$ setzt, und sieht also, dass die Gleichung 18), so wie eben so jede der Gleichungen 16), 17), 19), ganz allgemein gültig ist, d. h. für jedes reelle a, auch für $a=0$, gilt.

Dass sich die vorhergehenden Ausdrücke auch aus der Gleichung 6) in meinem früheren Aufsatze herleiten lassen müssen, versteht sich von selbst, was aber füglich dem Leser überlassen werden kann. Meine Absicht im Vorhergehenden war nur, die in dem früheren Aufsatze bei der Bestimmung der reellen Wurzeln angewandte Methode noch etwas weiter zu verfolgen, aus welchem Gesichtspunkte man allein das Vorhergehende zu betrachten hat.

Digitized by Google

LIII.

Ueber bestimmte Integrale.

Von
Herrn F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

I.

Durch gewöhnliche Division erhält man die identische Gleichung

$$\frac{x^a}{1+x}=(-1)^n\cdot\sum_{n=0}^{n=n}x^{a+n}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{a+n+1}}{1+x}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten durch dx, und integrirt von $x=0$ bis $x=1$, so entsteht

$$\int_0^1\frac{x^a dx}{1+x}=(-1)^n\sum_{n=0}^{n=n}\frac{1}{a+1+n}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{a+n+1}dx}{1+x}.$$

Differenziirt man nun diese Gleichung nach a, die resultirende Gleichung wieder nach a u. s. f., so erhält man nach und nach

$$\int_0^1\frac{x^a lx dx}{1+x}$$

$$=-(-1)^n.\sum_{n=0}^{n=n}\frac{1}{(a+1+n)^2}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{a+n+1}lxdx}{1+x},$$

$$\int_0^1\frac{x^a(lx)^2dx}{1+x}$$

$$=(-1)^n.2\sum_{n=0}^{n=n}\frac{1}{(a+1+n)^3}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{a+n+1}(lx)^2dx}{1+x},$$

$$\int_0^1\frac{x^a(lx)^3dx}{1+x}$$

$$=-(-1)^n.2.3\sum_{n=0}^{n=n}\frac{1}{(a+1+n)^4}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{a+n+1}(lx)^3dx}{1+x},$$

u. s. w., also allgemein

$$\int_0^1 \frac{x^a (lx)^{p-1}\, dx}{1+x}$$
$$=(-1)^{p-1}.2.3....(p-1).(-1)^n \sum_{n=0}^{n=n} \frac{1}{(a+1+n)^p}$$
$$+(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{a+n+1}(lx)^{p-1}\, dx}{1+x},$$

oder

$$\frac{(-1)^{p-1}}{2.3...(p-1)} \int_0^1 \frac{x^a (lx)^{p-1} dx}{1+x}$$
$$=(-1)^n \sum_{n=0}^{n=n} \frac{1}{(a+1+n)^p} + (-1)^{n+p} \int_0^1 \frac{x^{a+n+1}(lx)^{p-1} dx}{1+x}.$$

Untersuchen wir nun zunächst die Grenze, welcher sich das auf der Rechten angehängte Integral nähert, wenn n ins Unendliche zunimmt. Zu dem Ende wende man auf dasselbe den bekannten Satz an $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(\beta-\alpha)f\{\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)\}$, wo ϑ zwischen 0 und 1 liegt. In Bezug auf unsern Fall ist dann $\int_0^1 \frac{x^{a+n+1}(lx)^{p-1} dx}{1+x}=\frac{\vartheta^{a+n+1}(l\vartheta)^{p-1}}{1+\vartheta}$, und dieser Ausdruck verschwindet offenbar für $n=\infty$, wenn nicht etwa ϑ selbst verschwindet. Fände diess Statt, so hätte man die Grenze von $\vartheta^{a+n+1}(l\vartheta)^{p-1}$ für das unendlich abnehmende ϑ zu ermitteln, und nach bekannten Principien über die Auffindung der Grenzwerthe würde man Null als Grenze jener Quantität finden. Das obige Integral verschwindet also stets für ein unendliches n.

Was ferner die Summe $(-1)^n \sum_{n=0}^{n=n} \frac{1}{(a+1+n)^p}$ betrifft, so convergirt sie nach den Principien über die Convergenz der Reihen gegen eine bestimmte Grenze, welche durch $(-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+n)^p}$ bezeichnet werden kann.

Nach dem Obigen ist daher

$$1)\quad \frac{(-1)^{p-1}}{2.3....(p-1)} \int_0^1 \frac{x^a(lx)^{p-1} dx}{1+x}=(-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+n)^p}.$$

Ganz ähnliche Betrachtungen ergeben die Gleichung

$$2)\quad \frac{(-1)^{p-1}}{2.3....(p-1)} \int_0^1 \frac{x^a(lx)^{p-1} dx}{1-x}=\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+n)^p}.$$

In dieser Relation darf aber p nicht 1 sein, weil dann die Summe auf der Rechten unendlich wird. In 1) kann aber p diesen Werth haben, indem die betreffende Summe endlich ist.

Setzt man $-l\frac{1}{x}$ für lx, so gehen die entwickelten Gleichungen über in die folgenden:

$$3)\quad \frac{1}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{x^a\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx}{1+x}=(-1)^n\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(a+1+n)^p},$$

$$4)\quad \frac{1}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{x^a\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx}{1+x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(a+1+n)^p}.$$

Lassen wir nun a sich der Null nähern, und gehen zu den Grenzen über, so wird

$$5)\quad \frac{1}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx}{1+x}=(-1)^n\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)^p},$$

$$6)\quad \frac{1}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx}{1-x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)^p}.$$

II.

Die Gleichung 1) wird für $p-1$ folgende:

$$\int_0^1 \frac{x^a dx}{1+x}=(-1)^n\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{a+1+n}.$$

Setzt man hierin $x=\text{tang}\,\varphi^2$, so findet man nach einigen leichten Reductionen:

$$7)\quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi}\text{tang}\,\varphi^a d\varphi=(-1)^n\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{a+1+2n}.$$

Nimmt man hierin für a der Reihe nach 0, 2, 4, 6, etc., so ergiebt sich:

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}d\varphi=1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\text{etc.},$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\text{tang}\,\varphi^2 d\varphi=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{9}+\text{etc.},$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\text{tang}\varphi^4 d\varphi=\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\text{etc.};$$

allgemein

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\text{tang}\,\varphi^{2q}d\varphi=\frac{1}{2q+1}-\frac{1}{2q+3}+\frac{1}{2q+5}-\text{etc.}$$

Deshalb ist

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} d\varphi = \tfrac{1}{4}\pi,$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^2 d\varphi = 1 - \tfrac{1}{4}\pi,$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^4 d\varphi = \tfrac{1}{3} - 1 + \tfrac{1}{4}\pi,$$

u. s. w.; also allgemein

$$8) \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^{2q}\, d\varphi = \frac{1}{2q-1} - \frac{1}{2q-3} + \frac{1}{2q-5} - \text{etc.} + (-1)^q \cdot \tfrac{1}{4}\pi.$$

Auf ganz ähnliche Art wird, wenn man für a succ. 1, 3, 5, 7, etc. setzt:

$$9) \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^{2q+1} d\varphi = \frac{1}{2q} - \frac{1}{2q-2} + \frac{1}{2q-4} - \text{etc.} + (-1)^q \cdot \tfrac{1}{2}\log 2.$$

In beiden Formeln ist q eine positive ganze Zahl; man erhält dieselben auch durch Anwendung von Reductionsformeln.

III.

Setzt man überhaupt in der Gleichung 1) $x = \operatorname{tang}\varphi^2$, so entsteht nach einfachen Reductionen

$$10) \quad \frac{(-1)^{p-1}}{2.3....(p-1)} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^a (l \operatorname{tang}\varphi)^{p-1} d\varphi$$
$$= (-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+2n)^p},$$

und wenn man a sich der Null nähern lässt:

$$11) \quad \frac{(-1)^{p-1}}{2.3...(p-1)} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (l \operatorname{tang}\varphi)^{p-1} d\varphi$$
$$= (-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(1+2n)^p}.$$

Setzt man in der Gleichung 2) $x = \sin\varphi^2$, so entsteht nach einfachen Reductionen

$$12) \quad \frac{(-1)^{p-1}}{2.3...(p-1)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi^a (l \sin\varphi)^{p-1} d\varphi}{\cos\varphi}$$
$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+2n)^p},$$

und wenn man a sich der Null nähern lässt:

Digitized by Google

13) $$\frac{(-1)^{p-1}}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(l\sin\varphi)^{p-1}\,d\varphi}{\cos\varphi}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+2n)^p}.$$

IV.

Die Summen in den Gleichungen 5), 6), 13) lassen sich bekanntlich durch Bernoullische Zahlen ausdrücken, wenn p eine gerade Zahl ist. Weiss man den Ausdruck für die Summe in 6), so können die Ausdrücke für die übrigen gedachten Summen daraus abgeleitet werden. Diess zu zeigen, sei

$$s=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)^{2q}}=\frac{1}{1^{2q}}+\frac{1}{2^{2q}}+\frac{1}{3^{2q}}+\text{ etc.},$$

$$s_1=(-1)^n\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)^{2q}}=\frac{1}{1^{2q}}-\frac{1}{2^{2q}}+\frac{1}{3^{2q}}-\text{ etc.},$$

$$\sigma=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+2n)^{2q}}=\frac{1}{1^{2q}}+\frac{1}{3^{2q}}+\frac{1}{5^{2q}}+\text{ etc.}$$

Man findet leicht die Relationen $s+s_1=2\sigma$, $s-s_1=\frac{s}{2^{2q-1}}$, aus denen sich ergiebt $\sigma=\frac{2^{2q}-1}{2^{2q}}s$, $s_1=\frac{2^{2q-1}-1}{2^{2q-1}}s$. Demnach hat man

14) $$\left\{\begin{aligned}
s&=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)^{2q}}=\frac{2^{2q-1}\overset{2q-1}{B}}{1.2.3..2q}\pi^{2q},\\
s_1&=(-1)^n\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)^{2q}}=\frac{(2^{2q-1}-1)\overset{2q-1}{B}}{1.2.3..2q}\pi^{2q},\\
\sigma&=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+2n)^{2q}}=\frac{(2^{2q}-1)\overset{2q-1}{B}}{2.1.2.3..2q}\pi^{2q};
\end{aligned}\right.$$

indem $\overset{2q-1}{B}$ die $q$te Bernoullische Zahl bedeutet.

Somit haben wir statt der Gleichungen 5), 6), 13) die folgenden.

15) $$\left\{\begin{aligned}
&\int_0^1\frac{(l\frac{1}{x})^{2q-1}dx}{1+x}=\frac{(2^{2q-1}-1)\overset{2q-1}{B}}{2q}\pi^{2q},\\
&\int_0^1\frac{(l\frac{1}{x})^{2q-1}dx}{1-x}=\frac{2^{2q-1}\overset{2q-1}{B}}{2q}\pi^{2q},\\
&\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(l\sin\varphi)^{2q-1}d\varphi}{\cos\varphi}=-\frac{(2^{2q}-1)\overset{2q-1}{B}}{2.2q}\pi^{2q}.
\end{aligned}\right.$$

V.

Die Summe in der Gleichung 11) ist ein Secantencoefficient, wenn p ungerade ist, denn man weiss, dass

$$\sec x = \frac{2^2}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{1+2n}$$

$$+ \frac{2^4 x^2}{\pi^3} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+2n)^3}$$

$$+ \frac{2^6 x^4}{\pi^5} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+2n)^5}$$

$+$ u. s. w.

Bezeichnet man also den $(q+1)$ten Secantencoefficienten durch $\overset{q+1}{C}$, so ist $\overset{q+1}{C} = \frac{2^{2q+2}}{\pi^{2q+1}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+2n)^{2q+1}}$, also

$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+2n)^{2q+1}} = \frac{\overset{q+1}{C} \pi^{2q+1}}{2^{2q+2}}$. Desshalb hat man nach 11)

$$16) \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (l \tang \varphi)^{2q} d\varphi = \frac{1.2.3..2q. \overset{q+1}{C} \pi^{2q+1}}{2^{2q+2}}.$$

Digitized by Google

LIV.

Nachtrag zu der Abhandlung über Systeme von Linsengläsern.

(Thl. VI. Nr. X. S. 62.)

Von
dem Herausgeber.

Ueber ein Paar der in meiner vorher genannten Abhandlung bewiesenen Formeln erlaube ich mir in dem vorliegenden kurzen Aufsatze noch einige nachträgliche Bemerkungen zu machen.

Setzen wir der Kürze wegen

$$1)\quad J^{(i)}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{N}^{(i)}},$$

so haben wir nach 56) oder 57) der genannten Abhandlung die Gleichung

$$2)\quad (p^{(i)}-F^{(i)})(p_1^{(i)}-F_1^{(i)})=(J^{(i)})^2.$$

Hat man nun aber überhaupt eine Gleichung von der Form

$$(x-a)(y-b)=z^2,$$

so lässt sich dieselbe nach einer wohl von Möbius zuerst gemachten Bemerkung immer auf die Form

$$\frac{1}{x+z-a}+\frac{1}{y+z-b}=\frac{1}{z},$$

oder auf die Form

$$\frac{1}{x-z-a}+\frac{1}{y-z-b}=-\frac{1}{z}$$

bringen, was sich leicht durch ganz einfache Rechnung beweisen lässt. Wenden wir dies auf die Gleichung 2) an, so erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$3)\ \frac{1}{p^{(1)}-F^{(i)}+J^{(i)}}+\frac{11}{p_1^{(i)}-F_1^{(i)}+J^{(i)}}=\frac{1}{J^{(i)}}$$

und

$$4)\ \frac{1}{p^{(1)}-F^{(i)}-J^{(i)}}+\frac{1}{p_1^{(i)}-F_1^{(i)}-J^{(i)}}=-\frac{1}{J^{(i)}}.$$

Setzen wir nun

$$5)\ p^{(1)}-F^{(i)}+J^{(i)}=P^{(1)},\ p_1^{(i)}-F_1^{(i)}+J^{(i)}=P_1^{(i)}$$

und

$$6)\ p^{(1)}-F^{(i)}-J^{(i)}=\Pi^{(1)},\ p_1^{(i)}-F_1^{(i)}-J^{(i)}=\Pi_1^{(i)},$$

also

$$7)\ p^{(1)}=F^{(i)}-J^{(i)}+P^{(1)},\ p_1^{(i)}=F^{\ (i)}-J^{(i)}+P_1^{(i)}$$

und

$$8)\ p^{(1)}=F^{(i)}+J^{(i)}+\Pi^{(i)},\ p_1^{(i)}=F_1^{(i)}+J^{(i)}+\Pi_1^{(i)},$$

woraus leicht mit Hülfe der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten einem Jeden die eigentliche Bedeutung der Grössen $P^{(1)}$, $P_1^{(i)}$ und $\Pi^{(1)}$, $\Pi_1^{(i)}$ erhellen wird; so erhalten die Gleichungen 3) und 4) folgende Gestalt:

$$9)\ \frac{1}{P^{(1)}}+\frac{1}{P_1^{(i)}}=\frac{1}{J^{(i)}}$$

und

$$10)\ \frac{1}{\Pi^{(1)}}+\frac{1}{\Pi_1^{(i)}}=-\frac{1}{J^{(i)}}.$$

Für $P^{(1)}$ unendlich wird $P_1^{(i)}=J^{(i)}$, und eben so wird für $P_1^{(i)}$ unendlich $P^{(1)}=J^{(i)}$. Für $\Pi^{(1)}$ unendlich wird $\Pi_1^{(i)}=-J^{(i)}$, und eben so wird für $\Pi_1^{(i)}$ unendlich $\Pi^{(1)}=-J^{(i)}$. Weitere Folgerungen aus den beiden vorhergehenden Gleichungen zu ziehen, gehört hier um so weniger zu meinem Zweck, weil dieselben eines Theils schon aus den Arbeiten anderer Mathematiker hinreichend bekannt sind, andern Theils ich selbst bald ein grösseres selbstständiges Werk über diese Gegenstände zu veröffentlichen beabsichtige.

In Betreff der Gleichung 66) in meiner oben gedachten Abhandlung, nämlich der Gleichung

$$\frac{q^{(1)}}{q_1^{(i)}}=(-1)^{i-1}\cdot\frac{\mathfrak{Z}_1^{(i)}+\mathfrak{N}_1^{(i)}(p^{(1)}-f^{(1)})}{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots M^{(i)}},$$

bemerke ich, was früher mit Unrecht unterlassen worden ist, dass dieselbe sich noch wesentlich vereinfachen lässt, wenn man statt der Grösse $f^{(1)}$ die Grösse $F^{(i)}$ einführt.

Weil nämlich nach 37) und 64) meiner früheren Abhandlung

$$F^{(i)}-f^{(1)}=-\cfrac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)}-\cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(2)}-\cfrac{(M^{(3)})^2}{N^{(3)}-\ldots-\cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-1)}}}}}$$

und

$$\frac{\mathfrak{Z}_1(i)}{\mathfrak{N}_1(i)}=\frac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)}-\frac{(M^{(2)})^2}{N^{(2)}-\frac{(M^{(3)})^2}{N^{(3)}-\ddots-\frac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-1)}}}}}$$

ist, so ist

$$F^{(i)}-f^{(1)}=-\frac{\mathfrak{Z}_1(i)}{\mathfrak{N}_1(i)},\ f^{(1)}=F^{(i)}+\frac{\mathfrak{Z}_1(i)}{\mathfrak{N}_1(i)},$$

woraus leicht

$$\mathfrak{Z}_1(i)+\mathfrak{N}_1(i)(p^{(1)}-f^{(1)})=\mathfrak{N}_1(i)(p^{(1)}-F^{(i)}),$$

also nach dem Obigen

$$11)\ \frac{q^{(1)}}{q_1(i)}=(-1)^{i-1}\cdot\frac{\mathfrak{N}_1(i)(p^{(1)}-F^{(i)})}{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots M^{(i)}}$$

folgt.

Nach den beiden Gleichungen 53) meiner früheren Abhandlung, in Verbindung mit den Gleichungen 52), erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{Z}^{(0)}=1,$$
$$\mathfrak{Z}^{(1)}=N^{(1)},$$
$$\mathfrak{Z}^{(2)}=\mathfrak{Z}^{(1)}N^{(2)}-\mathfrak{Z}^{(0)}(M^{(2)})^2,$$
$$\mathfrak{Z}^{(3)}=\mathfrak{Z}^{(2)}N^{(3)}-\mathfrak{Z}^{(1)}(M^{(3)})^2,$$
$$\mathfrak{Z}^{(4)}=\mathfrak{Z}^{(3)}N^{(4)}-\mathfrak{Z}^{(2)}(M^{(4)})^2,$$

u. s. w.

Vergleicht man nun diese Gleichungen mit den auf S. 84. bewiesenen Gleichungen:

$$\mathfrak{N}_1(1)=1,$$
$$\mathfrak{N}_1(2)=N^{(1)},$$
$$\mathfrak{N}_1(3)=\mathfrak{N}_1(2)N^{(2)}-\mathfrak{N}_1(1)(M^{(2)})^2,$$
$$\mathfrak{N}_1(4)=\mathfrak{N}_1(3)N^{(3)}-\mathfrak{N}_1(2)(M^{(3)})^2,$$
$$\mathfrak{N}_1(5)=\mathfrak{N}_1(4)N^{(4)}-\mathfrak{N}_1(3)(M^{(4)})^2,$$

u. s. w.

so ergiebt sich auf der Stelle

$$\mathfrak{N}_1(1)=\mathfrak{Z}^{(0)},\ \mathfrak{N}_1(2)=\mathfrak{Z}^{(1)},\ \mathfrak{N}_1(3)=\mathfrak{Z}^{(2)},\ \mathfrak{N}_1(4)=\mathfrak{Z}^{(3)},\ldots;$$

also allgemein

$$12)\ \mathfrak{N}_1(i)=\mathfrak{Z}^{(i-1)}.$$

Weil nun aber nach der zweiten der Gleichungen 53) meiner früheren Abhandlung

$$\mathfrak{Z}^{(i-1)}=\mathfrak{N}^{(i)}$$

ist, so ist auch

$$13)\ \mathfrak{N}_1(^i) = \mathfrak{N}(^i),$$

und man kann also die Gleichung 11) auch auf folgende Art ausdrücken:

$$14)\ \frac{q(^1)}{q_1(^i)} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{Z}^{(i-1)}(p(^1) - F(^i))}{M(^1)M(^2)M(^3)M(^4)\ldots M(^i)},$$

oder

$$15)\ \frac{q(^1)}{q_1(^i)} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{N}(^i)(p(^1) - F(^i))}{M(^1)M(^2)M(^3)M(^4)\ldots M(^i)}.$$

LV.

Ueber eine Methode zur Bestimmung der Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

Von

dem Herausgeber.

An die eine Wagschale einer genauen Wage, deren Wagschalen auf gewöhnliche Weise unten mit Häkchen versehen sind, hänge man mittelst eines feinen Fadens einen festen Körper, senke denselben in eine ihn nicht auflösende Flüssigkeit bei drei möglichst von einander verschiedenen Temperaturen t_1, t_2, t_3, die bei jedem der drei Versuche mit einem genauen Thermometer bestimmt werden müssen, ein, und lege jedesmal in die andere Wagschale so viele Gewichte G_1, G_2, G_3, dass die Wage im Gleichgewichte steht, beachte auch, dass bei jedem der drei Versuche ein gleich grosser Theil des Fadens, an welchem der feste Körper hängt, in die Flüssigkeit eingetaucht wird.

Bezeichnen wir nun das Gewicht einer Volumeneinheit der Flüssigkeit bei der Temperatur 0 durch Γ, und die cubische Ausdehnung der Flüssigkeit für jeden Grad des Thermometers durch $\varkappa$; so sind, wie leicht erhellen wird, die Gewichte einer Volumeneinheit der Flüssigkeit bei den Temperaturen t_1, t_2, t_3 respective

$$\frac{\Gamma}{1+\varkappa t_1},\ \frac{\Gamma}{1+\varkappa t_2},\ \frac{\Gamma}{1+\varkappa t_3}.$$

Bezeichnen wir also ferner die Volumina des in die Flüssigkeit eingetauchten festen Körpers bei den Temperaturen t_1, t_2, t_3

respective durch V_1, V_2, V_3; so sind die Gewichte der bei den drei Versuchen von dem eingetauchten Körper aus der Stelle vertriebenen Flüssigkeitsvolumina:

$$\frac{\Gamma V_1}{1+\varkappa t_1},\ \frac{\Gamma V_2}{1+\varkappa t_2},\ \frac{\Gamma V_3}{1+\varkappa t_3};$$

und wenn wir nun das Gewicht des Fadens durch g, den Gewichtsverlust des in die Flüssigkeit eingetauchten Theils desselben in der Flüssigkeit, welchen wir wenigstens mit grosser Annäherung bei allen drei Versuchen werden als gleich annehmen können, durch γ bezeichnen; so sind offenbar

$$G_1+\frac{\Gamma V_1}{1+\varkappa t_1}-(g-\gamma),$$
$$G_2+\frac{\Gamma V_2}{1+\varkappa t_2}-(g-\gamma),$$
$$G_3+\frac{\Gamma V_3}{1+\varkappa t_3}-(g-\gamma)$$

nach einem bekannten hydrostatischen Satze drei Ausdrücke für das wirkliche Gewicht des in die Flüssigkeit eingetauchten festen Körpers, wodurch wir die Gleichungen

$$G_1+\frac{\Gamma V_1}{1+\varkappa t_1}-(g-\gamma)$$
$$=G_2+\frac{\Gamma V_2}{1+\varkappa t_2}-(g-\gamma)$$
$$=G_3+\frac{\Gamma V_3}{1+\varkappa t_3}-(g-\gamma)$$

oder

$$G_1+\frac{\Gamma V_1}{1+\varkappa t_1}=G_2+\frac{\Gamma V_2}{1+\varkappa t_2}=G_3+\frac{\Gamma V_3}{1+\varkappa t_3}$$

erhalten. Bezeichnen wir nun aber die cubische Ausdehnung unsers festen Körpers für jeden Grad des Thermometers durch μ, und dessen Volumen bei der Temperatur 0 durch V, so ist

$$V_1=(1+\mu t_1)V,\ V_2=(1+\mu t_2)V,\ V_3=(1+\mu t_3)V;$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$G_1+\frac{1+\mu t_1}{1+\varkappa t_1}\Gamma V=G_2+\frac{1+\mu t_2}{1+\varkappa t_2}\Gamma V=G_3+\frac{1+\mu t_3}{1+\varkappa t_3}\Gamma V.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$G_1-G_2=-\left(\frac{1+\mu t_1}{1+\varkappa t_1}-\frac{1+\mu t_2}{1+\varkappa t_2}\right)\Gamma V,$$
$$G_1-G_3=-\left(\frac{1+\mu t_1}{1+\varkappa t_1}-\frac{1+\mu t_3}{1+\varkappa t_3}\right)\Gamma V;$$

also

$$\frac{G_1-G_2}{G_1-G_3}=\frac{\frac{1+\mu t_1}{1+\varkappa t_1}-\frac{1+\mu t_2}{1+\varkappa t_2}}{\frac{1+\mu t_1}{1+\varkappa t_1}-\frac{1+\mu t_3}{1+\varkappa t_3}},$$

oder

$$\frac{1+\varkappa t_2}{1+\varkappa t_3}\cdot\frac{G_1-G_2}{G_1-G_3}=\frac{(1+\mu t_1)(1+\varkappa t_2)-(1+\varkappa t_1)(1+\mu t_2)}{(1+\mu t_1)(1+\varkappa t_3)-(1+\varkappa t_1)(1+\mu t_3)};$$

also, wie man nach leichter Entwickelung findet:

$$\frac{1+\varkappa t_2}{1+\varkappa t_3}\cdot\frac{G_1-G_2}{G_1-G_3}=\frac{\mu-\varkappa}{\mu-\varkappa}\cdot\frac{t_1-t_2}{t_1-t_3},$$

d. i.

$$\frac{1+\varkappa t_2}{1+\varkappa t_3}\cdot\frac{G_1-G_2}{G_1-G_3}=\frac{t_1-t_2}{t_1-t_3}.$$

Aus dieser nur die eine unbekannte Grösse $\varkappa$ enthaltenden Gleichung erhält man ohne Schwierigkeit

$$1)\quad \varkappa=-\frac{(t_1-t_2)(G_1-G_3)-(t_1-t_3)(G_1-G_2)}{t_3(t_1-t_2)(G_1-G_3)-t_2(t_1-t_3)(G_1-G_2)}$$

oder

$$2)\quad \varkappa=-\frac{(t_2-t_3)G_1+(t_3-t_1)G_2+(t_1-t_2)G_3}{t_1(t_2-t_3)G_1+t_2(t_3-t_1)G_2+t_3(t_1-t_2)G_3},$$

mittelst welcher Formel also $\varkappa$ berechnet werden kann.

Nimmt man statt des Fadens, an welchem der bei den Versuchen gebrauchte feste Körper aufgehängt wurde, einen feinen Draht, legt den festen Körper, nachdem man $\varkappa$ bestimmt hat, in die Wagschale, an welcher derselbe vorher aufgehängt wurde, lässt den Draht wieder eben so weit wie bei den ersten Versuchen in die Flüssigkeit hineinhängen und legt nun in die andere Wagschale so viele Gewichte G, bis die Wage im Gleichgewichte steht, so ist, insofern man, wenn der Körper nur klein ist, seinen Gewichtsverlust in der Luft als unmerklich vernachlässigen kann, sein wirkliches Gewicht offenbar $G-(g-\gamma)$, und wir haben daher nach dem Obigen die drei folgenden Gleichungen:

$$G-(g-\gamma)=G_1+\frac{\Gamma V_1}{1+\varkappa t_1}-(g-\gamma),$$

$$G-(g-\gamma)=G_2+\frac{\Gamma V_2}{1+\varkappa t_2}-(g-\gamma),$$

$$G-(g-\gamma)=G_3+\frac{\Gamma V_3}{1+\varkappa t_3}-(g-\gamma);$$

also, wenn man für V_1, V_2, V_3 ihre aus dem Obigen bekannten Ausdrücke setzt:

$$G = G_1 + \frac{1+\mu t_1}{1+\varkappa t_1}\Gamma V,$$

$$G = G_2 + \frac{1+\mu t_2}{1+\varkappa t_2}\Gamma V,$$

$$G = G_3 + \frac{1+\mu t_3}{1+\varkappa t_3}\Gamma V.$$

Also ist

$$\frac{G-G_1}{G-G_2} = \frac{1+\varkappa t_2}{1+\varkappa t_1} \cdot \frac{1+\mu t_1}{1+\mu t_2},$$

$$\frac{G-G_1}{G-G_3} = \frac{1+\varkappa t_3}{1+\varkappa t_1} \cdot \frac{1+\mu t_1}{1+\mu t_3};$$

oder

$$\frac{1+\mu t_1}{1+\mu t_2} = \frac{1+\varkappa t_1}{1+\varkappa t_2} \cdot \frac{G-G_1}{G-G_2},$$

$$\frac{1+\mu t_1}{1+\mu t_3} = \frac{1+\varkappa t_1}{1+\varkappa t_3} \cdot \frac{G-G_1}{G-G_3};$$

also

$$3)\left\{\begin{array}{l} \mu = -\dfrac{(1+\varkappa t_1)(G-G_1)-(1+\varkappa t_2)(G-G_2)}{t_2(1+\varkappa t_1)(G-G_1)-t_1(1+\varkappa t_2)(G-G_2)}, \\ \mu = -\dfrac{(1+\varkappa t_1)(G-G_1)-(1+\varkappa t_3)(G-G_3)}{t_3(1+\varkappa t_1)(G-G_1)-t_1(1+\varkappa t_3)(G-G_2)}. \end{array}\right.$$

Hat man bei irgend einer bestimmten Temperatur τ das Volumen $\mathfrak{V}$ des bei den Versuchen angewandten festen Körpers durch wirkliche Abmessungen ermittelt, so ist

$$\mathfrak{V} = (1+\mu\tau)V, \text{ also } V = \frac{\mathfrak{V}}{1+\mu\tau};$$

folglich nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$4)\left\{\begin{array}{l} \Gamma = (1+\mu\tau)\dfrac{1+\varkappa t_1}{1+\mu t_1} \cdot \dfrac{G=G_1}{\mathfrak{V}}, \\ \Gamma = (1+\mu\tau)\dfrac{1+\varkappa t_2}{1+\mu t_2} \cdot \dfrac{G-G_2}{\mathfrak{V}}, \\ \Gamma = (1+\mu\tau)\dfrac{1+\varkappa t_3}{1+\mu t_3} \cdot \dfrac{G-G_3}{\mathfrak{V}}; \end{array}\right.$$

wodurch also auch das Gewicht einer Volumeneinheit der Flüssigkeit bei der Temperatur 0 bestimmt ist.

Wie man aus der cubischen Ausdehnung die lineare findet, braucht hier nicht weiter erörtert zu werden.

LVI.

Miscellen.

Wenn die Grössen R, φ, ψ aus den drei Gleichungen $A = R\cos\varphi\cos\psi$, $B = R\sin\varphi\cos\psi$, $C = R\sin\psi$ bestimmt werden sollen, so wird dabei gewöhnlich noch die Erfüllung der Bedingung verlangt, dass R positiv werde. Soll diese Bedingung erfüllt werden, so muss man die Winkel φ, ψ auf eine bestimmte Weise nehmen. Da sichere Regeln hierfür gemeiniglich nicht gegeben werden, so wollen wir dieselben hier einmal im Folgenden zusammenstellen, indem wir dabei zugleich von der Annahme ausgehen, dass φ immer positiv und von 0 bis 360°, dagegen ψ positiv und negativ, aber rücksichtlich seines absoluten Werths nur von 0 bis 90° genommen werden soll. Wollte man auch ψ stets positiv und von 0 bis 360° nehmen, so würden die Regeln anders ausfallen, werden sich aber, nach Anleitung des Folgenden, immer leicht aufstellen lassen, was auch zu zweckmässigen Uebungen im Gebrauche der Zeichen beim trigonometrischen Unterrichte Veranlassung geben kann.

Zur Bestimmung von φ hat man die Formel

$$\tang\varphi = \frac{B}{A}.$$

Zur Bestimmung von ψ hat man

$$\tang\psi = \frac{C}{A}\cos\varphi = \frac{C}{B}\sin\varphi,$$

und R ergiebt sich mittelst der Formeln

$$R = \frac{A}{\cos\varphi\cos\psi} = \frac{B}{\sin\varphi\cos\psi} = \frac{C}{\sin\psi}.$$

Soll nun R positiv werden, so müssen die Winkel φ, ψ unter den oben gemachten Voraussetzungen auf folgende Art genommen werden:

A,	B,	C	
+	+	+ :	$0 < \varphi < 90^0,\ 0 < \psi < +90^0$;
+	+	− :	$0 < \varphi < 90^0,\ 0 > \psi > -90^0$;
−	+	+ :	$90^0 < \varphi < 180^0,\ 0 < \psi < +90^0$;
−	+	− :	$90^0 < \varphi < 180^0,\ 0 > \psi > -90^0$;
−	−	+ :	$180^0 < \varphi < 270^0,\ 0 < \psi < +90^0$;
−	−	− :	$180^0 < \varphi < 270^0,\ 0 > \psi > -90^0$;
+	−	+ :	$270^0 < \varphi < 360^0,\ 0 < \psi < +90^0$;
+	−	− :	$270^0 < \varphi < 360^0,\ 0 > \psi > -90^0$.

Nach einer Bemerkung des Herrn J. A. Serret in Liouville's Journal de Mathématiques. T. IX. p. 436. kann das im Archiv. Thl. IV. S. 116. besprochene bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

sehr leicht auf folgende Art gefunden werden.

Man setze $x = \operatorname{tang}\varphi$, so ist $\varphi = \operatorname{Arctang} x$, und folglich

$$d\varphi = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Also ist offenbar

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} l(1+\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} l\frac{\cos(\frac{1}{4}\pi-\varphi).\sqrt{2}}{\cos\varphi}d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}l2.\int_0^{\frac{1}{4}\pi} d\varphi + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} l\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\varphi)\,d\varphi - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} l\cos\varphi\,d\varphi.$$

Aus der Natur der bestimmten Integrale erhellet aber sehr leicht, dass

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} l\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} l\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\varphi)\,d\varphi$$

ist. Also ist

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}l2,$$

wie a. a. O. gefunden worden ist.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

XXI.
Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Jahn, G. A.: Wörterbuch der angewandten Mathematik. gr. 8. 3te Lief. Leipzig. 1844. 18 ggr.
(Wird nächstens ausführlicher angezeigt werden.)

Kries, Fr.: Lehrbuch der reinen Mathematik. 7te Aufl. Mit 225 Holzschnitten. Jena. 1844. 1 Thlr. 18 ggr.

Die Elemente der Arithmetik, Algebra und rechnenden Geometrie. Von Prof. J. Rogg. Mit lith. Tafeln. Ulm. 1844. 20 ggr.

Montferrier, A. S. de: Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées. Deuxième édition. Trois volumes in 4. plus 80 planches. Paris. 1844. 36 fr.

Arithmetik.

Schenkel: praktisches Rechenbuch für Schüler in Volksschulen und in den unteren Klassen der Realschulen. Nebst Resultaten. 8 Braunschweig. 1844. 10 ggr.

Schenkel, J.: Elementare Arithmetik, theoretisch und praktisch dargestellt für Lehrer. Braunschweig. 1844. 8. 14 ggr.

Hanschild, J. W.: die Arithmetik. Ein Handbuch für alle Stände Nordhausen. 1844. 8 ggr.

Sass, J. B.: Proportionen und kaufmännisches Rechnen. Erste Abtheilung der Fortsetzung des „Rechenbuchs für Volksschulen“. 8. Altona. 1844. ½ Thlr.

Derselbe: Resultate dazu. ¼ Thlr.

Hompoltz, L.: Handbuch der Arithmetik in einer gründlichen und leichtfasslichen Darstellung, mit vorzüglicher Rücksicht auf praktische Anwendung. Prag. 1844. gr. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

Preyssinger, P.: Leitfaden zum Unterricht in der niederen, reinen und angewandten Arithmetik. 2te Aufl. gr. 8. Ulm. 1844. 18 ggr.

Hartmann, Dr. F. F. G.: arithmetischer Kursus für die oberen Gymnasial-Klassen, enthaltend die Grund-, Rang- und Ordnungsoperationen mit vielen Uebungsaufgaben. 1ste Abth.: Die Grundoperationen. 2te Abth.: Die Rangoperationen. 8. 1844. Hildesheim. 1⅔ Thlr.

Anleitung, leichtfassliche, zum Gebrauch des Rechenstabes bei Multiplication, Division, verkehrter und gerader Regel de tri, Gesellschaftsrechnung, Quadriren, Wurzelausziehen, Bestimmung des geometr. Mittels, Verwandlung von Vierecken und Dreiecken, Kreisumfangs- und Flächenrechnungen, Ellipsen, Kugeloberflächen, Berechnungen des freien Falles, dann der Körperinhalte von Würfeln, Prismen, Cylindern, Kugeln, Pyramiden und Kegeln, endlich der Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke. Eingerichtet für Solche, welche nur im Besitze der gewöhnlichen Elementarkenntnisse sind. 8. Wien. 1844. ¼ Thlr.

Lehrbuch der Arithmetik von J. G. Brehmer, Doctor der Philosophie, Oberlehrer der Mathematik und Physik am Pädagogium zu Putbus auf Rügen. Stralsund. 1844. 8.

Der Verfasser hat sich in dieser Schrift vorzüglich eine streng systematische Entwickelung der Arithmetik aus einem Principe, nämlich aus dem Principe des Zählens, welches der Verfasser als besonderes oder determinirtes Princip der Arithmetik bezeichnet, heraus zur Aufgabe gemacht, weshalb in derselben auch das Streben nach einer philosophischen Behandlung der Arithmetik sehr deutlich hervortritt, worin daher auch ihre Eigenthümlichkeit vorzüglich zu suchen sein dürfte.

Nach einer Einleitung in die gesammte Mathematik wird S. 12 die folgende Erklärung der Arithmetik gegeben:

„Der Gegenstand der Arithmetik ist die Zahlgrösse, ihr Princip das Zählen, welches sich sofort als Zuzählen oder Wegzählen darstellt; die Arithmetik ist die Wissenschaft von der discreten Veränderung einer Zahlgrösse und deren Folgen, sie untersucht 1) die discreten Veränderungen selbst, welchen eine Zahlgrösse unterliegt, betrachtet 2) das in Folge solcher Veränderungen immer mögliche Verhältniss zwischen zwei oder mehreren gegebenen Grössen, und bestimmt 3) die Zahlgrösse, welche zu einer gegebenen Zahlgrösse ein gegebenes Verhältniss hat.

Jede Veränderung, welche mit einer Zahlgrösse vorgenommen wird, heisst auch eine Operation oder Rechnung."

Auf S. 14 wird hierauf die folgende Uebersicht des ganzen Systems gegeben:

Erstes Buch. Erste Zählstufe.
Cap. 1. Erste Operationsstufe.
Cap. 2. Erste Verhältnissstufe.
Cap. 3. Erste algebraische Stufe.
Zweites Buch. Zweite Zählstufe.
Cap. 4. Zweite Operationsstufe.
Cap. 5. Zweite Verhältnissstufe.
Cap. 6. Zweite algebraische Stufe.
Drittes Buch. Dritte Zählstufe.
Cap. 7. Dritte Operationsstufe.
Cap. 8. Dritte Verhältnissstufe.
Cap. 9. Dritte algebraische Stufe.
Anhang. Beweis, dass nicht mehr Zählstufen möglich sind.
Viertes Buch. Verhältnisse zwischen mehreren Grössen.
Cap. 10. Diese Verhältnisse nach der ersten Zählstufe.
Cap. 11. Desgleichen nach der zweiten Zählstufe.
Cap. 12. Desgleichen nach der dritten Zählstufe.

Das Weitere über diese für sich freilich nicht ganz verständliche Eintheilung muss man in dem Buche selbst nachlesen, da uns zu weiteren Erläuterungen hier leider der Raum fehlt.

Jedenfalls verdient das, so wie in dieser, auch in mehreren anderern neueren Schriften, deutlich hervortretende Streben nach einer streng systematischen Entwickelung der Arithmetik aus einem Principe, wozu dieselbe unter den mathematischen Disciplinen vorzugsweise geeignet ist, alle Anerkennung. Uebrigens aber können wir den Lesern des Archivs die Versicherung geben, dass die vorliegende Schrift sich keineswegs, wie manche andere vorzüglich nach einer sogenannten philosophischen Darstellung strebende Schriften, in ein mystisches Dunkel hüllt, sondern vielmehr überall sich eine völlig klare und deutliche Darstellung zur besondern Aufgabe macht, weshalb deren Inhalt auch unter der Leitung eines geschickten Lehrers Schülern an höhern Unterrichtsanstalten ohne alle Schwierigkeit recht wohl zu völligem Verständniss wird gebracht werden können. Zugleich ist, ohne sich irgendwo auf ein blosses vages philosophisches Raisonnement einzulassen, was namentlich bei dem mathematischen Unterrichte auf Schulen sehr gefährlich sein würde, überall die strenge mathematische Form der Beweise festgehalten, und eine hinreichende Anzahl erläuternder Beispiele beigegeben worden, was der Schrift ebenfalls nur zur Empfehlung gereichen kann.

Lehrbuch der Arithmetik mit Einschluss der Algebra. Für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von Dr. K. G. Reuschle, Professor am Gymnasium zu Stuttgart. Erster Theil: Arithmetik. Stuttgart. 1844. 8. 1 Thlr. 3 ggr.

Bei der Abfassung dieses deutlich geschriebenen Lehrbuchs hat sich der Verfasser vorzüglich an Ohm gehalten, und stellt als leitende Grundsätze seiner Behandlung in der Vorrede die drei folgenden auf: 1) die Zahl ist keine Grösse; 2) alles Rechnen ist

Digitized by Google

nichts anderes, als ein Umformen von Zahlenverbindungen; 3) alle Zahlenverbindungen kommen letzlich auf sieben Arten zurück, zwei Zahlen mit einander zu verbinden. Uebrigens hat sich der Verfasser keineswegs sklavisch an sein Vorbild gehalten, sondern ist in mehrfachen Beziehungen seinen eignen Weg gegangen. Ob es übrigens nicht hin und wieder zur Abkürzung und Deutlichkeit der Beweise beigetragen haben würde, wenn der Gebrauch allgemeiner Symbole nicht, wie es scheint, absichtlich vermieden worden wäre, wollen wir dahin gestellt sein lassen.

Sass, J. B.: Buchstabenrechnung und Algebra. 2te Abtheilung der Fortsetzung des „Rechenbuchs für Volksschulen". 8. Altona. 1844. 1 Thlr.

Derselbe: Resultate dazu. Ebend. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Sachs: Auflösungen der in Meier-Hirsch's Sammlung von Beispielen etc. enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. Zum Selbstunterricht bestimmt. Sechste Auflage. 8. Berlin. 1844. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Baltshausen, H.: Die Grundlehren der Algebra, theoretisch entwickelt und mit einer grossen Anzahl von Beispielen und Aufgaben zur praktischen Einübung derselben versehen. Mit besonderer Rücksicht auf den Gebrauch in Schulen. gr. 8. 1844. Solothurn. 1 Thlr.

Derselbe: Der Schlüssel zu den Aufgaben. 10 ggr.

Prochaska, L.: Kurze und leichtfassliche Anleitung, Gleichungen des 1. und 2. Grades aufzusetzen und aufzulösen. 8. Wien. 1844. 8 ggr.

Ingram and Trotter, Elements of Algebra, Theoretical and Practical: for the use of Schools and Private Students; containing the Fundamental Rules, Fractions, Involution and Evolution, Surds, Equations of all Degrees, Progressions, Series, Logarithms and their Applications, Properties of Numbers, Continued Fractions and their Uses, the Indeterminate or Diophantine Analysis, Probabilities, Life Annuities etc.: with numerous Exercises under each Head, and a large Collection of Miscellaneous Questions. 12. Edinburgh. 1844. 4 sh.

Götz, J.: Lehrbuch der Mathematik. 2ter Theil: Differential- und Integralrechnung. gr. 8. 1844. Leipzig. 20 ggr.
(Bis jetzt ist dieses Buch noch nicht in unsere Hände gelangt, und wird später ausführlicher angezeigt werden.)

Bell, A.: Mathematical tables, consisting of logarithmic and other tables, required in the various branches of mathematics. London. $3\frac{1}{2}$ sh.

Geometrie.

Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen nebst vielen Uebungsaufgaben und Excursen, von J. H. T. Müller, Schulrathe und Director des Realgymnasiums zu Gotha. Zweiter Theil, Erste Abtheilung, die Grundeigenschaften der unbegrenzten geometrischen Gebilde im Raume und die gesammte Planimetrie enthaltend. Auch unter dem besonderen Titel: Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und Realschulen, nebst vielen Uebungsaufgaben und Excursen, von J. H. T. Müller. Erste Abtheilung, die Grundeigenschaften der unbegrenzten geometrischen Gebilde im Raume und die ganze Planimetrie enthaltend. Mit zehn Kupfertafeln und den zum gesammten mathematischen Unterricht erforderlichen vierstelligen Hülfstafeln als besonderer Beilage. Halle. 1844. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Dieses Lehrbuch der Geometrie ist nach einem ganz neuen Plane bearbeitet, und unterscheidet sich von allen übrigen uns bekannten in mehreren wesentlichen Punkten, die wir jetzt den Lesern in möglichster Kürze vor die Augen zu führen versuchen wollen.

Der allgemeine Grundgedanke, welcher bei der Abfassung dieses Werks den Verfasser fortwährend geleitet hat, ist zuvörderst der, dass die Sätze nicht in der Folge, wie sie sich den Beweisen nach am bequemsten an einander reihen lassen, sondern wie sie sich ihrem Inhalte nach einander am besten anschliessen, geordnet worden sind, so jedoch, dass darunter die Folgerichtigkeit der Beweise durchaus keinen Abbruch erleidet.

Eine nothwendige Folge aus diesem leitenden Grundgedanken war nun aber, dass der Verfasser die seit Euclides fortwährend festgehaltene Trennung der sogenannten Planimetrie und Stereometrie von einander gleich von vorn herein ganz aufheben, und vom Anfange an den Raum als Object der Geometrie sogleich in völliger Allgemeinheit auffassen musste. Die Nothwendigkeit dieser allgemeineren Auffassung wird bei dem Zwecke, dessen Erreichung der Verfasser sich überhaupt vorsetzte, sogleich einleuchten, wenn man z. B. nur überlegt, dass, wenn von den möglichen Lagen zweier Geraden die Rede war, natürlich die kreuzende Lage nicht fehlen durfte; bei drei Geraden war deren Parallelität im Raume nicht zu umgehen; an die Lehre von den Winkeln musste sich als das durchaus Analoge unmittelbar die Lehre von den Keilen oder Flächenwinkeln anschliessen; drei Ebenen bedingten die Aufnahme der Ecken; u. s. w.

Ueberhaupt aber musste der Verfasser, wenn er sich selbst treu bleiben wollte, die meisten geometrischen Objecte aus allgemeineren Gesichtspunkten auffassen, als dies sonst meistens zu geschehen pflegt, in welcher Beziehung wir hier nur u. A. die gleich anfänglich ganz allgemeine Darstellung der Lehre von den Winkeln hervorheben, welche, worin jeder erfahrene Lehrer dem Verfasser voll-

kommen beipflichten muss, für den künftigen Unterricht in der Trigonometrie von der grössten Bedeutung ist, und zu dessen Erleichterung die erspriesslichsten Dienste leistet.

Aus dem Grundgedanken, welcher bei der Abfassung dieses Werks leitend war, geht endlich auch von selbst hervor, dass auf möglichste Gruppirung der Sätze, ferner auf das Hervorheben des Dualismus in der Geometrie besonderer Fleiss verwandt, und auch von den Analogieen so oft wie möglich Gebrauch gemacht werden musste, so dass nämlich die für die Punkte und Geraden erwiesenen Sätze überall, wo es thunlich war, beziehungsweise auf die Geraden und Ebenen übertragen wurden.

Nachdem wir jetzt das vorliegende Werk, so weit es die uns vorgeschriebene Kürze gestattet, im Allgemeinen zu charakterisiren versucht haben, fühlen wir, bevor wir zur Angabe des Inhalts der einzelnen Abschnitte übergehen, uns gedrungen, der grossen Consequenz, mit welcher der Verfasser den sich selbst vorgezeichneten, nicht leichten Weg gegangen ist, die rühmlichste Anerkennung zu Theil werden zu lassen. Und bei der ungemein grossen Erweiterung der Geometrie in neuerer Zeit, wo es auch selbst für den, welcher sich fortwährend speciell mit diesen Gegenständen beschäftigt, sehr schwierig ist, die Uebersicht nicht zu verlieren, kann über den Nutzen eines solchen Werks wie das vorliegende keine Frage sein; vielmehr ist dasselbe längst ein Bedürfniss gewesen. Da es ferner eine wahre Sünde an der Wissenschaft sein würde, wenn man die neueren Eroberungen auf dem Gebiete derselben dem Unterrichte, für welchen dieselben jedenfalls von der grössten Bedeutung sind, noch länger entziehen wollte, so ist auch in dieser Rücksicht das vorliegende Werk von besonderer Wichtigkeit, und muss den Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten dringend empfohlen werden, wobei wir zugleich die Ueberzeugung auszusprechen nicht anstehen, dass schwerlich auf einem anderen Wege, als dem von dem Verfasser eingeschlagenen, dieses Ziel glücklich zu erreichen sein dürfte.

Nachdem nun der Verfasser in dem ersten Abschnitte, welcher die Ueberschrift führt: Grundeigenschaften der unbegrenzten und halbbegränzten geometrischen Grössen, und dessen Zweck und Wichtigkeit aus den vorhergehenden gegebenen allgemeinen Andeutungen über den Zweck des Werks von selbst erhellen wird, eine möglichst breite Basis für alles Folgende zu gewinnen versucht hat, geht er im zweiten zu den begränzten ebenen Figuren über, und stellt mit absichtlicher Vermeidung der Congruenz, ohne die eine Figur mit der anderen zu vergleichen, wodurch natürlich viele Abweichungen von den gewöhnlichen Beweisarten nöthig gemacht werden, dem Verfasser aber der grosse Vortheil gebracht wird, dass später die Zusammenstellung fremdartiger Sätze umgangen werden konnte, die hauptsächlichsten Eigenschaften der begränzten ebenen Figuren zusammen.

Den natürlichsten Eintheilungsgrund für die drei übrigen Abschnitte boten die verschiedenen geometrischen Verwandtschaften dar, nämlich die Congruenz, die Gleichheit mit Einschluss der Affinitätsgleichheit, die Aehnlichkeit und Affinität. Die Folgerungen aus den verschiedenen Verwandtschaftseigenschaften wurden in jedem Abschnitte abgesondert nachgegeben, so dass auch hierbei das Zusammengehörige möglichst bei einander bleiben konnte.

Digitized by Google

Einen sehr wesentlichen Theil des Werks bilden endlich die Anhänge zu den einzelnen Abschnitten, welche nicht für den öffentlichen Unterricht bestimmt sind, und in die Alles verwiesen worden ist, was mehr die Anregung der Selbstthätigkeit der Schüler zum Zweck hat. Aber auch hier hat der Verfasser möglichst auf die Gruppirung von Sätzen und Aufgaben gesehen, und jeden Gegenstand als ein kleines abgeschlossenes Ganzes darzustellen versucht.

Den sehr reichen Inhalt der einzelnen Abschnitte und der Anhänge speciell anzugeben, verbietet uns hier leider die Beschränktheit des Raumes, weshalb wir aus diesem grossen Schatze nur Einiges herausgreifen, was uns besonders auch durch seine Neuheit bemerkenswerth zu sein scheint. Dahin gehören u. A. auf S. 122 vier neue allgemeine Congruenzsätze für Dreiecke, bei denen als drittes Element der Congruenzbedingungen die Gleichheit des Flächeninhalts hinzugezogen worden ist; S. 147 — S. 151 eine vollständige Zusammenstellung aller möglichen Coordinatenmethoden; Manches über die geometrischen Oerter und die harmonischen Beziehungen, wobei der Verfasser, auch um des Folgenden willen, mit Recht kein Bedenken trug, den Begriff des Sinus und Cosinus mit aufzunehmen; die an verschiedenen Stellen gegebenen Zusammenstellungen geometrischer Beziehungen, u. s. w. In den Anhängen ist auch auf das Rücksicht genommen worden, was von praktischer Bedeutung ist, z. B. auf die Theorie des Proportionalzirkels, des Pantographen oder Storchschnabels und des Nonius oder Verniers.

Schliesslich müssen wir noch einer sehr mühsamen, aber auch sehr verdienstlichen, und namentlich denen, welche ihre Zeit dem Studium der Werke der griechischen Geometer im Original widmen wollen, sehr nützlichen Arbeit gedenken, welcher sich der Verfasser unterzogen hat, indem derselbe nämlich in einer Ausdehnung, wie dies wohl noch nicht geschehen ist, überall die griechischen Kunstausdrücke nebst ihren lateinischen Bedeutungen aufgenommen hat. Die durch den Mangel an allen Vorarbeiten nur noch vergrösserte Schwierigkeit einer solchen Arbeit ist allein derjenige gehörig zu würdigen im Stande, welcher die Schriften der griechischen Mathematiker selbst aus den Originalen kennt.

Die auf ähnliche Art wie bei Kunze's Geometrie in grosser Sauberkeit ausgeführten Figurentafeln, welche auch bei anderen, vorzüglich für den Unterricht bestimmten Werken nachgeahmt zu werden verdienten, gereichen dem Werke ebenfalls zu besonderer Empfehlung.

Nochmals empfehlen wir dieses neue System der Geometrie, dessen Fortsetzung wir mit Verlangen entgegen sehen, allen denen angelegentlichst, welche sich für die Fortschritte dieser herrlichen Wissenschaft und deren ungemein grosse Wichtigkeit für das gesammte Unterrichtswesen interessiren.

Zugleich mit dem vorhergehenden Werke sind erschienen:

Vierstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und Winkelfunctionen nebst den Gaussischen und andern Hülfstafeln zur Auflösung der höhern numerischen Gleichungen und zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate von J. H. T. Müller, Schulrathe und Di-

rector des Gothaischen Realgymnasiums. Halle. 1844. 8 ggr.

Diese Tafeln enthalten:

1. Auf S. 1 die fünfstelligen Logarithmen der gerade am Häufigsten vorkommenden Zahlen von 10000 bis 15000.

2. Auf S. 2 und 3, also neben einander, die vierstelligen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000.

3. Auf S. 4 bis 9 die Gaussischen Tafeln zur einen Hälfte in einer den Gebrauch wesentlich erleichternden Gestalt. Es verursachte nämlich bei der zeitherigen Einrichtung der Tafeln für $\log(a-b)$ wegen der doppelten Columnen nicht allein das Aufschlagen sondern auch die jedesmal aus zwei Rechnungen bestehende Interpolation mehr Zeitaufwand und grössere Aufmerksamkeit, indem die durch die Zwischenrechnung gefundene Zahl bald additiv, bald subtractiv war. Um dies zu vermeiden, hat der Verfasser die Werthe zu $\log(a-b)$ für gleichmässig fortschreitende Argumente neu berechnet, und dann mit den Matthiesen'schen Tafeln verglichen, wobei er, so wie auch hin und wieder bei der nachher zu erwähnenden Formelsammlung, von Herrn Director Hansen durch manchen Wink über die zweckmässige Einrichtung des Ganzen unterstützt wurde. Dadurch ist nicht nur das Aufschlagen, sondern auch das Einschalten erleichtert und letzteres durchgäugig gleichförmig geworden.

4. S. 10 und 11 die vierstelligen Quadrate aller Zahlen von 0 bis 1 durch alle Zehntausendtel.

5. S. 12 bis 15 die Viertelquadrate aller Zahlen von 0 bis 2 durch alle Zehntausendtel, welche bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, so wie der Gräfe'schen Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen, eine grössere Erleichterung als die Logarithmen gewähren.

6. Die Logarithmen der goniometrischen Functionen, welche in einer solchen Ausdehnung gegeben worden sind, dass sie, soweit dies bei vierstelligen Logarithmen möglich ist, eine Schärfe von 1 Secunde gewähren.

7. Eine Tafel der Kreisbogen in Theilen des Halbmessers $= 1$, so wie der wichtigsten Functionen von π.

8. Alle natürlichen goniometrischen Functionen von 30 zu 30 Minuten.

9. Eine kleine Tafel der dreistelligen Logarithmen, welche gerade noch Platz fand.

Eine sehr deutliche Anleitung zum Gebrauche der sämmtlichen Tafeln, so wie eine Sammlung der wichtigsten Formeln. auch für die ebene und sphärische Trigonometrie, ist der Schrift vorausgeschickt.

Durch die mühsame Zusammenstellung dieser so vieles Nützliche enthaltenden Sammlung abgekürzter Tafeln hat sich der Verfasser nicht bloss um die Schulen, für welche gerade eine solche Sammlung allerdings ein Bedürfniss war, sondern auch um viele Praktiker ein dankbar anzuerkennendes Verdienst erworben, und wir können daher nur wünschen, dass sein Fleiss, sein Eifer und seine Geschicklichkeit durch einen recht weit verbreiteten Gebrauch dieser auch äusserlich sehr gut ausgestatteten Tafeln die gebührende Anerkennung finden und einigermassen belohnt werden möge.

Digitized by Google

Grossmann: Genetisches Lehrbuch der ebenen Geometrie. Für Realschulen und Gymnasien. Mit 2 Tafeln. Stuttgart. 1845. 8. $\frac{3}{4}$ Thlr.

Löschke, K. A. J.: Geometrie für den Schul- und Privatgebrauch. 8. Schweidnitz. 1844. 8 ggr.

Lehrbuch der ebenen Geometrie. Von Dr. Chr. Nagel, Rector der Realanstalt in Ulm. 4te verbesserte und vermehrte Aufl. Mit 16 lithogr. Tafeln. Ulm. 1844. 20 ggr.

Lehrbuch der Stereometrie und der ebenen Trigonometrie. Von Dr. Ch. Nagel. I. Abth.: Stereometrie. II. Abth.: Ebene Trigonometrie. Zweite Auflage. Ulm. 1844. 8. 23 ggr.

Finck, P. J. E.: Géométrie élémentaire, suivie de la Trigonométrie rectiligne et sphérique. Troisième édition. In - 8. Strassbourg. 1844. avec 12 pl. 4 fr.

Adhemar, J.: Descriptive Geometrie, deutsch bearbeitet mit Anwendung der isometrischen Projectionslehre von Mollinger. gr. 8 Mit 80 Tafeln in Folio. Solothurn. 1844. 8 Thlr.

Praktische Geometrie.

Littrow, J. J. v.: Vergleichung der vorzüglichsten Maasse, Gewichte und Münzen mit den im Oesterr. Kaiserstaate gebräuchlichen. 2te, für Decimal- und gewöhnliche Rechnung eingerichtete Auflage von L. v. Littrow. gr. 8. Wien. 1844. $\frac{2}{3}$ Thlr.
(Sehr vollständig und empfehlenswerth.)

Cubik-Knekt för Uträkning af Fyrkantigt och Rundt Wirke. Stockholm, Berg; 59 sid. 8:o, h. 36 sk. (Bokh. Westerlunds förl.)

André, E.: Kubik-Tabellen für alle runden Hölzer in denen man richtig und schnell ihren wahren Holzgehalt, in Kubik-Schuhen, findet. Lex. 8. Wien. 1844. 2 Thlr.

Pfeil, J. F.: Tabellen zur Berechnung des Kubikinhalts runder und vierkantig geschnittener Hölzer nebst Preisberechnungstabelle in Thaler- und Guldenwährung. Für Forstbeamte bearbeitet und mit einer Gebrauchsanweisung versehen. 8. Leipzig. 1844. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Trigonometrie.

Recht, G.: Die Elemente der Trigonometrie und der Anwendung der Algebra auf Geometrie. gr. 8. München 1844. 12 ggr.

Mechanik.

Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre, von Adam Burg, k. k. Regierungsrathe, ordent. öffentl. Professor der Mechanik und Maschinenlehre am k. k. polytechnischen Institute in Wien. Erster Theil. Mechanik fester Körper. Beide Theile 4 Thlr.

Dieses in zweckmässiger Kürze abgefasste Compendium verdient seiner Deutlichkeit wegen vorzüglich Praktikern empfohlen zu werden, da es, ohne sich übrigens auf weitläufige Beschreibungen und Berechnungen zusammengesetzter Maschinen einzulassen, alle wesentlichen Grundlehren, auf die es bei Maschineneinrichtungen in den gewöhnlicheren Fällen ankommt, enthält. Dass die Anwendung des höheren Calculs überall vermieden worden ist, versteht sich von selbst. Der zweite Theil wird die Mechanik flüssiger Körper enthalten. Die schön ausgeführten Kupfertafeln sind in einem besonderen Hefte beigegeben.

Elementar-Lehrbuch der Mechanik fester Körper. Nach den neuesten Quellen für die k. k. Artillerieschulen bearbeitet von Anton Fink, Hauptmann und Professor der Mathematik im k. k. Bombardier-Corps. Wien. 1845. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

Dies deutlich geschriebene Lehrbuch enthält eine grösstentheils analytisch gehaltene Darstellung der gewöhnlichen Lehren der Statik und Mechanik fester Körper, ohne Anwendung der Differential- und Integralrechnung, mit Rücksicht auf praktische Anwendung. Dass die Lehre von der Wurfbewegung und andere in der Artillerie besonders in Anwendung kommende Lehren der Mechanik ausführlicher als in anderen Elementar-Lehrbüchern dieser Wissenschaft behandelt worden sind, lässt die Bestimmung des Buchs schon von selbst erwarten. In der Statik geht der Verfasser von dem Parallelogramme der Kräfte aus, und hat sich bei der Darstellung dieses wichtigen Princips an den allgemein bekannten Beweis von Duchayla gehalten.

Biering's Mechanik. Heft 3. Kopenhagen. ⅔ Rbd.

Buquoy, Prof. v.: Prodromus zu einer neuen verbesserten Darstellungsweise der höhern analyt. Dynamik. gr. 8. 2te Lieferung. 1844. 8 ggr.
(Erste Lieferung erschien 1842. 8 ggr.)

Coriolis, G.: Traité de la mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines. Seconde édition. In-4., plus 2 pl. Paris. 1844. 15 fr.

Praktische Mechanik.

Schubert, J. A.: Elemente der Maschinenlehre. 2te Abtheil. Von der Bearbeitung fester Körper im Allgemeinen, von den einfachen Werkzeugen und von den Werkzeugsmaschinen. gr. 8. Mit 35 Tafeln in Fol. Dresden. 1844. 10 Thlr.

Astronomie.

Astronomische Briefe von J. H. Mädler. Mitau. 1844. 8. 18 ggr.
Diese astronomischen Briefe sind zuerst in den wissenschaftlichen Beilagen der Augsburger Allgemeinen Zeitung veröffentlicht worden, und erscheinen hier nochmals überarbeitet und vervollständigt in einer geordneten Sammlung.

Comte, Ang.: Traité philosophique d'astronomie populaire, ou Exposition systématique de toutes les notions de philososhie astronomique, soit scientifiques, soit logiques, qui doivent devenir universellement familières. In-8. plus une pl. Paris. 1844. 7 fr.

Biot: Traité élémentaire d'astronomie physique. 4 volumes in-8., avec 4 atlas. En vente: Tome I. 4me édition avec 10 planches. 7 fr. 50 c. Tome II. avec atlas de 23 pl. 12 fr.

Narrien, John: Practical Astronomy and Geodesy. 8. London. 1844.

Om Himmelskropparne och Deras Rörelse; eller De Första Grunderna af Astronomien Populärt Framställda af F. Arago. Öfwersättning af Clemens Ullgren. Calmar, Wåhlin; 279 sid. 8.o, med 5 pl., h. 1 R:dr 32 sk. (Bokh. Looströms förl.)

Kreil, K.: Beobachtungen über den grossen Kometen von 1843. gr. 4. 1844. 6 ggr.

Jahn, G. A.: Leipziger kleine astronomische Ephemeriden für das Jahr 1845. 8. Leipzig. 1844. 16 ggr.

Seidelin, J.: Tabel over Solens Declination og Tid-Equatio-

nen til hver Dags Sandmiddag og Middelmiddag, samt over Maanens ovre Culminations Middelklokkeslet for Greenwichs Meridian i 1846. 32 ss.

Littrow, E. L. v.: Kalender für alle Stände für das Jahr 1845. gr. 8. Wien. 1844. 10 ggr.
(Auf den nützlichen Inhalt dieses Kalenders ist schon früher mehrmals hingewiesen worden.)

Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre, nebst einem Vorschlage zu einer streng wissenschaftlich geregelten Zeitrechnung, durch höhere Arithmetik begründet und erläutert von Wilhelm Matzka, Dr. der Philosophie, k. k. öffentl. ordentl. Professor der Mathematik an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow. Wien. 1844. 8. 2 Thlr. 12 ggr.

Dieses mit dem grössten Fleisse und der grössten Sorgfalt ausgearbeitete Werk enthält eine vollständige Darstellung der mathematischen Chronologie und hilft einem wahren Bedürfnisse ab, da in Ideler's beiden bekannten Werken (Berlin 1825 und Berlin 1831), vortrefflich in ihrer Art, doch mehr das Historische als das Mathematische hervortritt. Ganz recht hat aber der Verfasser des vorliegenden Werks gethan, dass er, wie er auch in der Vorrede ausdrücklich erklärt, von der ihm durch Ideler dargebotenen historischen Grundlage bei seinen mathematischen Entwickelungen unmittelbar ausgegangen ist, da er in dieser Beziehung gewiss keinen besseren Gewährsmann finden konnte. Die Beschränktheit des Raums verbietet uns, den reichen Inhalt dieses Werks hier im Detail anzugeben; schwerlich wird aber Jemand in demselben über irgend einen Punkt vergeblich Belehrung suchen. Sehr zweckmässig sind unter dem Titel Vorbegriffe der Chronologie die Lehren der höheren Arithmetik oder der sogenannten Zahlenlehre, welche in der Chronologie vorzüglich zur Anwendung kommen, im Zusammenhange dargestellt worden, und dabei hat der Verfasser zugleich durch Einführung zweckmässiger, zum Theil neuer Bezeichnungen für möglichste Abkürzung der allgemeinen Rechnungen gesorgt. Dass in einem so speciell und gründlich wie das vorliegende seinen Gegenstand behandelnden Werke auch manche neue Untersuchungen nicht fehlen können, versteht sich von selbst, und als besonders verdienstlich müssen auch noch die meist neu entworfenen, in einem besondern Anhange beigefügten, so wie auch hin und wieder in dem Werke zerstreu't vorkommenden Hülfstafeln zur Abkürzung chronologischer Rechnungen hervorgehoben werden. Ausserdem ist das Werk auf schönes Papier vortrefflich gedruckt, und verdient daher nochmals in jeder Beziehung der Aufmerksamkeit der Leser des Archivs, auch ausserhalb Deutschland, empfohlen zu werden, da uns wenigstens auch in einer anderen Sprache kein so vollständiges und gründliches, die neueren Forschungen so sorgfältig und vielseitig berücksichtigendes Werk über mathematische Chronologie bekannt geworden ist.

Bobrik, Dr. Eduard: Handbuch der practischen Seefahrtskunde. Mit einer vollständigen Sammlung logarithmischer,

geographischer und astronomischer Tabellen, Kupfertafeln und Karten, und einem Wörterbuche der nautischen Kunstausdrücke in den verschiedenen europäischen Seesprachen. Zum Selbstunterrichte und für Lehrer in der geographischen und astronomischen Steuermannkunde, in der Journalführung, in der Zutakelung und Lenkung des Schiffs, oder in der practischen Schifferkunde, so wie in den Vorbereitungen durch mathematische und physische Geographie; durch Arithmetik, Geometrie; durch Hydrostatik, Hydrodynamik und Schiffbaukunde. 2 Bde. gr. 8. 8 Thlr.

Physik.

Baumgartner, A.: Die Naturlehre in ihrem gegenwärtigen Zustande mit Rücksicht auf mathematische Begründung. 8te Aufl. gr. 8. 2 Theile. Wien. 4 Thlr.

Diese bis jetzt erschienene erste Abtheilung der achten Auflage enthält die Einleitung und die zwei ersten Abschnitte des allgemein bekannten Werks.

Örsteds Naturlare, 2. H. Kopenhagen. 1844. 90 s.

Faraday, M.: Experimental Researches in Electricity. Vol. 2. 8. London. 1844. 9 sh.

Kreil, K.: Magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag. 4ter Jahrgang. gr. 4. Prag. 1844. 3 Thlr. 12 ggr.

Der Kreislauf des Blutes und die Planetenbahnen. Ein physiologisch-mathematischer Versuch von Dr. med. König. Weissensee. 1844. 8. 15 ggr.

„Schon längst legte ich mir", sagt der Verf. in der Vorrede, „in Erwägung der unleugbaren Thatsachen, dass das Blut in seiner Bahn oft in einer der Schwerkraft entgegengesetzten Richtung strömt, was weder durch Venenklappen, noch durch Saugkraft, noch durch die Muskelkraft des Herzens allein befriedigend zu erklären ist, und dass zweitens diese Bahn eine in sich selbst zurücklaufende geschlossene ist, die Frage vor, ob es nicht denkbar sei, dass es im menschlichen Körper eine, der allgemeinen Schwerkraft analoge Kraft gebe, durch deren Wirkung, gleichsam eine Art organischer Gravitation, der Blutumlauf so vermittelt werde, wie die Bahnen der Planeten, und welche daher den Menschen zu dem in der Wirklichkeit machte, wofür er schon so lange dem Namen nach gegolten hat, zu einem Mikrokosmus. Die Beobachtung, dass die Pulsfrequenzen sich umgekehrt verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Körperlängen, musste mich in dieser Idee nur bestärken, denn, wenn man, wie es üblich ist, die Pulsfrequenz als einen Ausdruck für die Blutgeschwindigkeit ansieht, so enthält diese Beobachtung eine unmittelbare Bestätigung derselben. Dies gab dem nun folgenden Versuch, die erwähnte Hypothese durch Anwendung

auf einen concreten Fall so viel als möglich an den Prüfstein der Erfahrung zu legen, seine Entstehung."

So wenig ich selbst wegen Mangels an hinreichenden anatomischen und physiologischen Kenntnissen mir ein Urtheil über diese Schrift anmaassen darf, so glaube ich doch dem Verf. die Bemerkung schuldig zu sein, dass dieselbe, wie dies öfters bei solchen Schriften der Fall ist, keineswegs in das Gebiet luftiger naturphilosophischer Reflectionen gehört, sondern dass in derselben überall eine gesunde Anwendung mathematischer Sätze und Rechnungen hervortritt, und dass dieselbe daher wohl eine nähere Prüfung durch einen hinreichend mathematisch gebildeten Anatomen und Physiologen verdienen möchte, was ich dem Verf. schon um seines warmen Eifers willen, mit welchem er in der Vorrede der Anwendung der Mathematik in der Arzneiwissenschaft das Wort redet, von Herzen wünsche. Bei den Herren Aerzten wird er da freilich meistens tauben Ohren predigen. G.

Vermischte Schriften.

Jahresbericht für die Mitglieder der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse. Fastnacht. 1844.

Inhalt: Bericht über die zur Auffindung und Bezeichnung von Höhen in dem abgebrannten Theile der freien Hansestadt Hamburg ausgeführten und für den nicht abgebrannten Theil derselben vorgeschlagenen Nivellirungen. Von dem Herrn Ingenieur Röhbelin. — Nachtrag zu dem Aufsatze: „Ueber die Höhen einiger Gebäude in Hamburg, im Jahresbriefe für 1842." Von dem Herrn Conferenzrath Schumacher in Altona. — Tafeln zur Verwandlung Hamburgischer Gewichts-Einheiten in Französische und Englische, so wie umgekehrt.

Unterhaltungen aus dem Gebiete der Naturkunde von D. Fr. Arago. Aus dem Französischen übersetzt von Dr. E. F. Grieb. Sechster Theil. Schluss des Werkes. Stuttgart. 1844. 8. 1 Thlr. 23 ggr.

Dieser Theil enthält die von Arago gehaltenen historischen Lobreden auf Laplace (S. 1 — S. 9), Fourier (S. 10 — S. 22), Alexander Volta (S. 23 — S. 114), Thomas Young (S. 115 — S. 157), Humphry Davy (S. 158 — 188); ferner die Höhen der wichtigsten Punkte der Erde über der Meeresfläche (S. 189 — S. 196), Tafeln zur Verwandlung der Barometer- und Thermometerscalen (S. 197 — 199), und zur Verwandlung der französischen Maasse (S. 200 — S. 208). Hierauf folgt eine sehr ausführliche und mit grosser Sorgfalt verfasste Historisch-kritische Analyse des Lebens und der Arbeiten Sir William Herschel's (S. 209 — S. 489), und den Beschluss machen ein Aufsatz über die totale Sonnenfinsterniss vom 8ten Juli 1842 (S. 490 — 514), und der in der Sitzung der De-

putirtenkammer vom 16ten Mai 1842 von Arago erstattete Bericht über die neue, auf Staatskosten zu veranstaltende Ausgabe der mathematischen Werke des ehemaligen Institutsmitgliedes Laplace (S. 515 — S. 549). — Man sieht hieraus, dass in diesem Theile des Interessanten viel enthalten ist. Die Uebersetzung könnte hin und wieder etwas fliessender sein und weniger an das französische Original erinnern, liest sich jedoch im Ganzen gut.

Gruithuisen, Fr. v. P.: Naturwissenschaftlich-astronom. Jahrbuch für physische und naturhistorische Himmelsforscher und Geologen mit den für das Jahr 1846 vorausbestimmten Erscheinungen am Himmel. 7. Jahr. Mit 2 lithogr. Tafeln. 8. München. 1844. 2¾ Thlr.

Astronomisch-meteorologisches Jahrbuch für Prag von Karl Kreil. Vierter Jahrgang: 1845. Prag. 1844. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

Ausser der gewöhnlichen astronomischen Ephemeride enthält dieser Jahrgang zwei grössere Abhandlungen unter den Titeln: Erläuterung des Jahrbuchs und Geschichte des Entstehens und der bisherigen Leistungen des magnetischen Vereins, von denen besonders der letztere vielfaches Interesse, und zwar nicht bloss für Laien in der Wissenschaft, darbietet. Der erste dieser beiden Aufsätze kann eigentlich als eine allgemein verständliche Erläuterung des Kalenders betrachtet werden, und wird daher auch für ein grösseres Publikum sehr lehrreich sein, so wie diesem Jahrbuche wegen seines allgemein lehrreichen und verständlichen Inhalts überhaupt eine möglichst grosse Verbreitung zu wünschen ist.

Mémoires de l'académie impér. des sciences de St. Petersbourg. 6 série, 1. partie: sciences mathémat. et physiques. Tome 4. in 6 livrais. 4. St. Petersburg. 1844. 6 Thlr. 18 ggr.

Nachricht.

Die Akademie der Wissenschaften zu Petersburg bereitet eine neue Ausgabe aller Werke Eulers vor. Die ganze Sammlung wird 25 bis 28 Bände in gross Quart umfassen, jeden zu 80 bis 90 Bogen, und soll in 10 Jahren vollständig erschienen sein. Die Herausgabe ist einer Commission übertragen, bestehend aus den Akademikern Fuss, Ostrogradsky, Struve, Lenz, Bouniakovsky und Jacobi. Besonders bemerkenswerth ist es, dass Herr Fuss eine grössere Anzahl noch ungedruckter und bis jetzt unbekannter Werke Eulers aufgefunden hat, welche der neuen Sammlung einverleibt werden sollen. Die Titel der wichtigsten dieser Werke sind folgende:

Fragmens de grands ouvrages.

1. Manuscrit sans titre, contenant les chapitres 1 à 16 d'un Traité de la théorie des nombres. 587 §§. 112 pages in-4. En latin.

2. Manuscrit sans titre, sur l'application du calcul différentiel à la géométrie des courbes, destiné, à ce qu'il paraît, à former la troisieme partie des Institutiones calculi differentialis. L'enveloppe contient la table des chapitres 1 à 6, mais le 6me et la fin du 5me manquent. 179 §§. 104 pages in-4., et 8 feuillets de figures. En latin.

3. Manuscrit intitulé: Statica. 18 §§. de notions préliminaires, et 193 §§. sur l'équilibre des forces appliquées à un point. 68 pages in-4. En latin.

4. Manuscrit intitulé: Astronomia mechanica. Chapitre 1 à 7; 219 §§. et un appendice; le tout 182 pages in-4. et 4 feuillets de figures. En latin.

5. Manuscrit sans titre, renfermant les chapitres 1 à 7 d'un ouvrage de dioptrique. 141 §§. 88 pages in 4. et 3 feuillets de figures. En français.

6. Manuscrit intitulé: Théorie générale de la dioptrique. 186 §§. 48 pages in-4. et 2 feuillets de figures. En français.

„NB. Ces deux dernières pièces paraissent entièrement différentes et du grand ouvrage sur la dioptrique, publié en latin en 3 volumes, et du Précis d'une théorie générale de la dioptrique, inséré dans les Mémoires de l'Académie de Paris de l'an 1765. — Tous ces manuscrits en général quoique fragments, ne sont cependant pas des brouillons (à l'exception peut-être du No. 3), mais des copies nettes, très serrées, et tellement soignées qu'on peut les lire sans la moindre difficulté.

Mémoires.

1. Theorema arithmeticum ejusque demonstratio.
2. Considerationes circa analysin diophanteam.
3. Vera aestimatio sortis in ludis.
4. Réflexions sur une espèce singulière de lotérie nommée lotérie génoise.

XXII.
Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Sédillot, M. L. A., Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux. Première livraison. In 8. 1844. Paris.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Wörterbuch der angewandten Mathematik. Ein Handbuch zur Benutzung beim Studium und praktischen Betriebe derjenigen Künste und Gewerbe, welche Anwendungen der reinen Mathematik erfordern. Zugleich als Fortsetzung des Klügel'schen Wörterbuchs der reinen Mathematik. Im Vereine mit mehreren Gelehrten und Praktikern herausgegeben von G. A. Jahn, Dr. philos. und Lehrer der Mathematik zu Leipzig. Erster Band. A—L. Mit acht Tafeln Abbildungen. Leipzig. 1845. 3 thlr. 18 ggr.

Als Klügel im Jahre 1803 sein mathematisches Wörterbuch begann, hatte er laut der Vorrede zum ersten Theile die Absicht, dasselbe in drei Abtheilungen herauszugeben, von denen die erste der reinen, die zweite der angewandten, die dritte der technischen Mathematik *) gewidmet seyn sollte. Es war ihm aber nur ver-

*) M. s. über diese Eintheilung den Artikel Mathematik im dritten Theile.

gönnt, die erste Abtheilung bis zu dem Buchstaben 𝔇 fortzuführen, und deren Vollendung anderen Händen zu überlassen, welche im Jahre 1834 erfolgte. Dreissig Jahre waren also seit dem Anfange dieser ersten, nebst den Supplementen aus acht Theilen bestehenden Abtheilung verflossen. Es ist schwer die Anzahl der Bände zu bestimmen, welche die angewandte und technische Mathematik umfasst haben würden. Aber zwölf sehr starke Bände hätte man doch mindestens nur auf die angewandte Mathematik, nämlich auf die mechanischen, optischen und astronomischen Wissenschaften rechnen müssen, wenn dieselben nur einigermassen in einer der in der ersten Abtheilung gegebenen Bearbeitung entsprechenden Weise hätten bearbeitet werden sollen. Ueber den Umfang der technischen Mathematik wagen wir hier gar kein Urtheil zu fällen. Ein Werk von solcher Ausdehnung, dessen Vollendung in einer kürzern Reihe von Jahren nach den bei der ersten Abtheilung gemachten Erfahrungen gar nicht abzusehen war, zu beginnen, musste namentlich bei den grossen Fortschritten, welche die angewandte Mathematik täglich macht, um so mehr sehr bedenklich erscheinen, weil in vielen Theilen eine scharfe Gränzlinie zwischen Mathematik und Physik gar nicht mehr zu ziehen ist, und ein vielfaches Hinüberstreifen in die letztere Wissenschaft, die schon ein vollständiges Wörterbuch besitzt, daher nicht wohl umgangen werden kann. Man konnte sich, wenn etwas geschehen sollte, nur darauf beschränken, wieder eine Theilung der angewandten Mathematik vorzunehmen, und besondere Wörterbücher der Mechanik, Optik und Astronomie herauszugeben, und sollte es noch einmal dazu kommen, dass eine dieser drei Abtheilungen wirklich in Angriff genommen würde, so würde dies jedenfalls zuerst die Astronomie sein, da für diese ein ausführliches Wörterbuch für Theorie und Praxis von vielen Seiten her als ein dringendes Bedürfniss erkannt wird, und in ihr nach der gegenwärtigen Lage der Sache wohl noch am Ersten eine gewisse Vollendung zu erreichen seyn dürfte. Aber auch schon diese Abtheilung allein, für welche bereits mancherlei Vorbereitungen, auch rücksichtlich der Herbeischaffung des literarischen Apparats gemacht worden sind, würde gewiss wenigstens sechs Bände umfassen. Das vorliegende jetzt bis zu dem Buchstaben 𝔏 fortgeschrittene Wörterbuch der angewandten Mathematik, welches sich auf dem Titel zugleich als eine Fortsetzung des Klügel'schen Wörterbuchs der reinen Mathematik ankündigt, soll die ganze angewandte und technische Mathematik umfassen, und ist im Ganzen auf 9 bis 10 Lieferungen, jede von etwa 10 Bogen, überhaupt also auf zwei mässig starke Bände berechnet, aus welchem geringen Umfange wohl schon von selbst hinreichend hervorgehen dürfte, dass dasselbe keineswegs als eine Fortsetzung des Klügel'schen Wörterbuchs im eigentlichen Sinne betrachtet werden kann, da es mit diesem in jeder Beziehung streng wissenschaftlichen, auch die Geschichte der Wissenschaft überall ausführlich berücksichtigenden Werke einen Vergleich nicht auszuhalten im Stande ist, wie jedem Unbefangenen der flüchtigste Blick in beide Werke auf der Stelle lehren wird.

Dieses unumwundene Urtheil glaubte der Unterzeichnete dem Klügel'schen Wörterbuche, ganz abgesehen von dem nicht unbedeutenden Antheile, welchen er selbst an diesem in der Wissen-

schaft einzig dastehenden Werke hat, und zugleich der Verlagshandlung, welche für dasselbe die grössten Opfer gebracht hat, schuldig zu sein, auch namentlich deshalb, weil eine Fortsetzung desselben in einer oder der anderen Weise von den unmittelbar dabei betheiligten Personen noch keineswegs gänzlich aufgegeben, sondern vielmehr neuerlich nur erst wieder in Anregung gebracht worden ist. Nur bedarf eben die Art und Weise der Fortsetzung die reiflichste Ueberlegung, und den Rath einsichtsvoller Männer, ehe man überhaupt wagen darf, Hand an's Werk zu legen.

Wenn nun aber auch das vorliegende Wörterbuch durchaus nicht eine Fortsetzung des von Klügel unternommenen Werks im eigentlichen Sinne genannt werden darf, so ist doch auf der andern Seite der Nutzen und die Verdienstlichkeit desselben, als selbstständiges für sich bestehendes Werk betrachtet, in gewisser Beziehung nicht zu verkennen. Dasselbe liefert über die sämmtlichen wichtigeren Theile der angewandten und technischen Mathematik ganz kurze Artikel, die nur selten theoretische Ausführungen enthalten, begnügt sich vielmehr meistens mit einer allgemeinen Erläuterung der Begriffe und blossen Angabe der wichtigsten, die unmittelbarste Anwendung gestattenden, und zu derselben nöthigsten Resultate, und dann mit der Angabe der besten Werke, in denen der Leser weitere Belehrung suchen kann, in welcher letzteren Beziehung, wie es scheint, ohne die literarischen Notizen auf eine oft sehr nutzlose Weise zu häufen, meistens eine verständige Auswahl getroffen worden ist. Jedoch ist dabei eine gewisse, in der Mehrzahl der Bearbeiter aber hinreichende Entschuldigung findende, Ungleichheit nicht zu verkennen, indem u. A. die zu den Kriegswissenschaften und der Feuerwerkerei gehörenden, und die kaufmännischen Artikel, meist mit einer weit grösseren Ausführlichkeit bearbeitet worden sind als die meisten eigentlich mathematischen Artikel, wofür sich viele in die Augen fallende Beispiele anführen lassen würden, wenn dies die uns hier gebotene Kürze gestattete. Ueberhaupt ist uns wenigstens das ganze Werk mehr in der Art eines mathematischen Conversations-Lexikons als eines die Wissenschaft nach allen Seiten hin ergründenden Werks, wie doch das Klügel'sche Wörterbuch seiner ganzen Anlage nach ist und sein soll, erschienen. Aber gerade deshalb kann dasselbe für einen Jeden, der eine augenblickliche kurze Belehrung über irgend einen Gegenstand wünscht, in vielen Fällen recht nützlich sein und überhaupt in einem gewissen Kreise recht vortheilhaft wirken und zur weitern Verbreitung der Wissenschaft beitragen, weshalb wir es besonders allen denjenigen empfehlen, die nicht Mathematiker von Profession sind, aber doch für die gewöhnlichern Anwendungen der Mathematik ein lebendiges Interesse haben, namentlich auch allen Praktikern und Künstlern, so wie unter den Lehrern der Mathematik an höheren Unterrichtsanstalten vorzugsweise denen, welche, wie dies häufig der Fall ist und begreiflicherweise sein muss, ihre Studien hauptsächlich der reinen Mathematik zugewandt haben, aber doch bei ihrem ihnen meistens nur wenig freie Zeit übrig lassenden mathematischen und physikalischen Unterrichte öfters in den Fall kommen dürften, eine augenblickliche nur wenig Zeit in Anspruch nehmende nicht tiefer eingehende Belehrung über einen Gegenstand der angewandten oder

Digitized by Google

technischen Mathematik in möglichster Kürze für die Zwecke des Unterrichts zu wünschen. Bei der Schnelligkeit, mit denen die fünf Lieferungen des ersten Bandes auf einander gefolgt sind, lässt sich auch einer baldigen Vollendung des zweiten Bandes, den wir seiner Zeit gleichfalls in diesem literarischen Berichte anzeigen werden, wohl mit Sicherheit entgegen sehen; und gewiss wird dieses Werk seiner ganzen vorher näher charakterisirten Anlage nach das Seinige zu der sehr zu wünschenden immer grösseren Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den gewöhnlichern Kreisen des Lebens beitragen, weshalb wir ihm möglichst schnellen Fortgang wünschen. Die äussere Ausstattung ist sehr anständig. In dem ersten Bande haben wir u. A. in dem ziemlich ausführlichen, auch die neueren Untersuchungen berücksichtigenden, und zu dem besten im ganzen Buche gehörenden Artikel „Linsengläser" die Figuren auf den dem ersten Bande beigegebenen acht Figurentafeln vermisst, die daher in dem zweiten Bande noch nachzuliefern sein werden.

G.

Arithmetik.

Theorie der periodischen Decimalbrüche nebst Tabellen zur leichten Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche. Von Dr. E. H. Nagel, Rector der Realschule in Ulm. Ulm. 1845. 8. 20 ggr.

Durch Abfassung dieses Schriftchens, in welchem man die Theorie der periodischen Decimalbrüche auf eine sehr fassliche Weise vollständiger entwickelt findet als in den Lehrbüchern der Arithmetik, so wie durch die angehängten Tafeln, hat sich der Herr Vf. um den arithmetischen Unterricht auf Schulen ein Verdienst erworben.

Peto, T., neue Potenziallehre sammt dem Beweise der Unrichtigkeit der von den Mathematikern bis jetzt angenommenen Definition vom Potenziren. Oedenburg. 1844. 6 ggr.

J. G. Arbon, (Lector in de Wis- en Zeevaartkunde by de Koninklyke Marine, Honorair Lid van de Commissie tot het examineren der Zee-Officieren, enz.) Verhandeling over de binomiaal coefficienten, bevattende een aantal merkwaardige eigenschappen van dezelve, benevens eene beknopte theorie der getallen-reeksen, naar de binomiaal-wet geordend; gr. 8. Te Rotterdam, by de Wed. A. H. Krap. 1844. f 2, 40.

San-Matino, Agatino, Demonstrazione del teorema fondamentale della teoria delle funzioni analitiche di Lagrange. Catania. In 8.

Jerome de la Lande's logarithmisch trigonometrische Tafeln. Vermehrt durch die Tafeln der Gaussischen Logarithmen; durch die Logarithmen der Atomgewichte unzerlegter und einiger zusammengesetzten chemischen Stoffe; durch die Logarithmen anderer Zahlen, die in der Chemie und Physik oft gebraucht werden und durch einige mathematische Formeln. Herausg. von Heinr. Gottl. Köhler. 2. Stereotypausg. 16. Leipzig 1844. 14 ggr.

Geometrie.

Wolff, F., Lehrbuch der Geometrie. 1. Theil. Ebene Elementar-Geometrie, Trigonometrie, Theilungslehre. 4. verb. Auflage, mit 7 lithogr. Tafeln. Berlin 1845. gr. 8. 1 thlr. 16 ggr.

Nagel, Dr. Chr., Lehrbuch der ebenen Geometrie. Ulm 1844. 20 ggr.

Kauffmann, E. F., Lehrbuch der Stereometrie. Zum Gebrauche beim Unterricht in Realschulen und Gymnasien, sowie zum Selbstunterricht. 2. verbesserte u. verm. Aufl. Mit 4 Kupfertafeln. Stuttgart 1844. 8. 18 ggr.

Lehrgebäude der niederen Geometrie. Für den Unterricht an Gymnasien und höheren Realschulen entworfen von Carl Anton Bretschneider, Professor am Realgymnasium zu Gotha. Mit neun in Kupfer gestochenen Figurentafeln. Jena 1844. 2 thlr. 16 ggr.

So weit es die Beschränktheit des uns hier verstatteten Raumes erlaubt, wollen wir versuchen im Folgenden den Lesern des Archivs eine möglichst klare Anschauung von diesem in vielen Beziehungen ausgezeichneten Werke zu verschaffen, welches der Aufmerksamkeit nicht bloss aller Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten, sondern überhaupt aller Derer, welche sich für die Fortschritte der Geometrie in formeller und materieller Beziehung interessiren, sehr empfohlen zu werden verdient.

In einer kurzen Einleitung wird von den Grundbegriffen und der Eintheilung der Geometrie gehandelt, und eine Uebersicht der wichtigsten Sätze aus der allgemeinen Grössenlehre gegeben, welche in der Geometrie zur Anwendung kommen. Den ganzen Stoff der niederen Geometrie theilt der Vf. in zwei Abtheilungen, welche mit den Namen Synthetische Geometrie und Analytische Geometrie bezeichnet werden, und jede dieser beiden Abtheilungen zerfällt in drei Bücher, nämlich die Synthetische Geometrie in die Geometrie der Lage, die Geometrie der Gestalt und die Geometrie des Maasses; die Analytische Geometrie in die Goniometrie, Trigonometrie (ebene und sphärische), und die Coordinaten-Geometrie mit Einschluss der Lehre von den Kegelschnitten. Fünf Anhänge beschliessen hierauf das Werk: I. Die wich-

tigsten geometrischen Constructionen in der Ebene. II. Von den geometrischen Oertern in der Ebene, und von den Kegelschnitten insbesondere. III. Von der Methode der Projectionen und einigen damit zusammenhängenden Gegenständen. IV. Von der Quadratur der Parabel und Ellipse. V. Bestimmung des Flächeninhalts sphärischer Dreiecke und Polygone.

Schon aus dieser allgemeinen Angabe des Inhalts sieht man, dass der Vf. sich eine systematische Behandlung der Geometrie zu einer ganz besondern Aufgabe gemacht, und nach einer möglichst einfachen und naturgemässen Verknüpfung der einzelnen Sätze vorzüglich gestrebt hat, weshalb er denn auch den seit alter Zeit herkömmlichen Unterschied zwischen ebener Geometrie und Stereometrie gleich von vorn herein ganz aufgegeben hat, was gewiss in der vorher angegebenen Rücksicht nur vollkommen gebilligt werden kann. Alle einzelnen Kapitel sind sehr vollständig, jedoch meistens in der Art bearbeitet worden, dass die betreffenden Fundamentalsätze, welche Jeder unbedingt kennen muss, von der weiteren Ausführung des Gegenstandes getrennt worden sind, was jedenfalls dem Unterrichte sehr förderlich sein muss und den erfahrenen Lehrer bekundet. Ihrer grossen praktischen Wichtigkeit wegen sind die Goniometrie und Trigonometrie besonders ausführlich dargestellt, und der ersteren ist die ihr vollkommen zustehende Würde einer für sich bestehenden selbstständigen Wissenschaft mit Recht gesichert worden. Einen geringeren Raum hat der Vf. dagegen für die Coordinaten-Geometrie in Anspruch genommen. Die Anhänge enthalten vieles aus der sogenannten neueren Geometrie, und in Bezug auf dieselben muss noch besonders lobend hervorgehoben werden, dass in dem zweiten Anhange die drei Kegelschnitte als Oerter in der Ebene rein geometrisch betrachtet worden sind, da nach unserer Ueberzeugung eine rein geometrische Darstellung der Lehre von den Kegelschnitten überall einen wesentlichen Theil des mathematischen Elementar-Unterrichts bilden sollte, weshalb wir auch gewünscht hätten, dass der Vf. diesem Anhange eine noch etwas grössere Ausführlichkeit gegeben hätte.

Dass es an vielen eigenthümlichen Darstellungen und Ausführungen nicht fehlt, versteht sich bei diesem Vf., dessen frühere sämmtlich durch besondere Eleganz und Nettigkeit sich auszeichnende geometrische und namentlich trigonometrische Arbeiten bekannt genug sind, von selbst, weshalb wir uns begnügen, in dieser Beziehung hier nur Zweierlei hervorzuheben, ohne damit sagen zu wollen, dass nicht noch andere ganz eben so empfehlenswerthe Ausführungen an vielen Stellen des Buchs anzutreffen sein sollten. Einmal meinen wir die Lehre von der Lage der Geraden und Ebenen im Raume, welche der Vf. ohne alle anderen Hülfsmittel als die bekannten Sätze von den Winkeln und Parallellinien durchgeführt hat; und dann die in den Vorbemerkungen zu der analytischen Geometrie gegebene Entwickelung der geometrischen Bedeutung der negativen und imaginären Zahlen, die übrigens, wie der Vf. in der Vorrede auch selbst sagt, ihren eigentlichen Urheber nicht verleugnet.

Die Vorrede enthält mehrere sehr richtige pädagogische Bemerkungen und darf bei'm Lesen des Buchs nicht überschlagen werden. Da das Buch bei dem geometrischen Unterrichte auf dem

Digitized by Google

Realgymnasium zu Gotha als Lehrbuch zum Grunde gelegt werden soll, so muss dies wegen der Reichhaltigkeit seines Inhalts ein sehr gutes Vorurtheil für den Zustand des mathematischen Unterrichts auf dieser Lehranstalt erwecken.

Die äussere Ausstattung ist, auch was die Figurentafeln betrifft, in jeder Beziehung ausgezeichnet.

Catalan, Eugène, Elémens de Géométrie, avec planches. Paris 1843. 5 fr. 50 c.

Lardner, Dr., Treatise on Geometry and its Application to the arts. London 1844. 8. with 200 figures. 6 sh.

Newman, F. W., The Difficulties of Elementary Geometry, especially those which concern the Straight Line, the Plane, and the Theory of Paralles. Oxford 1844. 8. 5 sh.

Kuhn, C., Descriptive Geometrie. Mit Einschluss der Principien der Isometrischen Projectionslehre, für Schulen und zum Selbstunterrichte. Mit 60 Tabellen gravirter Constructionen. Gross Median-Quart-Velin. Augsburg 1844. 3 thlr.

Olivier, Th., Cours de Géométrie descriptive. 2ème Partie avec Atlas 4. Paris 1844.

Boucharlat, J. L., Théorie des Courbes et des Surfaces du second Ordre, ou traité complet d'application d'Algèbre à la Géométrie. Paris 1844.

Praktische Geometrie.

Die praktische Geometrie ohne Instrumente. Mit einem Anhange enthaltend: Kreisbogen und Segmenten-Tabellen nebst einer Aufgabe aus der Markscheidekunst. Ein nützliches Taschenbuch für praktische Geometer, von Friedrich Pross, Professor der Mathematik an der Königl. polytechnischen Schule zu Stuttgart. Mit 5 Figurentafeln. Stuttgart 1844. 20 ggr.

Diese kleine Schrift scheint uns nicht bloss für praktische Geometer, sondern auch für Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten empfehlenswerth zu sein, weil letztere darin manche zweckmässige Uebungsaufgaben für ihre Schüler finden werden. Der Inhalt derselben ist folgender: Lehrsätze aus der theoretischen Geometrie, das Ziehen und Ausstecken gerader Linien, das Bestimmen der Distanzen, das Errichten und Fällen der Perpendikel, das Ausmessen und Ausstecken der Winkel, das Ziehen der Parallellinien, das Ausmessen der Figuren, das Vertheilen der Flächen, Kreisbogen- und Segmenten-Tafeln, eine Aufgabe aus der Markscheide-

kunst. Bei der Lösung aller dieser Aufgaben bedient sich der Herr Vf. keiner anderen Instrumente als der Kette und Stäbe, und ist wegen dieser geringen praktischen Hülfsmittel natürlich genöthigt, überall die besondere Hülfe der Geometrie in Anspruch zu nehmen, aus welchem Grunde eben fast alle diese Aufgaben, wie schon oben bemerkt wurde, sich zu zweckmässigen geometrischen Uebungen für Schüler eignen. Unter den vorbereitenden geometrischen Lehrsätzen finden sich einige an sich bemerkenswerthe Sätze, und vorzüglich nimmt der Herr Vf. von dem folgenden Satze seinen Auslauf: Wenn zwei Dreiecke einen gleichen Winkel haben, oder wenn ein Winkel des einen Dreiecks einen Winkel des andern zu zwei Rechten ergänzt, se verhalten sich die Producte der diese Winkel einschliessenden Seiten wie die Ueberschüsse der Summen der Quadrate dieser Seiten über das Quadrat der dritten Seite. — Eine noch grössere Mannigfaltigkeit würde der Herr Vf. den behandelten Aufgaben und deren Auflösungen haben geben können, wenn er sich an Instrumenten ausser der Kette und der Stäbe noch den Gebrauch des eben so einfachen als in der Praxis nützlichen Winkelkreuzes oder der Kreuzscheibe (equerre d'arpenteur) gestattet hätte. Endlich wollen wir noch bemerken, dass eine gleiche Tendenz mit der vorliegenden Schrift ein anderes schönes, aber wohl nur wenig bekannt gewordenes Werkchen hat, welches ebenfalls der Aufmerksamkeit der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten bei dieser Gelegenheit recht sehr empfohlen zu werden verdient, und folgenden Titel führt: Solutions peu connues de différens problèmes de Géométrie pratique; pour servir de supplément aux Traités connus de cette Science; recueillies par F. J. Servois, Professeur de Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie. A Metz et a Paris. An XII. In dieser Schrift, in welcher sich mehrere elegante Anflösungen geometrischer Probleme finden, gestattet sich der Vf. den Gebrauch der Piquets ou Jalons avec le Cordeau ou la Chaine und tout au plus des Equerre d'Arpenteur (p. 1.).

Trigonometrie.

Steiner, Elemente der ebenen Trigonometrie u. d. Stereometrie. Breslau 1844. 8. 10 ggr.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie für die oberen Klassen höherer Lehranstalten, so wie für den Selbstunterricht. Nach einer streng wissenschaftlichen Methode bearbeitet und mit einem Anhange versehen von Dr. August Wiegand. Halle 1845. 8. 8 ggr.

Ein kurzes, aber recht deutliches Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, in welchem der Herr Vf. sich neben der Strenge der Beweise namentlich auch deren Allgemeinheit hat besonders angelegen sein lassen.

Meyer, A., Leçons de trigonométrie sphérique. In 8. avec une planche. Bruxelles 1844.

Die Gauss'schen Gleichungen der Bogendreiecke und zwei merkwürdige Sätze vom Raum. Vom Professor Dr. Georg Paucker. Mitau 1844. 8. 9 ggr.

Eine schöne kleine Schrift, die insbesondere auch der Aufmerksamkeit der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten empfohlen zu werden verdient. Der Herr Vf. giebt in derselben zuerst einen eleganten geometrischen Beweis der Gausssischen Gleichungen, die unsers Wissens bisher wohl nur analytisch bewiesen worden sind, und entwickelt dann ebenfalls grösstentheils nur durch geometrische Betrachtungen verschiedene, besonders aber zwei oder drei merkwürdige Sätze, von denen der erste S. 30. auf folgende Art ausgedrückt wird: Der sechsfache Inhalt des Raumvierecks, mit dem Halbmesser der umschriebenen Kugel verbunden, giebt eine Grösse, welche auf dieselbe Art aus den drei Verbindungen der Gegenkanten zusammengesetzt ist, wie der Inhalt eines ebenen Dreiecks aus den drei Seiten. Der Herr Vf. sagt, dass er diesen Satz bereits im Jahre 1813 bei Gelegenheit der Ausarbeitung seines stereometrischen Hefts für das Gymnasium zu Mitau gefunden, seine Bekanntmachung damals aber unterlassen habe, weil er ihm in seiner Abfassung zu vereinzelt erschien; seitdem habe ihn auch Herr Professor Bretschneider zu Gotha seinerseits gefunden und in diesem Archiv. Thl. I. S. 6. bekannt gemacht, jedoch ohne die in der vorliegenden Schrift gegebenen geometrischen Beweise. Einen zweiten Satz vom Parallelepipedon drückt der Herr Vf. S. 35. auf folgende Art aus: Die Endflächen und Querflächen (Diagonalparallelogramme) eines Scheibenraums (Parallelepipedums) stehen in denselben Beziehungen zu einander wie die Seiten und Querbänder (Diagonallinien) einer Zeilung (Parallelogramms). Ein dritter Satz endlich wird S. 37. auf folgende Art ausgedrückt: Der Inhalt eines Scheibenraums, mit dem Halbmesser desselben verbunden, giebt eine Grösse, welche auf dieselbe Art aus den drei Querflächen zusammengesetzt ist, wie der Inhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten. Insbesondere auch wegen der Zierlichkeit der in derselben angestellten geometrischen Betrachtungen wünschen wir nochmals, dass diese kleine Schrift von den Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten nicht unbeachtet bleiben möge.

Praktische Mechanik.

Schubert, J. A., Elemente der Maschinenlehre. 1. Theil. 2. Dresden 1844. 10 thlr.

Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen. Von J. V. Poncelet. Deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. Erster Band. Mit acht lithographirten Tafeln. Darmstadt. 1845. 8. 3 thlr.

Dieses Werk eines der ersten französischen Mathematiker, der sich nicht bloss um die Mechanik, sondern bekanntlich insbesondere auch um die Geometrie die grössten Verdienste erworben hat, verdiente eine Verpflanzung auf deutschen Boden vollkommen, weil in unserer Literatur schwerlich ein eben so treffliches, mit wissenschaftlicher Strenge abgefasstes, Lehrbuch der praktischen Mechanik existiren dürfte, und weil durch die Uebersetzung gewiss insbesondere manchem Praktiker ein angenehmer Dienst geleistet werden wird, auch überhaupt die, durch den hohen Preis des Originals erschwerte, möglichst grosse Verbreitung dieses vorzüglichen Werks sehr zu wünschen ist. Die äussere Ausstattung der Uebersetzung ist in jeder Beziehung vorzüglich, und wir sehen der Fortsetzung mit Verlangen entgegen.

Moseley, H., Illustrations of practical Mechanics. London 1844. 8. with numerous woodcuts. 8 sh.

Optik.

Brewster, D., Treatise on Optics, new Edition. London 1844. with 176 woodcuts. 6 sh.

Rosse, Earl of, The Monster Telescopes with an Account of the Manufacture of the Specula, and full Descriptions of all the Machinery connected with there Instruments. 8. Illustr. with engravings. London 1844. 2 s. 6 d.

Astronomie.

Fleischhauer, Versuch einer gemeinfasslichen, nur auf Elementarkenntnisse gegründeten Volkssternkunde für Schule und Haus. Nach den neuesten Ergebnissen astronom. Forschungen bearbeitet. Erster Theil: Die Sonnenweltordnung. Mit einem biogr. Anhange älterer und neuerer Astronomen und Mathematiker. 12. Darmstadt 1844.

Diesterweg, F. A. W., Lehrbuch der mathematischen Geographie und populären Himmelskunde. Zum Schulgebrauch und Selbstunterricht. Mit 5 Tafeln und 3 Sternkarten. 2. verm. und verb. Aufl. 8. Berlin 1844. 1 thlr. 4 ggr.

Digitized by Google

Wöckel, Populäre Vorlesungen über die Sternkunde. Nürnberg 1844. 1 thlr. 16 ggr.

Herschel, John, Treatise on Astronomy, new Edition. 8. London 1844. 6 sh.

Dent, Edward J., Le Dipleidoscope, ou Instrument méridien, breveté. 8. Paris 1845.

Pearson, W., An Introduction to the practical astronomy. 2. vol. London 1844. 4. with Pl. 7 L. 7 s.

Plantamour, E., Observations astronomiques faites à l'observatoire de Genève, dans l'année 1841, 42., 43. 4. Genf 1844. 3 thlr.

Plantamour, E., Resultats des Observations magnétiques faites à Genève dans les années 1842, 43. gr. 8. Genf 1844. 1 thlr. 16 ggr.

Smyth, W. H., Cycle of Celestial Objects, for the Use of Naval, Military, and Private Astronomers. Observed, reduced, and discussed. 2 vols. 8. London 1844. 2 L. 2 s.

Karsten, H., kleiner astronomischer Almanach auf das Jahr 1845. Rostock 1844. 12 ggr.

Almanacco nautico per l'anno 1845, publicato dell'ingegnere dottor Vincenzo Gallo. Anno quinto. Triest 1844. In 8. Con e tavola incisa.

Verzeichniss geographischer Ortsbestimmungen nach den neuesten Quellen und mit Angabe derselben von C. L. v. Littrow, Director der k. k. Sternwarte zu Wien und Professor der Astronomie an der Universität. Aus dem neuen physikalischen Wörterbuche besonders abgedruckt. Leipzig 1844. 526 Seiten. 8. 2 thlr. 12 ggr.

Dies ist jedenfalls das vollständigste Verzeichniss geographischer Längen und Breiten, welches die gesammte geographische Literatur bis jetzt besitzt, und mit grosser Mühe und Sorgfalt zusammengestellt, wodurch der Herr Vf. sich ein grosses Verdienst um die Wissenschaft erworben hat; dasselbe wird künftig ein unentbehrliches Hülfsmittel für jeden Geographen, Astronomen und Physiker sein, und in den Händen keines dieser Gelehrten fehlen dürfen, wenn namentlich, was sehr zu wünschen ist, der Herr Vf. sich entschliesst, von Zeit zu Zeit Nachträge zu demselben zu liefern, insofern späterhin, wie dies kaum anders sein kann, theils ganz neue, theils genauere Bestimmungen zu seiner Kenntniss gelangen. Die Einrichtung dieses Verzeichnisses ist sehr bequem. Zuerst folgen ohne Rücksicht auf die Erdtheile und einzelnen Länder die verschiedenen Orte in alphabetischer Ordnung auf einander, und daneben in vier Rubriken: 1) die nördliche oder südliche Breite; 2) die östliche oder westliche Länge von Paris in Bogen und, was besonders des astronomischen Gebrauchs wegen sehr zu loben ist, 3) auch in Zeit; 4) die Angabe

der Autorität oder der Quelle der aufgeführten Bestimmungen. Dann sind in einem zweiten Verzeichnisse die verschiedenen Orte nach den Erdtheilen und einzelnen Ländern wieder in alphabetischer Folge zusammengestellt, natürlich ohne neue Angabe der Längen und Breiten, da diese in dem ersten alphabetischen Verzeichnisse leicht aufgeschlagen werden können. Dass der Herr Vf. sich eifrig bemüht hat, überall aus den besten Quellen zu schöpfen, und dass zu der Abfassung dieses Werks die Herbeischaffung eines sehr bedeutenden literarischen Apparats nöthig gewesen ist, sieht man aus der den beiden alphabetischen Verzeichnissen vorausgeschickten Uebersicht der Verweisungen; aus der Vorrede ergiebt sich aber, dass dabei auch ein ausgedehnter Briefwechsel und gelegentliche Nachforschungen auf Reisen erforderlich gewesen sind, wodurch der Werth des Buchs nur erhöhet werden muss. Bei dem Anblicke dieses so vollständigen Verzeichnisses der Längen und Breiten lässt sich schwer der Wunsch unterdrücken, dass immer mehr vervielfältigte hypsometrische Bestimmungen den Herrn Vf. in den Stand setzen möchten, durch ein eben so ausführliches Verzeichniss der Höhen über der Meeresfläche, als der dritten Coordinaten, welche zur vollständigen Bestimmung der Lage eines Orts auf der Erde noch nöthig sind, das sich bereits erworbene Verdienst noch zu erhöhen.

Handbuch der Schifffahrts-Kunde, mit einer Sammlung von Seemanns-Tafeln, einer See-Karte und einer magnetischen Karte. Im Auftrage der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse verfasst von C. Rümker, Director der Sternwarte und Navigations-Schule in Hamburg. Vierte Auflage. Hamburg 1844. 5 thlr.

Da dieses Buch, wenn auch in dem Kreise, für welchen es zunächst bestimmt ist, wie schon die wiederholten Auflagen deutlich genug zeigen, bekannt genug, doch nicht zur Kenntniss sehr vieler Leser des Archivs gelangen möchte, so dürfte hier eine etwas ausführlichere Anzeige desselben wohl am Orte sein, da es allerdings, besonders in der ihm von Herrn Director Rümker in dieser vierten Auflage gegebenen neuen Gestalt, recht sehr verdient, in einem grössern Kreise bekannt und auch von Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten überhaupt nicht unbeachtet gelassen zu werden.

Dem ganzen Werke ist eine für den beabsichtigten Zweck gewiss völlig ausreichende, in der vorliegenden neuesten Ausgabe viel vollständigere, und dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft weit mehr als in den älteren Ausgaben sich anschliessende Darstellung der ebenen und sphärischen Trigonometrie vorausgeschickt, wogegen, was jedenfalls nur vollkommen gebilligt werden kann, die in den älteren Ausgaben sich findende Einleitung in die Arithmetik und Geometrie ganz weggelassen worden ist, da es andere Bücher genug giebt, aus denen die Schüler der Navigationsschulen diese Dinge auch ganz so, wie sie dieselben für ihren nächsten Zweck gebrauchen, erlernen können. Bei der Entwickelung der Beweise der Sätze in beiden Trigonometrieen hat der Herr Vf. sich hauptsächlich der constructionellen Methode bedient, wie Jeder weiss, der die Bedürfnisse und Wünsche der Schiffer in diesen

Dingen einigermassen kennt, ganz in deren Interesse, da von dieser sehr achtbaren, meist mit einem sehr gesunden Verstande begabten Klasse von Leuten, wenn sie überhaupt sich wissenschaftlichen Bestrebungen hingeben, stets eine vollkommen deutliche und klare, dabei aber auch möglichst anschauliche Einsicht in die Natur des Gegenstandes verlangt wird. Unter den von dem Herrn Vf. gegebenen geometrischen Darstellungen finden sich, namentlich in der sphärischen Trigonometrie, mehrere, die auch in einem weiteren Kreise bekannt zu werden verdienen, so wie auch eine grosse Anzahl vollständig ausgeführter numerischer Beispiele, die von allen Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten bei ihrem trigonometrischen Unterrichte vortheilhaft benutzt werden können. — Auf die Trigonometrie folgt die Steuermanns-Kunde, und wir können allen Lehrern, keineswegs bloss denen an Navigationsschulen, die Versicherung geben, dass sie in diesem Abschnitte eine nicht geringe Anzahl allgemein interessanter trigonometrischer Aufgaben finden werden, u. A. die in dem Aufsatze Nr. XXX. in diesem Hefte des Archivs behandelte Aufgabe, für welche Herr Director Rümker sowohl S. 72. eine eigne, als auch S. 81. eine von Herrn Hofrath Gauss ihm mitgetheilte elegante Auflösung gegeben hat. Sämmtliche Aufgaben in diesem, so wie überhaupt in allen Abschnitten sind durch vollständig ausgerechnete Beispiele erläutert. — Auf die Steuermanns-Kunde folgt unter der Ueberschrift Astronomische Vorkenntnisse eine sehr deutliche, durch sehr gute Zeichnungen erläuterte Darstellung aller derjenigen Lehren der Astronomie, welche vorzüglich bei Beobachtungen nöthig sind, wobei wieder viele schöne durch numerische Beispiele erläuterte Aufgaben vorkommen, u. A. S. 151. des Pothenot'schen Problem auf der Sphäre, mehrere Aufgaben von Gauss u. dergl. — Auf diesen Abschnitt folgt nun der letzte ausführlichste und wichtigste Theil des Werks, welcher unter der Ueberschrift Astronomische Schiffs-Rechnung eine sehr ausführliche, im höchsten Grade deutliche und durch eine Menge ausgerechneter Beispiele erläuterte Darstellung der nautischen Astronomie enthält, wobei wir aber bemerken müssen, dass wir der Meinung sind, dass es überhaupt für alle diejenigen, welche, bloss mit transportabeln Instrumenten ausgerüstet, sich astronomischen Beobachtungen, namentlich Zeit, Längen- und Breitenbestimmungen widmen wollen, kaum einen besseren praktischen, immer aber auf die strenge Theorie zurückgehenden Wegweiser geben dürfte, als diesen Theil des vorliegenden Handbuchs, weshalb wir dasselbe namentlich auch allen Lehrern der Mathematik empfehlen, die in demselben Alles mit grösster Deutlichkeit dargestellt finden werden, was für den vorher näher bezeichneten Zweck in Bezug auf die zweckmässigsten Beobachtungs- und Rechnungsmethoden, so wie auf Kenntniss des Gebrauchs und der Berichtigung der Instrumente zu wissen nöthig ist. — Eine sehr vollständige Sammlung nautischer Tafeln (XXXVI Tafeln auf 531 Seiten) beschliessen das Werk, von denen wieder ganz dieselbe Bemerkung gilt wie vorher, dass diese Tafeln nämlich, die wir leider der Beschränktheit des Raums wegen hier nicht einzeln anführen können, überhaupt eine für alle Beobachter mit transportabeln Instrumenten sehr nützliche Sammlung astronomischer Tafeln bilden.

Digitized by Google

Einiges dem Herrn Verfassers vorzugsweise Eigenthümliche ist schon vorher hervorgehoben worden. Die Beschränktheit des Raums erlaubt uns nur noch unter mehrerem Anderen auf die Erklärung der Merkator'schen Projection (S. 85. und S. 86.), die Reduction der Zeit des Mittels der Höhen auf das Mittel der Zeiten (S. 181.), und auf die für Längenbestimmungen so wichtige Reduction der Monddistanzen nebst den dazu gehörenden Tafeln hinzuweisen. Besonders machen wir auch nochmals auf die durch das ganze Werk sich hindurch ziehende mehr synthetische als analytische Methode, und die erläuternden an die besten englischen Werke ähnlicher Art erinnernden Holzschnitte, so wie auch auf die grosse Anzahl numerischer Beispiele aufmerksam.

Vergleichen wir endlich im Allgemeinen diese neueste Ausgabe mit den früheren, so zeichnet sich dieselbe vor diesen durch einen weit wissenschaftlicheren Charakter auf das Vortheilhafteste aus, ohne dabei etwas von ihrer praktischen Brauchbarkeit zu verlieren, und legt dadurch zugleich ein höchst erfreuliches Zeugniss von dem übrigens auch anderweitig hinreichend bekannten (m. s. z. B. das Vorwort des Herrn Conferenzraths Schumacher zu Herrn Rümkers Sterncatalog. Hamburg 1843. 4.) trefflichen Zustande der Hamburger Navigationsschule ab.

Ein genaues und vollständiges Druckfehlerverzeichniss ist nachträglich noch gedruckt worden, und wird von den Besitzern des Buchs auf dem Wege des Buchhandels bezogen werden können, worauf wir hier besonders hinzuweisen absichtlich nicht unterlassen wollen.

Je schwerer es für einen scharf begränzten Kreis von Lesern zunächst bestimmten Büchern gewöhnlich wird, sich allgemeinern Eingang zu verschaffen, desto mehr haben wir es für unsere Pflicht gehalten, diejenigen Leser des Archivs, welche sich überhaupt für die Anwendungen der Mathematik interessiren, auf das vorliegende Werk aufmerksam zu machen.

Mittlere Oerter von 12000 Fixsternen für den Anfang von 1836, abgeleitet aus den Beobachtungen auf der Hamburger Sternwarte von Carl Rümker. Hamburg 1843. 4. 3 thlr.

Dieser Fixstern-Catalog ist wohl nur jetzt erst vollständig in den Buchhandel gekommen. Alle Beobachtungen, auf denen derselbe beruhet, sind allein von Herrn Rümker an dem vortrefflichen Repsold'schen Meridian-Kreise der Hamburger Sternwarte gemacht, der im Jahre 1836 aufgestellt wurde, welches auch der Grund ist, dass alle Fixsternpositionen auf den Anfang von 1836 reducirt worden sind. Es lag vorzüglich in Herrn Rümker's Absicht, die noch in der Histoire Céleste und in Bessel's Zonen vorkommenden Lücken zu ergänzen, und zu den in diesen reichen Sammlungen aufgehäuften Schätzen neue hinzuzufügen, weshalb dieser Catalog wesentlich nur kleine bisher noch nicht bestimmte Sterne enthält, ohne dabei schon früher bestimmte Sterne, die sich dem Beobachter darboten, auszuschliessen. Daher wird dieser neue Sterncatalog, welchen Herr Conferenzrath Schumacher in Altona auf Herrn Rümkers Wunsch mit einem Vorwort begleitet hat, insbesondere bei Kometen-Beobachtungen künftig unentbehrlich sein, weshalb auch vorzüglich auf solche kleine

Sterne die Aufmerksamkeit gerichtet worden ist, die bei früheren Kometen, z. B. dem Halley'schen, als Vergleichungssterne gedient haben.

Newton, W., Familiar Introduction to the Science of Astronomy, illustrated by numerous Diagrams; to which are added Problems on the Use of the Globes, and a Description of the Orrery and Armillary Sphere. 3d edition. London 1844. 12. 3 sh.

Weiland, C. F., der nördliche gestirnte Himmel. — Die sichtbare Seite der Mondoberfläche. Planiglob. Weimar 1844. gr. 4. à $1\frac{1}{4}$ Ngr.

Dubus, F. J., Types de calculs de navigation et d'astronomie nautique. In 4. Saint-Brieux. 1845. 2 thlr. 20 ggr.

Physik.

Brandes, H. W., Vorlesungen über die Naturlehre, für Leser, denen es an mathematischen Vorkenntnissen fehlt. 4. Lieferung mit Kupfern. gr. 8. Leipzig 1844. 1 thlr.

Botto, G. D., Elementi di fisica generale esperimentale ad uso delle regie scuole di filosofia. Torino 1843. In 8. 4 tavole. 5. 50.

Stöpel, A., die Lehre vom Magnetismus und von der Electricität, für Lehrer an Mittelschulen und Freunde der Naturkunde. Tangermünde 1844. Mit 2 Figurentafeln. 8. 16 ggr.

Herger, J., die Systeme der magnetischen Curven, Isogonen und Isodynamen, nebst anderweitigen empyrischen Forschungen über die magnetischpolaren Kräfte, ausgeführt in 37 graph. Darstellungen auf 31 Tafeln in Folio. Leipzig 1844. 1. Lieferg. 3 thlr.

Lardner and Walker, Treatise on Electricity, Magnetism and Meteorology. 2 vol. London 1844. 8. 12 s.

Haldat, docteur de, Recherches sur la concentration de la force magnétique vers les surfaces des corps magnétisés. In 8. Nanci 1845.

Nuovo igrometro, memoria del professore G. Alessandro Majocchi. Estratta dagli - Annali di fisica, chimica etc. In 8. con e tavola litografica.

Kämtz, L. F., A complete course of Meteorology. With Notes by Martins, and an appendice by L. Lalanne. Translated, with additions, by Charles V. Walker. 1 vol. post 8vo 15 Plates. London 1844. 12 s. 6 d.

Digitized by Google

Chavannes de la Giraudière, Le Vapeur depuis sa découverte jusqu'à nos jours. Resumé historique de son application aux usines, etc. In 18. plus une pl. Tours 1844.

Oersteds Naturlare. 2 H. Copenhagen 1844. 90 s.

Mathematische Psychologie.

Neue Behandlung des mathematisch-psychologischen Problems von der Bewegung einfacher Vorstellungen, welche nach einander in die Seele eintreten. Zugleich als Beitrag zu einer schärfern Begründung der mathematischen Psychologie Herbart's. Von Theodor Wittstein, Dr. Phil. Hannover 1845. 4.

Bekanntlich hat Herbart der Psychologie eine mathematische Grundlage zu geben und diese Wissenschaft dadurch schärfer als früher zu begründen gesucht. Unter den Mathematikern, die sonst mit Recht so gern Alles eifrig ergreifen, was eine neue Anwendung ihrer Wissenschaft darzubieten verspricht, ist indess, so viel uns bekannt geworden ist, bis jetzt nur Herr Professor Drobisch in Leipzig mit Glück auf dem von Herbart eingeschlagenen Wege weiter gegangen. Daher ist es sehr erfreulich, dass nun auch der Herr Vf. der vorliegenden Schrift seinen Scharfsinn dieser neuen Anwendung der Lehren der Mathematik zuwendet. Auch ist dieselbe allen denen, welche die mathematische Psychologie noch gar nicht kennen, vorzüglich deshalb zu empfehlen, weil der Herr Vf., ohne sonst irgend etwas vorauszusetzen, von den ersten Begriffen beginnt und namentlich auch, was insbesondere die Mathematiker dankbar erkennen werden, alle diejenigen Sätze deutlich und bestimmt hervorhebt, welche als Axiome der neuen Wissenschaft zum Grunde gelegt werden; denn nur auf diese Weise wird es möglich, über die Sicherheit und Strenge der weiteren Betrachtungen gehörig urtheilen zu können. Ausser der erwähnten kurzen Darstellung der Elemente der mathematischen Psychologie überhaupt, welche den Inhalt der Vorbegriffe und der ersten und zweiten Abtheilung bildet, wird dann in der dritten Abtheilung noch eine neue, von den von Herbart selbst und nachher von Drobisch in der Schrift Quaestionum mathematico-psychologicarum Fasc. I. Spec. IV. gegebenen Auflösungen verschiedene, Auflösung des auf dem Titel näher bezeichneten psychologischen Problems gegeben. Je mehr es allerdings zu wünschen ist, dass immer mehr Kräfte sich der weiteren Bearbeitung der mathematischen Psychologie zuwenden, desto mehr empfehlen wir den Lesern des Archivs neben den frühern Schriften von Drobisch auch die vorliegende Schrift.

XXIII.
Literarischer Bericht.

Ueber mathemathische Methode.

Untersuchungen über die wissenschaftliche Methode mit besonderer Anwendung auf die Mathematik, von Dr. Aloys Mayr, öffentlichem ordentlichem Professor der Mathematik und Astronomie an der Julius-Maximilians-Universität zu Würzburg, Würzburg. 1845. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

In den nachfolgenden Untersuchungen, sagt der Herr Vf. in der Vorrede, habe ich die wesentlichsten Fragen über die wissenschaftliche Methode erörtert, die Fragen über die Hilfsmittel des Denkens, über die Definitionen und Zeichensprachen, über die Axiome und Beweise, über die Auffindung der Lehrsätze und über die Elementarisirung und Ordnung aller Wissenschaften. Mehrere dieser Fragen habe ich von einem neuen Gesichtspunkte aus betrachtet, wie die Lehren über die Zeichen und Axiome; für andere, wie für die Lehren über die Analogie und Induction, habe ich bestimmte und unabänderliche Gesetze festzustellen gesucht. Ich war bemüht, die Beweise, sowohl die directen als die indirecten, ihrem innersten Wesen nach aus einander zu setzen, und gleichsam zu zergliedern, und den ganzen Vorgang, wie er in allem Denken stattfindet, und immerdar stattfinden wird, zu enthüllen und aufzudecken. Vor allem wünsche ich aber, dass die Untersuchungen über die bestimmten, der Mathematik coordinirten, Vernunft-Wissenschaften beachtet, und einer ernsten Prüfung unterworfen werden mögen. Ich habe die Lehren über die Methode mit beständiger Rücksicht auf die Mathematik untersucht und vorgetragen, und die gefundenen Resultate in dieser sichersten und am meisten vorgeschrittenen Wissenschaft zu erproben gesucht, einmal weil in ihr die meisten Aussichten auf einen günstigen Erfolg gegeben sind, und dann, weil es besser ist, sogleich zu bestimmten Untersuchungen überzugehen, und die strengen Forderungen der Methode an sich selber zu stellen, anstatt die Untersuchungen im Allgemeinen zu halten, und Forderungen an Andere zu machen, die man vorher nicht an sich selber gemacht hat. Endlich kann es für eine allgemeine Methodenlehre nur erwünscht sein, wenn sie die Probe einer wirklichen Wissenschaft aushalten kann. Uebrigens bin ich bemüht gewesen, die Gesetze in solcher Allgemeinheit zu entwickeln, dass sie nicht für die Mathematik allein, sondern für alle Wissenschaften gelten mögen.

Ueber diese vorzugsweise ein philosophisches Interesse in Anspruch nehmende Schrift, deren eigentliche Tendenz vorher absichtlich mit den eigenen Worten des Herrn Vfs. angegeben worden ist, ein bestimmtes Urtheil auszusprechen, darf sich der Unterzeichnete nicht anmaassen, weil strenge gründliche umfassendere philosophische Studien ihm seit längerer Zeit ferner gelegen haben. Aber so viel darf derselbe versichern, dass ihn bei der Lectüre dieser Schrift die nüchterne und deutliche, mehr an ältere philosophische Schulen erinnernde, ein vages philosophisches Räsonnement überall verschmähende Darstellung wohlthuend angesprochen, und er selbst aus derselben manche Belehrung geschöpft hat. Er wünscht daher auch, dass diese Schrift insbesondere auch von Lehrern der Mathematik an höhern Unterrichtsanstalten nicht ganz unbeachtet bleiben möge, welches öfters das unverdiente Loos solcher die Philosophie mit der Mathematik in Verbindung bringenden oder die erstere auf die letztere anwendenden Schriften zu sein pflegt. Auch glaubt derselbe, dass die Mathematiker in der vorliegenden Schrift mehr für ihre Wissenschaft wirklich Erspriessliches finden werden, als in manchen andern zu seiner Kenntniss gekommenen Schriften von ähnlicher Tendenz, so sehr dieselben auch oft auf einem hohen Kothurn einherschreiten mögen.

G.

Geschichte der Mathematik.

Storia della scienze matematiche in Italia, di Guglielmo Libri. Versione di Luigi Masieri dottore in fisica e matematica.— Milano 1843—44. Puntata V e VI. In 8. 1. 30.
(M. s. Literar. Bericht Nr. XVII. S. 257.)

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Rost, F. M., die Elemente der Zahlen und Raumgrössenlehre. 1. Band. Arithmetik und ebene Geometrie. 2te vermehrte Aufl. mit 3 Figurentafeln. gr. 8. Berlin 1845. 1 Thlr. 16 ggr.

Lehmus, Dr. D. C. L., die reine Mathematik und die mechanischen Wissenschaften. — Zum Leitfaden für den Lehrer, zur Ergänzung für den Schüler bearbeitet. Mit einer Figurentafel. gr. 8. Berlin 1845. 1 Thlr. 12 ggr.

Reynaud, Baron, Traité élémentaire de mathématiques et de physique suivi de notions sur la chimie et sur l'astronomie. 4ème edition. Tom. I. Paris 1845. 7 fr. 50 c.

Digitized by Google

Christie, S. H., Elementary Course of Mathematics, for the use of the Royal Military Academy, and for Students in general. Vol. I. Arithmetic and Algebra. 8vo. London 1845. 21 s.

Elementi di matematica, continenti l'aritmetica, la geometria solida e piana e la trigonometria piana e sferia. Napoli. Quattro volumi in 8. 11. 20.

Arithmetik.

Pelliat, A. Examen critique de l'arithmétique et exposition de la théorie rationelle de cette science. Mémoire adressé à l'acad. des sciences. Paris 1845. 4. 40 cent.

Ohm, Dr. Martin, Kurzes, gründliches und leichtfassliches Rechnenbuch, brauchbar in allen Bürger-, Gewerbs- und Militair-Schulen, besonders aber an lateinischen Schulen und Gymnasien. Nebst einem Anhange, Tabellen zur Vergleichung der Maasse und Gewichte verschiedener Länder und namentlich der Zollvereins-Staaten enthaltend. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Erlangen 1845. gr. 8. 10 ggr.

Emerson's Unterricht im Kopfrechnen, für deutsche Schulen bearbeitet von Dr. Bassler. 8vo. Leipzig 1845. 6 ggr.

Francoeur, L. B. Traité d'arithmétique appliquée à la banque, au commerce, à l'industrie etc. In 8. Paris 1845. 4 fr.

Exercises in Arithmetic, after the Method of Pestalozzi. London 1844. 1 s. 6 d.

Lübsen, H. B., ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des prakt. Lebens bearbeitet. 2te verb. und verm. Aufl. gr. 8. Oldenburg 1845. 1 thlr. 8 ggr.

Lefebure de Fourcy, Leçons d'algèbre. Cinquième édition. In 8. Paris 1844. 7 fr. 50 c.

Young, J. R. An Elementary Treatise on Algebra, Theoretical and Practical; with an Appendix on Probabilities and Life Annuities. 4. edit., considerably enlarged. 12mo. Lond. 44. 6 sh.

Arndt, J. A., Beispiele und Aufgaben aus allen Theilen der Arithmetik und Algebra. 2. Aufl. gr. 8. Leipzig 1845. 1 thlr. 6 ggr.

Die erste Auflage dieser zu empfehlenden Aufgabensammlung ist im Literarischen Bericht. Nr. II. S. 25. angezeigt.

Digitized by Google

Poinsot, M., Reflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres. (Aus Liouville's Journal.)

Theorie der independenten Darstellung der höhern Differentialquotienten. Von Reinhold Hoppe. Leipzig. 1845. 8. 1 thlr.

Es ist in dem Archive öfters darauf hingewiesen worden, wie sehr in der Analysis noch eine vollständigere Ausführung der Lehre von den höhern Differentialquotienten, namentlich eine Darstellung derselben für die verschiedenen Functionsformen in allgemeinen Formeln zu wünschen sei. Denn wenn auch für die ältere Analysis diese Lehre von geringerer Bedeutung war, weil bei den Reihenentwickelungen durch den Maclaurin'schen Satz die Untersuchung der Convergenz oder Divergenz der Reihe auf eine unverzeihliche Weise bei Seite gesetzt wurde, und deshalb bloss die Werthe der Differentialquotienten von den verschiedenen Graden für den speciellen Werth Null der unabhängigen veränderlichen Grösse zur Anwendung kamen, so erfordert doch das gegenwärtige strengere Verfahren der neueren Analysis bei der nicht mehr zu umgehenden Entwickelung des sogenannten Restes der Maclaurin'schen Reihe durchaus die Kenntniss des allgemeinen *n*ten Differentialquotienten der betreffenden Function in seiner allgemeinsten Gestalt für jeden Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse x, oder die allgemeine Darstellung dieses *n*ten Differentialquotienten in independenter Form als Function von x. Uebrigens aber ist die Kenntniss der allgemeinen Werthe der höhern Differentialquotienten auch noch für manche andere Geschäfte der Analysis von Wichtigkeit. Daher halten wir es für ein verdienstliches Unternehmen, dass der Herr Vf. der vorliegenden Schrift in derselben die Theorie der independenten Darstellung der höhern Differentialquotienten in einer solchen Ausführlichkeit im Zusammenhange zu entwickeln versucht hat, wie dies früher noch nicht geschehen ist. Das wissenschaftliche Interesse dieser von dem mathematischen Scharfsinne des Herrn Vfs. und seiner Gewandtheit in analytischen Entwickelungen, namentlich auch in der Zurückführung sehr zusammengesetzter Ausdrücke auf einfachere Formen, theilweise durch Einführung zweckmässiger Bezeichnungen, ein recht erfreuliches Zeugniss ablegenden Schrift wird aber jedenfalls besonders noch dadurch erhöhet, dass es demselben gelungen ist, eine allgemeine Methode zur Herleitung allgemeiner Ausdrücke für die höhern Differentialquotienten zu finden, und dieses ganze Geschäft, mehr als dies bisher geschehen ist, auf allgemeine Principien zurückzuführen und, gewissermassen wenigstens, zu einer eigenthümlichen Rechnungsmethode abzurunden, worüber hier nach dem Zwecke und der ganzen Anlage dieser Literarischen Berichte leider etwas Näheres nicht beigebracht werden kann, sondern auf die Schrift selbst verwiesen werden muss. Nur so viel wollen wir bemerken, dass in der Einleitung die Theorie des Summenzeichens ausführlich entwickelt, und *A.* von den einfachen Summen; *B.* von den Doppelsummen; *C.* von den vielfachen Summen; *D.* von der Anwendung des Summenzeichens auf Summen unendlicher Reihen; *E.* von der Anwendung des Summenzeichens zur Multiplication der Reihen, gehandelt worden ist. Ausser den

ihm eigenthümlichen Untersuchungen hat der Herr Vf. auch die mehr vereinzelt stehenden Arbeiten seines Vorgänger nicht unberücksichtigt gelassen, und besonders im letzten (vierundzwanzigsten) Kapitel von denselben gehandelt, wenn wir auch der Meinung sein müssen, dass er in dieser Beziehung noch etwas mehr hätte thun können, was aber wohl zum Theil in einer besonders bei jüngeren Gelehrten leicht zu entschuldigenden, nicht vollständigen Kenntniss der betreffenden Literatur seinen Grund haben mag.

Ausser wegen ihres vorher hervorgehobenen allgemein wissenschaftlichen Interesses glauben wir die vorliegende Schrift auch allen den Studirenden, welche, nachdem sie einen Cursus der Differentialrechnung gehört haben, sich in diesem wichtigen Theile der höheren Analysis noch mehr festsetzen und Uebung in allgemeinen analytischen Entwickelungen erwerben wollen, aus Ueberzeugung empfehlen zu dürfen, indem sie aus dem auf verständige Weise betriebenen Studium derselben gewiss einen weit grösseren und weit reellern Gewinn für ihre weitere Ausbildung schöpfen werden, als aus den gewöhnlichen Beispielsammlungen, weshalb wir wünschen, dass diese Schrift in die Hände recht vieler solcher Studirender kommen möge.

Zugleich haben wir durch die vorhergehende etwas ausführlichere Anzeige dem Herrn Vf. das Interesse, mit welchem wir seine Schrift gelesen haben, an den Tag legen wollen.

Thomas Tate, Treatise on Factorial Analysis, with the Summation of Series; containing New Developments of Functions etc. London 1845. 4 sh.

In der neuesten Nummer der astronomischen Nachrichten (No 529. Bd. XXIII. S. 1.) empfiehlt Herr Geheimerath Bessel als die besten jetzt existirenden logarithmischen und trigonometrischen Tafeln unter denen, welche die trigonometrischen Linien von Secunde zu Secunde bis auf sieben Decimalen enthalten, die kürzlich von dem in Diensten der Ostindischen Compagnie stehenden Capitain Herrn Shortrede herausgegebenen, schon im Literarischen Berichte Nr. XIX. S. 291. kurz angezeigten, Tafeln. So bald ich selbst diese Tafeln erhalten habe, werde ich von denselben eine ausführlichere Anzeige in dem Literarischen Berichte liefern. G.

J. A. Hansen, (Onderwyzer in de Wiskunde te Deventer.) Tafels ten dienste bij het meetkunstig rekenen, bevattende de Kwadraten en Kubieken, de Kwadraat- en Kubiekwortels, en de Logarithmen der getallen van 1 tot 1000; benevens de Logarithmus-Sinus en Tangen, voor de vijf eerste of laatste graden voor elke minuut, overigens van 10 tot 10 minuten; kl. 8vo. Te Deventer, bij J. P. Brinkgreve. 1844. f 0,40.

Böhm, J. G., logarithmisch - trigonometrisches Handbuch. gr. 8. Innsbruck, 1845. 14 ggr.

Digitized by Google

Geometrie.

Elemente der Geometrie, oder theoretische und praktische Planimetrie, von Dr. Constant Wurzbach, vormals Officier in der k. k. Armee, gegenwärtig Universitäts-Bibliotheks-Scriptor und Mitglied der philosophischen Facultät an der k. k. Franzens Universität zu Lemberg. Mit 352 Figuren auf 19 Tafeln. Lemberg 1845. 8. 1 thlr. 12 ggr.

Diese zunächst für den Gebrauch solcher Zöglinge, welche sich zum Eintritt in's Militair vorbereiten, bestimmte Schrift enthält, ohne irgend eine besondere Eigenthümlichkeit, die gewöhnlichen Elemente der ebenen Geometrie und die ersten Anfangsgründe des Feldmessens, so weit dabei trigonometrische Kenntnisse nicht in Anspruch genommen werden, in leicht verständlicher Darstellung. Ausser den gewöhnlichen Messinstrumenten sind in der Lehre vom Feldmessen auch einige andere kleine, aber zweckmässig eingerichtete Instrumente beschrieben, wie z. B. der sogenannte Katopter zum Abstecken senkrechter Ordinaten auf einer gegebenen Abscissenlinie, welcher bekanntlich aus nichts weiter als aus einem gegen eine bestimmte Visirlinie unter einem Winkel von 45° geneigten ebenen Spiegel besteht und hiernach gewiss leicht von einem Jeden selbst construirt werden kann, aber allerdings allgemeiner als bisher eingeführt zu werden verdient, da er die Stelle des Winkelkreuzes oder der Kreuzscheibe vertreten kann, und vor letzterer jedenfalls den Vortheil der weit leichteren Transportabilität besitzt, da man ihn in der Tasche bei sich tragen kann. Gewiss wird übrigens die Genauigkeit dieses kleinen sehr zweckmässigen Instruments erhöhet werden, wenn man es mit einem kleinen Fernrohre versieht und die nöthige Vorrichtung zur Correction der Lage des Spiegels gegen die Visirlinie anzubringen nicht versäumt. Alles natürlich auf die einfachste Weise.

Die harmonischen Verhältnisse. Ein Beitrag zur neueren Geometrie von C. Adams (Lehrer der Mathematik an der Gewerbsschule zu Winterthur). Erster Theil. Mit 4 Kupfertafeln. Winterthur 1845. 8.

Seiner Lehre von den Transversalen, welche die Leser des Archivs aus Nr. XV. des Literarischen Berichts. S. 230. kennen, lässt der Herr Vf. jetzt die vorliegende Schrift über die harmonischen Verhältnisse folgen, deren erster Theil den folgenden Inhalt hat: Erster Abschnitt. Die Verhältnisse und Strahlenbüschel: a) das harmonische Verhältniss; b) das anharmonische Verhältniss; c) die Involution. Zweiter Abschnitt. Anwendung der harmonischen Verhältnisse auf geometrische Figuren: a) geradlinige Figuren; b) der Kreis. — Der zweite künftig erscheinende Theil wird die harmonischen Verhältnisse des körperlichen Raumes, und eine ausführliche Theorie der Kegelschnitte, der dritte (vielleicht noch erscheinende Theil) die Theorie der Flächen des zweiten Grades enthalten. Der Herr Vf. bezeichnet in der sehr lesenswer-

then Vorrede, in welcher er das Verhältniss der älteren und neueren Geometrie zu einander auf eine, wie es uns scheint, sehr richtige Weise würdigt, dieses Werk im Allgemeinen als einen Versuch, in einem einzelnen Zweige die neuere Geometrie so mit der alten zu verschmelzen, dass jene ihren Charakter der Allgemeinheit, diese ihre wohlbegründete Strenge der Form beibehält, und dennoch beide ein eng verbundenes, abgeschlossenes und organisches Ganze bilden, wobei sich von selbst verstehe, dass er die vorhandenen ihm zugänglichen Hülfsquellen benutzt habe, dass aber manche Partieen, wie z. B. die Collineation, in ganz neuer, rein geometrischer, Darstellung erscheinen. Wir können diesem Zwecke, welchen der Herr Vf. sich bei dem vorliegenden Werke, und auch schon früher bei seiner Lehre von den Transversalen vorgesetzt hat, nicht bloss unsern vollkommenen Beifall geben, sondern haben von jeher selbst die Ueberzeugung gehabt, dass eine solche Verschmelzung der sogenannten neueren Geometrie mit der alten dringend Noth thue, wenn erstere wahrhaft fruchtbringend wirken soll, weshalb wir der Meinung sind, dass die vorliegende, von uns freudig begrüsste Schrift, einem wahren Bedürfnisse theilweise abhelfe, und der Herr Vf. alle Ermunterung verdiene, auf dem betretenen Wege rüstig vorwärts zu schreiten. Zugleich wird er dann sehr dankenswerthe Vorarbeiten zu einem das ganze Feld der Wissenschaft umfassenden, völlig consequent durchgeführten Lehrgebäude der Geometrie liefern, welches freilich immer noch ein sehr fühlbares Bedürfniss bleibt, wie der Herr Vf. auch selbst in der Vorrede angedeutet hat. Dass die rechte Zeit zur Herausgabe eines solchen grossen Werks aber noch nicht gekommen ist, davon sind wir ebenfalls vollkommen überzeugt.

Die Darstellung in der vorliegenden Schrift ist sehr deutlich, einfach und streng, und dass dabei überall die euklidische Methode, welche ihr altes wohlbegründetes Ansehen, so viel man dasselbe auch zu schmälern sich von manchen Seiten her bemühen mag, doch gewiss niemals verlieren wird, befolgt worden ist, verdient besondere Anerkennung, und wird gewiss zur Erhöhung des Nutzens, welchen der Herr Vf. durch diese Schrift zu stiften beabsichtigt und gewiss auch stiften wird, wesentlich beitragen. Eben so war es der Tendenz derselben völlig angemessen, dass analytische oder vielmehr sich algebraischer Hülfsmittel bedienende Betrachtungen ganz ausgeschlossen worden sind, und die Darstellung durch Proportionen nach der Weise der Alten consequent durchgeführt worden ist. Dass endlich auch manches Neue in dieser sich auch durch ihre äussere Ausstattung sehr empfehlenden Schrift enthalten ist, haben wir schon oben angedeutet.

Wir glauben daher, dass diese Schrift in jeder Beziehung den Liebhabern der feineren Geometrie empfohlen zu werden verdient, und auch wegen ihrer grossen Deutlichkeit von gründlich vorbereiteten Schülern zu ihrer weitern geometrischen Ausbildung mit grossem Vortheil benutzt werden kann, eben so wie des Herrn Vfs. früher erschienene Lehre von den Transversalen.

Lenthéric. Cours de géométrie théorique et pratique. Montpellier 1845. In 8. Avec 9 planches. 4 fr.

Démonstration géométrique de la fausseté de ce principe:

Dans tout triangle les angles égaux sont opposés à des côtés égaux, et réciproquement, sur lequel reposent nombreux théorèmes. Avec figures. Réforme de la géométrie. Premièr age. In 8. Tours 1844.

L. Dupin, Stéréométrie, ou Décomposition du cube en polyèdres réguliers, irréguliers et corps ronds formant entre eux plus de 120 polyèdres, appliqués à l'étude de la géométrie, etc. In 12, avec 12 pl. Paris 1844.

G. P. Dandelin, Mémoire sur quelques points de métaphysique géometrique présenté à l'acad. le 3. Dec. Bruxelles 1842. 4. mit 3 Taf. (Auch im 17. Bande der „Nouveaux mémoires de l'acad. de Brux." abgedruckt).

Guiot, Auguste, Elémens de perspective linéaire, comprenant la théorie et les procédés pratiques de cette science, etc. In 8. plus un atlas in 4. oblong d'un quart de feuille et 37 pl. Paris 1845. 15 Fr.

Thomson, J., First Six and the Eleventh and Twelfth Books of Euclid's Elements, with Nots and Illustrations, the Elements of Plane Trigonometry, and an Appendix; in Four Books. 3d edition. Part I. containing the First Six Books of Euclid, and the Elements of Plane Trigonometry. 12. London 1844. 3 s.

The Elements of Euclid; containing the First Six Books, and the First Twenty-one Propositions of the Eleventh Books. With the Planes Shaded. From the Text of Dr. Simson. 12. Cambridge 1845. 6 s.

W. Rutherford & S. Fenwick, elementary Propositions in the geometry of Coordinates, both of two and three dimensions. London. 1845. 2 sh. 6 d.

Dietrich, Carl, analytische Geometrie auf der Kugel. gr. 8. mit 1 Figurentafel. Berlin 1845. 8 ggr.

A Treatise on the Application of Analysis to Solid Geometry, by D. F. Gregory and W. Walton. London 1845. cloth. 10 s. 6 d.

Lucas, S. P. A., (auteur de la „Quadrature du cercle") traité d'application des tracés géométriques aux lignes et aux surfaces du deuxieme degré. Tome I. 4. Paris 1844.

Anger de la Loriais, Traité des lignes du second ordre. 2 Bde. Paris 1845. Mit 47 Tafeln.

Praktische Geometrie.

Elliol, complete treatise on practical Geometry and mensuration with numerous exercices. 8. Edinburgh 1845. 5 sh.

Elliol, Key to it. 6 sh.

Bonajuto Del-Vecchio, Brevi cenni geometrico-pratici. Florenz. 12. Mit 12 Taf. 3½ l.

Trigonometrie.

Rummer, F., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst einer Sammlung von Aufgaben. Als Anhang zu dessen Lehrbuch der Geometrie. Mit 2 Figurentafeln. 8. Heidelberg 1845. 9 ggr.

Mazure et Bellissant, Tables trigonométriques, donnant pour touts les angles de quart de cercle calculés de 5 en 5 minutes centésimales et appliqués à toutes les hypoténuses possibles, les sinus, cosinus ou segments des bases avec des décimales, ainsi que les compléments de touts les angles; servant de table des cordes et propres à ramener à l'horizont les lignes et surfaces inclinées, etc. Paris 1844. In 8. 6 f.

Mechanik.

Denzler, L., Theoretische Abhandlung über d. Flugbahn d. Geschosse. Nebst einem Anhang, enth. verschiedene dem Artillerieofficier unentbehrliche mathemat. Notizen. Mit 25 Figuren auf 2 Tafeln. Zürich 1845. 10 ggr.

Praktische Mechanik.

Gerstner, Franz Joseph, Ritter von, Handbuch der Mechanik, mit Beiträgen von neuern englischen Constructionen vermehrt und herausgegeben von F. A. Ritter von Gerstner. gr. 4.

Digitized by Google

3 Bde. (I. Bd. 83 Bogen, II. Bd. 69 Bogen u. III. Bd. 72 Bogen). Mit 109 Kupfertafeln in gr. 2. Wien 1844. 24 thlr.

Demme, der praktische Maschinenbauer. Ein Handbuch für Maschinenbauer, Mechaniker, Kunstdrechsler und Fabrikbesitzer. Nach den besten Werken über diesen Gegenstand bearbeitet. 18. Lief. Mit 31 Taf. Abbildungen. 8. 2 thlr. 16 ggr.

Demme, der praktische Maschinenbauer. 19. Lieferung. 8. Mit 24 Tafeln Abbildungen. Quedlinburg 1845. 2 thlr. 12 ggr.

Poncelet, J. V., Traité de mécanique industrielle, exposant les différentes methodes pour déterminer et mésurer les forces motrices ainsi que le travail mécanique des forces. Bruxelles. Avec beaucoup de planches. 1844. 18 fr.

De Pambour, Théorie des machines à vapeur, suivi d'un appendice, contenant etc. 2me edition. In 4. avec un atlas in 4. Paris 1844. 50 fr.

Astronomie.

Eichstrom, F., graphische Darstellung des Laufes der Planeten im J. 1845. Ein Blatt gr. Imp. Fol. Mit erläuterndem Text in 8. Stuttgart 1845. 12 ggr.

Le Hon, Manuel d'astronomie, de météorologie et de géologie, à l'usage des gens du monde, accompagné de planches pour l'intelligence du texte, in 8. Bruxelles 1844. 1 thlr. 12 ggr.

Blunt, C. F., The Beauty of the Heavens, a practical Display of the Astronomical Phenomena of the Universe, exhibited in 104 Scenes, accompanying and illustrating a fămiliar Lecture on Astronomy, from original Drawings, Paintings and Observatory Studies. New edit. London 1845. 2 sh. colorirt 28 sh.

Practical Astronomy and Geodesy. By John Narrien, Professor of Mathematics in the Royal Military College, Sandhurst. Being the Third Volume of the Sandhurst College Text-Books. 8vo. London 1845. 14 sh.

Connaissance des temps ou des mouvemens célestes, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1847; publiée par le bureau des longitudes (avec des additions). In 8. Paris 1845. Avec additions. 8 fr. 50 c.; sans additions. 5 fr.

F. Kaiser, De Sterrenhemel, verklaard. Amsterdam 1845. 3¾ fl.

Digitized by Google

Physik.

Pouillet, Elemens de physique experimentale et de météorologie. 4. édition. 2vol. 8. Paris 1844. 16 fr.

Archives de la Société magnétique de Cambrai. Vol. I. In 8. Cambrai 1845. 24 fr.

Sabine, Observations made a the Magnetical and Metereological Observatory at Toronto, in Canada. Printed by Order of Her Majesty's Governement, under the superintendence of Lieut.-Col. Edw. Sabine. Vol. 1. London 1840. 41. 42. 4. 2 l. 2 sh.

Hopkins, T., On the Atmospheric Changes which produce Rain, Wind, Storms, and the Fluctuations of the Barometer. Manchester 1845. 8. 4 s.

Vermischte Schriften.

The Cambridge Mathematical Journal. Nr. XXI. Mai 1844. I. On a Law existing in the Successive Approximations to a Continued Fraction. — II. Notes on Conic Sections. — III. On the Theory of Algebraic Curves. — IV. The Polar Equation to the Tangents to a Conic Section. — V. Demonstration of a Proposition in Physical Optics. — VI. On a Multiple Definite Integral. — VII. Chapters in the Analytical Geometry of (*n*) Dimensions. — VIII. On a Question in the Theory of Probabilities. — IX. On the Balance of the Chronometer. — X. On a Problem in Precession and Nutation. — XI. Notes on Magnetism. Nr. II. — XII. Mathematical Note.

Nr. XXII. November 1844. I. Memoir of the late D. F. Gregory, M. A., Fellow of Trinity College, Cambridge. — II. On the Partial Differential Equations to a Family of Envelops. — III. On the Axis of Spontaneous Rotation. — IV. On Brianchon's Hexagon. — V. Notes on Linear Transformations — VI. On a Problem in Central Forces. — VII. Note on the Spontaneous Axis of Rotation. — VIII. Applications of the Symbolical Form of Maclaurin's Theorem. — IX. On the use of the Symbol $e^{\theta\sqrt{-1}}$ in certain Transformations. — X. Note on Orthogonal Isothermal Surfaces. — XI. On the Solution of Equations in Finite Differences. — XII. Note on Geometrical Discontinuity. — XIII. Note on the Law of Gravity at the Surface of a Revolving Homogeneous Fluid. — XIV. Mathematical Note.

The Mathematician. Edided by Thomas Stephens Davies, F. R. S. L. et Ed. F. S. A.; William Rutherford, F. R. A. S.; and Stephen Fenwick. London 1844.

Digitized by Google

Number I. Prospectus. — On Conditional Coefficients, and on some Elementary Expansions. — On the Ietersection of two Curves of the Second Degree. — Properties of the Associated Spherical Triangles. — On the Determination of the Magnitude and Position of a Sphere Tangent to four given Spheres in mutual contact. — On the same. — On the Theory and Application of Lagrange's Method of Multipliers. — On Conjugate Diameters of Lines and Surfaces of the second order. — Mathematical Exercices. — On the Algebraical Analysis of Porisms.

Number II. On the Algebraical Analysis of Porisms (concluded). — Geometrical Propositions. — Solutions of a Problem relating to Attraction. — Analytical Demonstration of a Geometrical Theorem. Interesting Applicaton of the preceding Theorem. — On Horner's Synthetic Division. — On the Straight Line of Quickest Descent. — Properties of the Parabola. — On the Transformation of Algebraic Equations — Demonstration of the Four Fundamental Formulas of Trigonometry. — Solutions of Mathematical Exercices (continued). — A Locus: from Lhuilier's Polygonometrie. — On the Conditions of Equilibrium of Forces acting on Four Spheres in mutual contact. — Mathematical Notes. — Horner on Algebraic Transformation (to be continued).

(Preis der Nummer 3 s. 6 d.).

Auch von dieser neuen englischen mathematischen Zeitschrift wird das Archiv nicht bloss fortlaufend den Inhalt, sondern auch Auszüge, insofern dieselben für das betreffende Publikum vorzugsweise von besonderem Interesse sind, liefern.

Annuaire pour l'an 1845. Présenté au Roi par le bureau des longitudes. In 18. Paris. Sans notices. 1 fr.

Berichtigung.

In dem Ausdrucke des vorletzten Integrals auf S. 191. (Z. 6. v. u.) im 2ten Hefte des sechsten Theils setze man $\log 8(2m-1)$ für $\log 2(2m)^2$.

XXIV.
Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Guy, M. P.: La division abrégée, ou Méthode rigoureuse et facile pour simplifier cette opération de l'arithmétique. In 8. 1 pl. Paris 1845. 1 fr. 50 c.

Lehrbuch der Mathematik für den Schul- und Selbstunterricht von Dr. W. A. Wilde, Professor am Gymnasium zu Stargard. Erster Band. Auch unter dem Titel: Lehrbuch der Arithmetik für den Schul- und Selbstunterricht. Erster Band. Die sechs Grundrechnungen. Leipzig 1845. 18 ggr.

Dieses neue Lehrbuch der Mathematik ist auf vier Bände berechnet, von denen die beiden ersten der Arithmetik, die beiden andern der Geometrie gewidmet sein werden. Es soll die Elementar-Mathematik mit Einschluss der Kegelschnitte enthalten, und jedes Bändchen soll ein für sich abgeschlossenes Ganze bilden, auch einzeln ausgegeben werden, was dem zweckmässigen Gebrauche des Buchs beim Unterrichte offenbar nur förderlich sein kann. Der vorliegende erste arithmetische Theil enthält nach einer Einleitung in die Mathematik überhaupt in neun Abschnitten: die Lehre von der Zahlenbildung im Allgemeinen (Anhang: Von Zahlensystemen im Allgemeinen); die Addition und Subtraction; die negative Zahl; die Multiplication und Division; unbestimmte Division oder von der Theilbarkeit der Zahlen im Allgemeinen; die gebrochene Zahl; den Decimalbruch; Potenziation und Radication; die irrationale Zahl (Anhang: die imaginäre Zahl).

Schon in dieser Aufzählung wird man ein Streben nach systematischer Anordnung bemerken. Die Beweise sind überall vollständig gegeben, da der Vf., der Vorrede zufolge, es aus mehreren triftigen Gründen nicht billigen kann, wenn in den meisten Lehrbüchern die leichtern Beweise ganz ausgelassen und viele andere nur kurz angedeutet werden. Die Methode der Darstellung ist mit Recht die euklidische, und überhaupt haben wir, so weit wir uns bis jetzt mit dem Buche bekannt gemacht haben, Strenge und Deutlichkeit nirgends vermisst. An einer hinreichenden An-

Digitized by Google

zahl von erläuternden Beispielen fehlt es gleichfalls nicht, und die Arbeit kann daher überhaupt als eine wohlgelungene bezeichnet werden. Das baldige Erscheinen der übrigen Theile ist zu wünschen.

Encyklopädische Darstellung der Theorie der Zahlen und einiger anderer damit in Verbindung stehender Gegenstände; zur Beförderung und allgemeineren Verbreitung des Studiums der Zahlenlehre durch den öffentlichen und Selbst-Unterricht elementar und fasslich vorgetragen von A. L. Crelle. (Besonders abgedruckt aus dessen Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XXVII, XXVIII und XXIX.) Erster Band. Berlin 1845. 4. 4 thlr.

Nachdem der geehrte Herr Vf. in der Vorrede dieses ausführlichen Werks über die Zahlenlehre oder Theorie der Zahlen deren Begriff und Verhältniss zu den übrigen Theilen der Mathematik gehörig festgestellt, sich über den Nutzen dieser grösstentheils der neueren Zeit angehörenden Wissenschaft ausgesprochen und endlich auch darauf hin gewiesen hat, dass dieselbe noch weit weniger allgemein bekannt und verbreitet sei als die meisten übrigen Theile der Mathematik, spricht er sich von S. XI. an über den eigentlichen Zweck und die Einrichtung seines Werks bestimmter auf folgende Art aus.

„Aus diesen Erwägungen“ sagt er „geht nun hervor, dass es vielleicht ein nützliches Bemühen sein dürfte, zu versuchen, ob sich nicht dazu beitragen lasse, die Theorie der Zahlen mehr zum Gemeingut zu machen; und von diesem Bemühen geht die folgende Sammlung von Sätzen aus. Ihrer Einrichtung und Anordnung liegen folgende Betrachtungen zum Grunde.“

„Damit Wahrheiten, deren Erkenntniss die Urtheilskraft in Anspruch nimmt, recht Vielen von verschiedener Fassungskraft, und selbst Personen im jugendlichen Alter, zugänglich werden mögen, dürfte es vor Allem nöthig sein, sie so aus einander zu setzen, dass das Urtheil bei den Sätzen und Beweisen nur Schritt um Schritt dem Vortrage folgen darf, um zum Ziele zu gelangen. Alle einfachen Schlussfolgen müssen, scheint es, angegeben, keine darf übersprungen werden; denn zu sagen, welche Schlussfolgen und wie sie an einander zu fügen sind, oder fehlende zu ergänzen, kann nicht eine Aufgabe für den Schüler sein, da selbst öfters über das Erste die Lehrer nicht einig sind und das Rechte und Beste verfehlen können, wie es schon der Umstand zu erkennen giebt, dass gar viele Verschiedenheit in der Anordnung und Aufeinanderfolge der Sätze und in der Art und Anordnung der Beweise möglich ist.“

„Sodann wird sich das vorliegende Buch der äussersten Deutlichkeit, nicht bloss durch Vollständigkeit der Beweise und Erörterungen, sondern auch durch die Art ihrer Darlegung befleissigen.“

„So nun, von der Ansicht ausgehend, dass einmal alles nur Mögliche geschehen sollte, um den Lernenden mit der möglichsten Leichtigkeit auf den Standpunkt der vollendeten Deutlichkeit und Einsicht zu führen, hat sich der Vf. es hier zur Regel gemacht, nie einen Schluss zu überspringen, während er gleich-

wohl sich bemühte, Alles so zusammenzudrängen und mit so wenigen Worten zu sagen, als es ihm möglich war."

„Der Vf. wird ferner überall bemüht sein, nicht sowohl dem Lernenden recht viele Resultate und pikante Sätze mitzutheilen, deren viele in der Zahlenlehre wirklich, wenigstens dem Scheine nach, an sich selbst fast nur Curiosa sind, während sie freilich in der That kostbare Samenkörner für die weitere Entwickelung darbieten: er wird vielmehr trachten, ihm die Sätze als Gegenstände aufzustellen, an welchen das Urtheil zu üben sei; denn das ist, wie oben bemerkt, gerade von der Zahlentheorie insbesondere der Nutzen."

„Die äussere Form, welche der Vf. seiner Schrift gegeben hat, nemlich die Form einer blossen Sammlung von Sätzen, ohne bestimmte Theilnng in grössere und kleinere Abschnitte, kann sonderbar zu sein scheinen. Allein der Vf. hatte sie zu wählen mehrere Gründe."

„Zuerst nemlich ist es nach seiner Ueberzeugung bei dem gegenwärtigen Zustande der Zahlentheorie noch gar nicht möglich, ein consequentes System davon aufzustellen."

„Sodann hat der Vf. gar nicht die Absicht, jeden Lernenden, der sich seines Buches bedienen will, zu einem Kenner der gesammten Zahlentheorie zu machen, sondern er wollte nur insbesondere Jedem Material zur Uebung seines Urtheilsvermögens darbieten."

„Endlich hatte der Vf. zu der Wahl der Form seiner Schrift auch einen persönlichen Grund. Er ist nemlich in einem jetzt schon vorgerückten Alter und mit einer gänzlich zerrütteten Gesundheit, der Beendigung keiner Arbeit, die er unternimmt, mehr sicher. Begann er nun eine Schrift nach irgend einem weit ausgreifenden System, so würde jede Unterbrechung das, was fertig wurde, zum Stückwerk von geringem Nutzen machen. So, wie die Schrift jetzt sein wird, schadet ihr eine Unterbrechung nichts weiter, als dass das, was noch kommen sollte, wenn es überhaupt etwas werth war, fehlt. Was da ist, behält immer seinen verhältnissmässigen Antheil am Zweck. Auch kann man, wenn man etwa insbesondere irgend etwas ausheben will, dies recht gut thun. Man darf nur die vorausgehenden Sätze, welche sich angegeben finden, aufsuchen und durchgehen; die übrigen bleiben dann zur Seite liegen."

Indem ich hiermit diese Auszüge aus der in mehreren Beziehungen lesenswerthen Vorrede schliesse, bemerke ich nur, dass mir gerade in dem von dem Herrn Vf. selbst zuletzt angegebenen Umstande, nämlich in der äussern Form des Werks, eine besondere Eigenthümlichkeit in Bezug auf dessen allgemeine Gestaltung zu liegen scheint, weshalb ich auch auf denselben die Leser des Archivs besonders hinweise. Bei den Bezeichnungen hat sich der Herr Vf. an seine Vorgänger nicht sclavisch gebunden, und auch nicht selten neue, so viel als möglich, deutsche Benennungen gebildet. Eine ausführliche Angabe des Inhalts des vorliegenden ersten Bandes erlaubt hier leider der Raum nicht, und ich bemerke daher in dieser Beziehung, ohne zu glauben, damit ganz das Richtige getroffen zu haben, ganz in der Kürze und bloss im Allgemeinen nur so viel, dass in diesem ersten Bande hauptsächlich diejenigen Lehren der Zahlentheorie enthalten sind,

welche wenigstens nicht unmittelbar und unbedingt die eigentliche Auflösung der unbestimmten Aufgaben oder die sogenannte unbestimmte Analytik in Anspruch nehmen, womit ich des Gegenstandes kundigen Lesern genug, wenn auch freilich in ziemlich unbestimmter Weise, gesagt zu haben glaube, dessenungeachtet aber noch hinzufüge, dass natürlich die Theilbarkeit der Zahlen, die Reste, das Fermat'sche und Wilson'sche Theorem in ihren verschiedenen Gestalten, das Reciprocitäts-Gesetz u. s. w. eine Hauptrolle in diesem ersten Bande spielen.

Ein bestimmtes Urtheil über das vorliegende Werk zu fällen, muss ich mich gänzlich enthalten, weil jedes Urtheil über ein Werk des von mir hochverehrten Herrn Vfs., wie es auch beschaffen sein möchte, von meiner Seite nur befangen erscheinen müsste. Wie viele Andere fühle auch ich mich demselben in nicht wenigen Beziehungen persönlich zu dem innigsten Danke verpflichtet, ein Gefühl, welches, wenn ich auch selbst nicht mehr zu den Jünglingen zu zählen bin, da ich im nächsten Jahre bereits auf eine fünf und zwanzigjährige amtliche Wirksamkeit als Lehrer im Staatsdienste zurückblicken kann, doch nichts von seiner früheren Wärme verloren hat und nie etwas verlieren wird. Ohne das geringste, in jetziger Zeit nicht selten hervortretende Haschen nach sogenannten glänzenden Erfolgen hat der Herr Vf. eine lange Reihe von Jahren mit der reinsten und uneigennützigsten gänzlichen Hingebung dem Dienste der Wissenschaft geweiht, und mit Aufopferungen mancherlei Art zu deren weitern und allgemeinern Verbreitung und zur grösseren Ausbildung und besseren Begründung mehrerer einzelner Disciplinen nicht wenig beigetragen, von welchem Bestreben auch das vorliegende Werk sowohl im Allgemeinen als auch in seiner ausführlichen Vorrede der reinste Spiegel ist, welche letztere wir daher auch insbesondere jüngeren Gelehrten zur Beherzigung empfehlen möchten. Jedenfalls ist dieses Werk, so weit es in seinem ersten Bande vorliegt, die vollständigste Sammlung, wenn auch der Herr Vf. selbst den Namen eines consequent durchgeführten Systems ablehnt, doch keineswegs ohne systematischen Zusammenhang an einander gereiheter Sätze der Zahlenlehre, welches wir bis jetzt besitzen, und wird daher hinfüro in keiner mathematischen Bibliothek fehlen dürfen, von keinem, der sich für die Fortschritte dieses so höchst interessanten Theils der Mathematik, dessen Wichtigkeit für die ganze Wissenschaft sich bis jetzt noch gar nicht absehen lässt, entbehrt werden können. Ich schliesse mit dem innigsten Wunsche, dass die Vorsehung dem Herrn Vf. Kraft schenken möge, dieses angefangene Werk in möglichst kurzer Frist zu vollenden.

G.

Geometrie.

Fischer, J., Elements of Geometry for Naval Schools. Published by order of the Lords of the Admirality. London 1845. 18.

Geometrische Aufgaben nach der Methode der Alten, für Schulen bearbeitet von Dr. F. Luke, Oberlehrer am Gymnasium zu Culm. Erster Theil. Planimetrische Aufgaben. Thorn 1845. 8. 1 thlr. 4 ggr.

Der vorliegende erste Theil dieser Sammlung enthält 100 planimetrische Aufgaben. Jeder Aufgabe ist die Analysis, die Construction, die Determination und der Beweis beigegeben, ganz der Methode der alten Geometer gemäss. Ein Verzeichniss der behandelten Aufgaben ist vorgedruckt. Wenn auch gleich an ähnlichen Büchern kein sehr fühlbarer Mangel ist, so muss doch der geometrische Unterricht nach euklidischer Methode nach unserer festen Ueberzeugung immer die Hauptgrundlage des ganzen mathematischen Unterrichts bleiben, und jedes Beförderungsmittel desselben nach dieser Richtung hin muss, wenn es nur seinen Zweck richtig erkannt hat, dankbar aufgenommen werden. Wir sind daher überzeugt, dass auch die vorliegende Aufgabensammlung manchem Lehrer der Mathematik bei seinem Unterrichte ein gutes Hülfsmittel sein wird. Dass die Anzahl der neuen Aufgaben nicht gross sein kann, ist bei einem schon so vielfach behandelten Gegenstande nicht anders zu erwarten. Indess kommt es hierbei hauptsächlich auf die Methode an, und diese, scheint uns, hat der Herr Vf. meist richtig getroffen, in welcher Beziehung daher auch die Schrift vorzugsweise von uns der Beachtung der Lehrer an höheren Unterrichts-Anstalten empfohlen wird.

Mayr, Dr. A., Die tangirenden Flächen erster und zweiter Ordnung. 4. Würzburg 1845. 16 ggr.

Trigonometrie.

Delatouche, Gustave, Trigonométrie rectiligne à l'usage des élèves qui se destinent aux écoles du gouvernement. Avec 2 planches. Paris 1845.

Summarium der Goniometrie, en der regtlijnige en sphaerische Trigonometrie, dienende als handleiding, bij het volgen van Academische Lessen over deze deelen der Meetkunde; gr. 8vo. Te Leiden 1845. f 1,00.

Eerste Beginselen der Meetkunst (tot aan de vlakken) en Driehoeksmeting, ten gebruike voor het middelbaar en privaat Onderwijs; kl. 8vo. Te Rotterdam, bij H. A. Kramers. f 1,20.

Geodäsie.

Schlieben, W. E. A., Vollständiges Hand- und Lehrbuch der gesammten niederen Messkunde. 3te gänzlich umgearbeitete

und stark vermehrte Aufl., zum Selbstunterrichte bearbeitet von J. B. Montag. Mit 48 Figurentafeln. 8. Quedlinburg 1845. 1 thlr. 8 ggr.

Mechanik.

Langsdorf, G. W. von, Lehrbuch der Elementar-Mechanik. gr. 8. Stuttgart 1845. 21 ggr.

Astronomie.

Arago, Leçons d'astronomie professées à l'observatoire royal. Recueillies par un de ses élèves. 4ème edit. Paris 1845. 3½ fr.

Jeans, H. W., Rules for finding the names and positions of all the Stars of the First and Second Magnitude. Royal 8vo. London 1845. cloth. 3 s. 6 d.

Der Merkurdurchgang durch die Sonnenscheibe am 8. Mai 1845 und die Sonnenfinsterniss d. 6. Mai 1845 in ihren verschiedenen Umständen beschrieben. Nebst einer kurzen Erklärung der Merkurs- und Venusdurchgänge, sowie der Sonnenfinsternisse überhaupt. Mit 1 Tafel Abbildungen. 8. Leipzig 1845. 8 Ngr.

Hansen, Mémoire sur la détermination des perturbations absolues dans les ellipses d'une excentricité et d'une inclinaison quelconques. Traduit de l'allemand par M. Victor Mauvais. In 8. Paris 1845.

Physik.

Baumgartner, A., die Naturlehre in ihrem gegenwärtigen Zustande, mit Rücksicht auf mathematische Begründung. 8. verm. und umgearb. Aufl. 2. Abthl. gr. 8. Wien 1845. Preis beider Abtheilungen 4 thlr. (Vergl. Literar. Ber. Nr. XXI. S. 325.).

Vermischte Schriften.

The Cambridge Mathematical Journal. Nr. XXIII. February 1845. I. On the Theory of Linear Transformations (A. Cayley). — II. On Magic Squares (R. Moon). — III. On the Theory of Developments. Part. I. (G. Boole). — IV. Demonstration of a Fundamental Proposition in the Mechanical Theory of Electricity (W. Thomson). — V. On the Reduction of the General Equation of Surfaces of the Second Order (W. Thomson). — VI. On Certain Integral Transformations (B. Bronwin). — VII. On Certain Continued Fractions (Percival Frost).

Bulletin de la classe physico-mathématique de l'acad. imper. des sciences de St. Petersbourg. Tome IV. Nr. 1—3. gr. 4. St. Pétersbourg 1845. Compl. 2 thlr.

Anzeige eines herauszugebenden Werkes.

Der Zweck, dessen Erreichung der Unterzeichnete bei dieser Arbeit im Auge gehabt, war im Allgemeinen erstens: die Steiner'sche Methode als solche im Sinne ihres Erfinders weiter auszubilden; zweitens: den Umfang ihres Gebietes, sowohl von Seiten der Allgemeinheit als auch der Individualität und insbesondere der quantitativen Form der geometrischen Ideen zu zeigen, und drittens: durch beides zugleich die Ueberzeugung zu verschaffen, dass die neuere Geometrie, in Steiner's Weise behandelt, nichts mehr und nichts weniger als die consequente, durch die Erweiterung der Wissenschaft überhaupt nothwendig gewordene Fortbildung der Geometrie der Alten ist.

Ich habe daher nur solche Eigenschaften behandelt, welche rein aus dem Wesen der Projektivität hervorgehen, und kaum unmittelbare Folgerungen aus der Congruenz der Dreiecke und dem pythagorischen Lehrsatze mir erlaubt; das Princip der Involutionen ist als besonderer Fall projektivischer Gebilde, und zwar, um den Gegenstand in seinen allgemeinsten und besondersten Beziehungen zu umfassen, nach allen den Seiten und Fällen, welche durch Steiner's umsichtsvolle Diskussion des allgemeineren Princips gegeben waren, dargestellt. — Während aber die Entwickelung des Princips vom Allgemeinen zum Besonderen fortschreitet, nimmt die Anwendung auf die Eigenschaften der Figuren den umgekehrten Gang, so dass im letzten Kapitel über die doppelte Berührung der Kegelschnitte fast alle vorhergehenden Sätze und Aufgaben ihren allgemeinsten und meistens auch ihren einfachsten Ausdruck erhalten. Andererseits aber sind gerade diejenigen Eigenschaften, welche, wie die der zug. Durchmesser, der Brennpunkte, der Oskulation und der doppelten Berührung, nach Steiners Ausdrucke bisher als etwas Eigenthümliches und „Wunderbares" dastanden, mit Vorliebe behandelt und ihr Zusammenhang mit allgemeineren Eigenschaften nachgewiesen worden. — In der äusseren Darstellung habe ich, so viel als das Wesen der neueren Geometrie verstattete, in den Grundsätzen der Betrachtung selbst aber durchaus mir die Alten zum Muster genommen. Daher ist jeder Aufgabe ihr vollständiger Beweis und den schwierigeren auch die Analysis beigefügt, und die Begründung der Lehrsätze unterscheidet sich nur insofern von der gewöhnlichen Weise, als sie denselben voran- statt nachgeschickt ist. Die Betrachtung bewegt sich fortwährend in reellen, d. h. durch Konstruktion gegebenen Vorstellungen; das sog. Gesetz der Continuität wird nirgends in Anspruch genommen, und es werden die gemeinschaftlichen Eigenschaften der als reelle und ideale unterschiedenen Linien und Punkte weder durch Uebertragung von der primitiven auf die correlative Figur, noch durch besondere Betrachtung beider für sich, sondern in Einem zugleich aus ihrer gemeinschaftlichen Definition entwickelt. Vor Allem aber habe ich mich, worin ein eigenthümlicher Vorzug der neueren Geometrie vor der der Alten besteht, eines einfachen, ungekünstelten, bloss der Natur

der Sache folgenden Ideenganges beflissen und zu diesem Zwecke das Ganze wiederholentlich umgearbeitet.

Den Inhalt betreffend, hoffe ich manches Neue darzubieten, wohin ich unter Anderem die Sätze über die zugeordneten Achsenpunkte und Brennsehnen, mehrere über Oskulation und doppelte Berührung und sämmtliche Konstruktionen der Kegelschnitte mittels imaginärer Bedingungen oder mittels solcher und zu oskulirender oder doppelt zu berührender Kegelschnitte rechne, abgesehen von den Sätzen, welche durch Verallgemeinerung bekannter Eigenschaften sich ergeben haben.

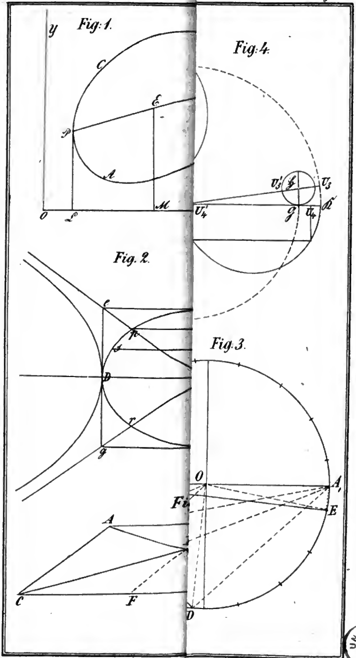
Der vollständige Titel des Werks ist „Das Wesen der Involutionen von Punkten und Strahlen, als gemeinschaftliches Princip individueller Eigenschaften der Figuren, namentlich der ein- und der umgeschriebenen Vielecke, der harmonischen Pole und Polaren, der zugeordneten Durchmesser und Achsenpunkte, der Brennpunkte und Brennsehnen, der gemeinschaftlichen Sekanten- und Tangentendurchschnitte, der Oskulation, der doppelten Berührung und sämmtlicher Konstruktionen der Kegelschnitte mittels sogenannter reeller und imaginärer Bedingungen — im Zusammenhange mit Jak. Steiners Geometrie — dargestellt.“

Franz Seydewitz,
Lehrer der Mathematik und Physik am Königlichen Gymnasium zu Heiligenstadt.

Der Herr Verfasser des vorher angekündigten Werks hat durch mehrere in dem Archiv abgedruckte umfangreichere Abhandlungen sich nicht bloss als einen ausgezeichneten Kenner der sogenannten neueren Geometrie gezeigt, sondern auch den hinreichenden Beweis geliefert, dass er nicht nur das bereits Bekannte auf eine ansprechende Weise wieder zu geben, sondern vielmehr sich auch neue Wege zu bahnen und den bereits gewonnenen Umkreis der Wissenschaft nicht unwesentlich zu erweitern versteht. Daher lässt sich von dem vorher angezeigten Werke in wissenschaftlicher Hinsicht nur etwas Vorzügliches erwarten, und dass das mathematische Publikum überhaupt, namentlich aber auch die Lehrer der Mathematik an höheren Unterrichts-Anstalten, lebhaften Antheil an demselben nehmen werden, darf eben so wenig bezweifelt werden, weil die sogenannte neuere Geometrie, worauf schon mehrmals in dem Archiv hingewiesen worden ist, jedenfalls ein für die immer grössere Beförderung des Gedeihens des mathematischen Unterrichts sehr wesentliches und wichtiges Hülfsmittel nicht bloss zu werden verspricht, sondern schon vielfach geworden ist, wofür die in dem Archive abgedruckten Abhandlungen mehrerer höchst achtbarer Lehrer der Mathematik und einige neuerlich erschienene, in den literarischen Berichten angezeigte Schriften das vollgültigste Zeugniss ablegen. Sowohl in dieser Rücksicht, als auch wegen der Neuheit seines, die Wissenschaft erweiternden Gegenstandes ist es daher sehr zu wünschen, dass dem Herrn Verfasser recht bald eine geeignete Gelegenheit zur Herausgabe seines verdienstlichen Werkes in einer dem Gegenstande würdigen Ausstattung geboten werden möge.

Greifswald, im Mai 1845. Grunert.

Digitized by Google

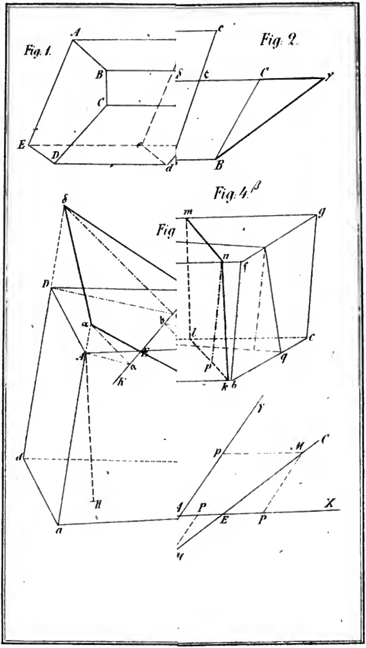


Grunert Archiv.

UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

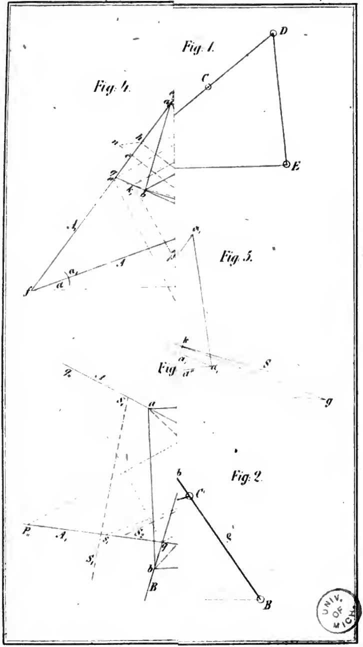
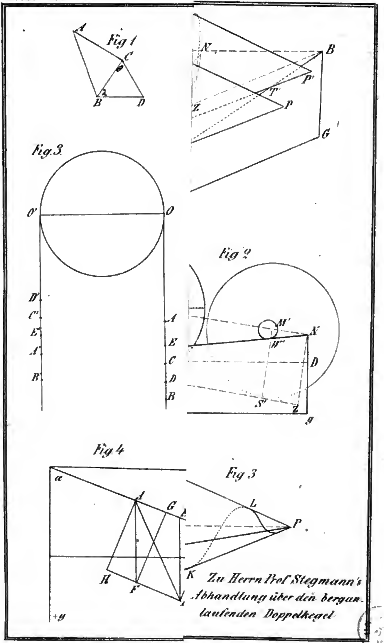


Fig. 1.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 2.
D
C
E
B

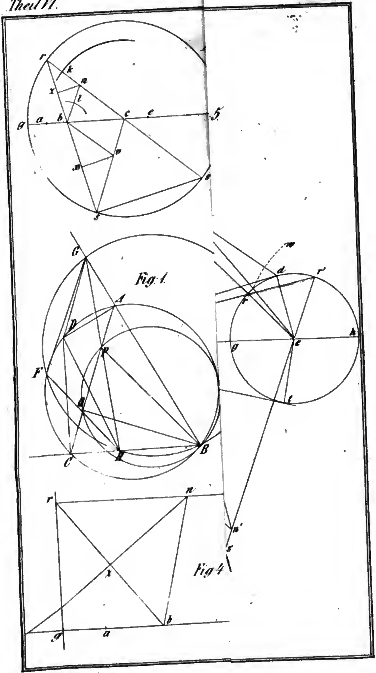
Digitized by Google



Zu Herrn Prof Stegmann's Abhandlung über den bergan laufenden Doppelkegel

Digitized by Google

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BOUND
DEC 19 1932
UNIV. OF MICH.
LIBRARY

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 03698 0657

Deacidified using the Bookkeeper process.
Neutralizing agent: Magnesium Oxide
Treatment Date: Oct 2004

PreservationTechnologies
A WORLD LEADER IN PAPER PRESERVATION
111 Thomson Park Drive
Cranberry Township, PA 16066
(724) 779-2111

Digitized by Google